LEÇONS
DE
MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

LEÇONS

DE

MÉCANIQUE ANALYTIQUE,

DONNÉES A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE

PAR Mr. DE PRONY,

Officier de la Légion d'Honneur, l'un des professeurs de cette École, Membre de l'Institut Royal de France, du Bureau des Longitudes, etc.

SECONDE PARTIE,

QUI TRAITE DU MOUVEMENT DES CORPS SOLIDES.

A PARIS.

M. DCCC. XV.

DE L'IMPRIMERIE DE L'ÉCOLE ROYALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

LEÇONS

DE

MÉCANIQUE ANALYTIQUE,

DONNÉES A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE

PAR Mr. DE PRONY,

Officier de la Légion d'Honneur, l'un des professeurs de cette École, Membre de l'Institut Royal de France, du Bureau des Longitudes, etc.

SECONDE PARTIE,

QUI TRAITE DU MOUVEMENT DES CORPS SOLIDES.

A PARIS.

M. DCCC. XV.

DE L'IMPRIMERIE DE L'ÉCOLE ROYALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE
DE DYNAMIQUE.

SECTION I.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Définition de la Dynamique. Détails historiques. Relations qui lient la théorie de l'équilibre à celle du mouvement.

666. La Dynamique est la partie de la mécanique qui apprend à résoudre les questions relatives aux mouvements des systèmes de corps, en considérant le mouvement particulier de chaque corps de ces systèmes, comme produit, tant par les actions que les autres corps exercent sur lui, que par les actions des puissances quelconques auxquelles il est soumis. (*)

Les données et les inconnues de ces questions peuvent se rapporter, et aux systèmes de forces, et aux systèmes de corps. Ainsi, par exemple, lorsqu'un système donné de ces corps doit avoir des mouvements dont on attend des effets déterminés, on assigne, par les règles de la Dynamique, les forces capables d'opérer ces mouvements; et réciproque-

(*) Le mot *Dynamique*, dérivé de *Δύναμις*, *force*, *puissance*, devrait, dans l'acception étymologique, désigner la *science générale des forces;* mais on est convenu d'appeller *Statique*, de *Στατικὸς*, *qui a la force d'arrêter*, la partie de cette science qui traite spécialement de l'équilibre, et le mot *Dynamique* est restreint à désigner la partie de la même science qui traite du mouvement. De plus ces deux mots *Statique* et *Dynamique*, s'appliquent spécialement à l'équilibre et au mouvement des *corps solides;* et lorsqu'il s'agit de l'équilibre et du mouvement des corps fluides, on les lie à un autre mot *Hydro* (dérivé de *Ὕδωρ*, *eau*) pour en faire les mots composés *Hydrostatique* et *Hydrodynamique*.

ment, si on est obligé d'employer des forces données pour obtenir des effets déterminés, on assigne, par les mêmes règles, la composition du système de corps auquel il faut appliquer les forces, la durée de leur action nécessaire pour la production des effets demandés, etc. ; la théorie générale des *machines* est un des corollaires des solutions de ces deux problêmes.

Dans d'autres cas, un systême de corps est assujéti à des changements de formes, dépendants des forces qui le sollicitent, et ces forces dépendent elles-mêmes des positions respectives des corps ; si les lois, auxquelles leurs actions se trouvent soumises, sont connues, et que l'*état* du systême soit aussi connu, pour une certaine époque, la Dynamique fournit des méthodes pour en conclure l'*état* du même systême à des époques quelconques antérieures ou postérieures à celle qui correspond à l'*état* donné. La *théorie* de l'*astronomie physique* découle des principes sur lesquels ces méthodes sont fondées, etc.

667. La *Dynamique* est une science nouvelle ; il y a environ deux siècles que l'illustre *Galilée* a découvert les premières vérités qui lui servent de fondement, et les a publiées dans son ouvrage intitulé *Diàloghi delle scienze nuove*, mis au jour, pour la première fois, à Leyde en 1638. *Archimède* avait crée la *Statique*, posé les bases de la théorie de l'équilibre *des corps flottants* (*) et, pendant les 18 siècles qui se sont écoulés entre lui et Galilée, la mécanique était, à peu de chose près, restée dans le même état où l'avait mise la puissance de son génie ; mais, après une si longue enfance, elle a fait, tout-à-coup, des progrès dont la rapidité offre, aux annales de l'esprit humain, un de leurs faits remarquables ; cette science, l'une des moins avancées [redacted]

donné l'énumération article 3, au lieu que la seconde, n'employant aucune des quantités qui dépendent du *temps*, ne se rapporte, d'ailleurs, qu'à un cas particulier de l'action des forces, et ne considère les systêmes de corps auxquels ces forces sont appliquées, que comme de simples moyens de transmission de leurs actions (voyez l'art. 35); il reste même encore, après les cas d'équilibre traité dans la première partie de ce cours, l'examen important de ceux qui ont lieu entre les corps en mouvement, examen qui appartient proprement à la Dynamique, et qui, en complétant la science de l'équilibre, mettra dans tout leur jour, et son unité de principe, et les relations qui la lient à la science du mouvement.

669. On verra, quand j'aurai fait les rapprochements fournis par les relations dont je viens de parler, que la Statique n'est, au fond, qu'un corollaire de la Dynamique; la vérité de cette proposition doit être naturellement pressentie quand on considère, soit les rapports qui existent entre les diverses théories mathématiques à mesure qu'elles acquièrent plus de généralité, soit la propriété qu'ont les formules analytiques de s'appliquer à toutes les valeurs et à tous les états possibles des variables qu'elles renferment; et, si ces variables se rapportent au *mouvement* les formules doivent donner les cas, soit du mouvement nul ou évanescent, soit du mouvement acquis et actuel dont les changements sont nuls, cas qui ont lieu lorsque les systêmes de corps et de forces sont tellement combinés que ces forces se contrebalancent réciproquement, et se font équilibre.

Ces observations et quelques autres que je supprime pour abréger prouvent qu'on pourrait, ainsi que je l'ai déjà insinué, art. 13, commencer l'étude de la mécanique par la partie de cette science qui traite du mouvement, et même ne pas regarder la Statique comme une de ses divisions particulières, en liant la série des propositions qu'on y démontre aux questions de mouvement. Cette marche serait peut-être, philosophiquement parlant, la plus régulière, et même il est convenable de la suivre, ainsi que je l'ai fait, au moins en présentant les premières notions sur la force ou puissance, notions auxquelles je suis parvenu par la considération du mouvement, les rattachant par là aux *effets* qui frappent le plus souvent et le plus vivement nos sens; c'est après les avoir ainsi établies que je me suis restreint à un cas par-

dule (celui qui est à l'extrêmité du systême) incliné, soit tout-à-coup détruit, sans qu'il en résulte aucune action sur le pendule, de manière que ce pendule, cédant à la pesanteur, aille reprendre sa situation verticale, qu'aussitôt qu'il est dans cette situation, le 2e. pendule soit laché, puis le 3e. dès que le 2e. est devenu vertical, et ainsi des autres; on peut, si l'on veut, supposer encore qu'aussitôt que chacun de ces pendules arrive dans la verticale, il est subitement caché de manière à disparaître aux yeux du spectateur qui a la perception de leurs chutes successives; ce spectateur sera, dans cette circonstance, et pour cette espèce particulière de phénomène, en droit d'affirmer que le rapport de la durée partielle d'une des sensations causées par les chutes de ces pendules, est à leur durée totale comme l'unité est au nombre des sensations; il en est de cette proposition comme de celle qui m'a conduit, art. 16 et suivants, à la détermination du type naturel de la *force* ou *puissance*, on ne saurait la nier qu'après avoir ruiné toute base de raisonnement en physique. Le spectateur dont j'ai parlé, poura donc désormais, sans s'occuper de la chute de ces pendules qui est censée continuée indéfiniment, comparer exactement entr'elles les diverses portions de la durée de sa vie, s'il connait les nombres des chutes qui ont eu lieu pendant chacune de ces portions de durée, prise pour unité de temps.

Les sous-divisions égales de cette unité ne sont pas, comme je le ferai voir dans la suite du cours, données par les sous-divisions égales des arcs que décrivent les pendules, mais on peut les obtenir par un autre système de pendules, tel que deux, trois etc. chutes, dans ce deuxième systême, correspondent à une seule chute du premier.

673. Ces moyens de mesurer le temps, sont effectivement ceux qu'on

[redacted]

est suivie d'une 3e. remplissant les mêmes conditions, et ainsi de suite. Une machine fait ordinairement l'office de *compteur*, et sert à indiquer le nombre des *oscillations* qui mesure le *temps* écoulé entre deux instans, le pendule *mathématique*, dont je viens de parler, pouvant toujours être remplacé par une masse finie, qui oscille autour d'un axe horizontal, lorsque la distance entre cet axe et un point de la masse, que les élèves apprendront à déterminer dans la suite du cours, est égale à la longueur du pendule *mathématique*.

674. Dès qu'on a une seule de ces machines, construite de manière à être un chronomètre régulier, on en peut construire un nombre arbitraire d'autres, auxquelles elle sert de modèle ou d'*étalon*, et avoir en divers temps, dans un même lieu, des types de durée comparables entr'eux, comme on en a pour toute autre espèce d'objet mensurable; mais quelques précautions qu'on prenne pour rendre un type, fourni par l'art, aussi exact et aussi peu altérable que puissent l'être des ouvrages sortis de la main des hommes, il n'en est pas moins très-important de savoir si la nature ne nous en fournirait pas un autre qu'aucune cause de destruction et de vicissitude, dépendante des lois connues auxquelles elle est soumise, ne puisse atteindre; ce type naturel et invariable existe, on peut y avoir recours, avec la même facilité, dans tous les temps et dans tous les lieux, et il est donné par la révolution de la terre sur son axe, autour duquel elle décrit, dans des temps égaux, des angles dont l'égalité est également constatée, et par la théorie et par l'observation.

L'intervalle de temps écoulé entre deux retours du même méridien à un plan qui, parallèle à un autre plan fixe, passe par l'axe de rotation de la terre, est ce qu'on appelle un jour *sydéral*. Pour rapporter ce jour et ses sous-divisions à des mesures absolues, il faut avoir, à la latitude de Paris, un pendule physique, faisant, dans un temps donné, un nombre d'oscillations égal à celui qu'on obtiendrait, pendant le même temps, du pendule *mathématique* dont j'ai parlé à l'art. précédent (nombre qui se détermine, avec la plus grande précision, par le calcul) et supposant que le dernier pendule ait une longueur de $0^{m},737861$, la durée du *jour sydéral* sera exactement mesurée par 100000 de ces oscillations.

Cette longueur convient au niveau de la mer et à la latitude de Paris; à une latitude quelconque et toujours au niveau de la mer,

la longueur du pendule qui donne un 100000e. du jour sydéral se calcule, comme je le ferai voir dans la suite du cours, par une formule qui contient un terme constant et un terme proportionnel au quarré du sinus de la latitude, formule à laquelle on peut en substituer une contenant un terme constant et un autre terme proportionnel au cosinus du double de la latitude ; le terme constant de la première formule étant la longueur du pendule *sydéral* sous l'équateur, et le terme constant de la seconde, la longueur du même pendule sous le parallèle moyen.

Si on divisait le jour *sydéral* en 24 heures, et chaque heure en 60 minutes, ou 3600 secondes, une de ces secondes serait mesurée par l'oscillation d'un pendule de $0^{m},9884327$ de longueur.

675. Le temps sydéral dont les astronomes font un fréquent usage, a cependant, pour les usages civils, des inconvénients qui ne permettent pas de l'employer : inconvénients qui tiennent à la différence entre le jour *sidéral* et le jour *solaire* celui qui s'écoule entre deux passages consécutifs du soleil par le même méridien. Si une horloge, réglée sur le temps sydéral, marque midi, un jour donné, au moment où le soleil traverse ce méridien, le lendemain l'instant de son midi précédera le midi solaire, d'environ $\frac{27}{10000}$ de jour, et l'intervalle de temps entre les deux midi, s'accroîtra de jour en jour, de manière que l'horloge *sydérale* ne sera nullement propre à indiquer, même à peu près, soit l'instant du midi solaire, soit les divisions du jour rapportées à cet instant, et il est indispensable qu'une horloge adaptée aux besoins de la société remplisse cette condition. L'expédient, qui se présente naturellement dans cette circonstance, est de prendre le jour solaire pour type du temps civil, mais, par cet expédient, on n'arriverait point [redacted]

tantôt en plus, tantôt en moins, de manière cependant que jamais, l'instant de départ étant convenablement choisi, l'avance ou le retard du midi moyen sur le midi solaire, qui s'appelle *équation du temps*, n'excède $\frac{11}{1000}$ de jour environ; on trouve *l'équation du temps*, pour chaque jour de l'année, dans le livre de la *connaissance des temps* et dans l'*annuaire* du bureau des longitudes.

676. La longueur du pendule, qui, à la latitude de Paris, fait 100000 oscillations pendant un jour moyen, est de $0^m,7419070$ et celle du pendule, qui, à la même latitude, divise ce jour en 86400 parties, est de $0^m,9938526$; je démontrerai, dans la suite du cours, la théorie sur laquelle ces déterminations sont fondées. Le premier pendule s'appelle *pendule décimal*, et le second, *pendule sexagésimal*. On prend pour unité de temps la durée d'une oscillation, ou de l'un ou de l'autre, et, lorsque je donnerai des mesures absolues de durée, j'aurai soin de dire si elles se rapportent à la division décimale ou à la division sexagésimale du jour moyen.

Il suit de ce qui précède que, le jour *moyen* étant représenté par l'unité, le jour *sydéral* sera $= 0,99726957$; la différence $= 0,00273043$ de jour *moyen*, et, en division sexagésimale de ce jour, $3'.55'', 9091$. Réciproquement si le jour sydéral $= 1$, le jour moyen $= 1,00273791$.

Considérations générales sur les relations entre les espaces parcourus par un point matériel, et les temps employés à parcourir ces espaces. Différentes espèces de mouvements que comportent ces relations. Définitions du mouvement *uniforme* et du mouvement *varié*. Ce qu'on entend par mouvement *accéléré* et mouvement *retardé*. Considérations analytiques applicables à tous les genres de mouvements.

677. La *force* ou *puissance* étant une propriété de la matière, et une faculté des êtres animés, dont la nature intime nous est inconnue, et dont nous ne pouvons nous faire une idée que par ses effets, je dois, avant de la considérer comme produisant un mouvement actuel, et de poser les principes relatifs à sa mesure et à son introduction dans le calcul, sous ce point de vue, parler d'abord du mouvement, abstraction faite de la cause motrice, et chercher à faire un classement des phénomènes qu'il offre à nos yeux. On verra bientôt combien cet ordre d'exposition est utile et même indispensable pour la clarté.

Je ne considérerai, dans ces premières notions, qu'un seul corps mobile, et même ce mobile sera réduit à n'être qu'un point matériel. Je supposerai de plus, pour fixer davantage les idées, que la ligne décrite par ce point mobile, dans l'espace, est une ligne droite donnée de position quoique cette dernière hypothèse ne soit pas absolument nécessaire à l'intelligence de ce que je vais dire.

Dans cet état de choses, si, en observant les différents points de la ligne du mouvement que le mobile occupe successivement, on observe simultanément le nombre d'unités de temps indiquées par un chronomètre, et qu'on nomme t le nombre de ces unités comptées à l'instant où le mobile est à une distance x d'un point fixe pris sur la ligne droite du mouvement, l'expression analytique des lois auxquelles sont soumis les phénomènes apparents du mouvement dont il s'agit ne pourra être que l'énonciation de certaines relations entre les quantités x et t, quantités dont le rapprochement fournira bientôt des bases importantes de théorie.

678. Les résultats de ce rapprochement seront donc énoncés par des formules dans lesquelles x et t se trouveront combinées ensemble; mais ces quantités sont de natures différentes et il faut d'abord expliquer comment elles doivent être envisagées, lorsqu'on les introduit dans une même équation.

Une quantité, de quelque nature qu'elle soit, ne peut devenir l'élément d'un calcul qu'autant qu'elle est rapportée à une *unité*, ou à une autre quantité de même nature qu'elle, dont la fixation est arbitraire, mais qui, une fois fixée, ne doit plus changer, du moins tant qu'elle est employée dans un même calcul; l'énoncé *numérique* de cette quantité n'est autre chose que l'énoncé du rapport qu'elle a avec la quantité

[redacted]

679. Ces préliminaires posés et ϕ étant le signe de fonction, tout ce que les phénomènes du mouvement rectiligne d'un point matériel peuvent offrir à l'analyse doit pouvoir s'exprimer par une équation qui a pour symbole général

$$\phi\,(x, t) = 0$$

ou s'en déduire, les diverses espèces de mouvement se rapportant à des cas particuliers de cette équation.

J'observerai, avant de passer à ces différents cas, qu'on ne doit point, en général, ainsi que les commençants sont presque toujours tentés de le faire, considérer x comme l'espace parcouru pendant le temps t; cette circonstance n'a lieu que lorsque l'équation $\phi(x, t) = 0$ est telle qu'on a en même temps, $t = 0$ et $x = 0$; dans tout les autres cas si on suppose qu'en faisant $t = 0$, on ait $x = E$, l'espace parcouru, pendant le temps t sera $x - E$, la constante E étant la distance à laquelle le mobile se trouve du point fixe, pris sur la ligne du mouvement *pour origine des* x, lorsque $t = 0$. Les variations de x et t sont, et seront dans ce qui suit, assujetties à la loi de *continuité*.

680. Le cas de l'équation générale $\phi(x, t) = 0$, qui donne la relation la plus simple entre les espaces $x - E$ et les temps t employés à parcourir ces espaces, a lieu lorsque $\phi(x, t) = x - E - Vt$ ou lorsque

$$\frac{x - E}{t} - V = 0$$

V étant une quantité constante. Le mouvement qui comporte cette relation s'appelle *mouvement uniforme*, j'en parlerai bientôt avec quelque détail.

681. Lorsque la relation $\dfrac{x - E}{t} - V = 0$ n'a pas lieu le mouvement prend la dénomination générique de *mouvement varié*; ce genre se sous-divise, ensuite, en deux classes, savoir : le *mouvement accéléré* dans lequel le rapport entre les espaces parcourus et les temps t employés à parcourir ces espaces augmente avec t, et le *mouvement retardé* dans lequel ce même rapport diminue avec t.

682. Le mouvement uniforme, dans lequel le rapport dont je viens de parler est constant, peut ainsi être regardé, soit comme le passage du *mouvement accéléré* au *mouvement retardé*, soit comme le passage inverse; de plus il résulte, de la théorie des équations, qu'un

mouvement peut être successivement accéléré et retardé quoique sa loi ne cesse pas d'être exprimée par une même équation formant un cas particulier de l'équation générale $\phi(x,t)=0$; mais, comme je suppose que x et t sont assujettis à la loi de continuité, je puis présenter le classement de l'article précédent de manière à indiquer, sans équivoque, le mouvement qui a lieu à un instant déterminé en disant que ce mouvement est *uniforme*, *accéléré*, ou *retardé*, respectivement, suivant que $\frac{dx}{dt}$ est constant, croissant ou décroissant lorsque t varie d'une quantité infiniment petite. Je prends dt pour différentielle constante et je conserverai cette hypothèse dans la presque totalité des questions de mécanique auxquelles l'analyse devra être appliquée.

683. L'origine de la variable x est, d'après la convention faite art. 679, à une distance E du point où le mobile se trouve lorsque l'on compte *zero temps*; pour avoir, à ce dernier point, l'origine des espaces parcourus pendant les temps t, et désignés par ξ, on fera $x-E=\xi$ et on substituera $\xi+E$ à x dans l'équation $\phi(x,t)=0$; mais on a une méthode générale pour déduire, de l'équation $\phi(x,t)=0$, une relation entre des espaces quelconques, désignés par ε, et les temps, désignés par τ, pendant lesquels ces espaces ε sont parcourus, relation qui, donnant, par l'état de la question, $\varepsilon=0$ lorsque $\tau=0$, permet en même temps de placer l'origine des ε à un point arbitraire de la ligne du mouvement. Supposant, pour plus de commodité, que l'équation $\phi(x,t)=0$ est résolue par rapport à x, cette équation devient

$$x=f(t);$$

prenant l'origine de ε à l'extrémité d'une valeur arbitraire de x, et faisant,

[redacted]

684. Si dans la fonction $f''(t)$ on substitue à t, $t+\lambda\tau$, en désignant par λ une quantité positive plus petite que l'unité, on aura par le théorême de Lagrange

$$\varepsilon=\tau f'(t)+\tfrac{1}{2}\tau^2 f''(t+\lambda\tau);$$

cette équation me servira à éclaircir quelques points de théorie.

Propriétés du mouvement uniforme. Définition de la *vitesse*. Mouvements variés qui, pour certaines divisions du temps, offrent les propriétés du mouvement uniforme.

685. On peut énoncer ainsi la propriété fondamentale du *mouvement uniforme:* « la ligne parcourue par le point mobile étant supposée « divisée en parties égales, les temps employés à parcourir chacune de « ces parties seront aussi égaux entr'eux, quelque soit la distance entre « deux points de division consécutifs de la ligne parcourue. »

Cette propriété fondamentale est évidemment énoncée par l'équation de l'art. 680

$$x=E+Vt;$$

dans laquelle x est la distance à laquelle le mobile se trouve, au bout du temps t, d'un point fixe pris sur la ligne du mouvement, E la distance de ce point fixe à celui où se trouve le mobile lorsque l'on compte *zero temps*, et V une autre constante.

On voit en effet que si, par exemple, à partir du point où $x=E$, on porte, sur la ligne des x, des divisions égales, la longueur d'une de ces divisions, que je désigne par ω, étant arbitraire, les valeurs de x, correspondantes à chacune d'elles, de part et d'autre de ce point où $x=E$, seront $E+\omega$, $E+2\omega$, $E+3\omega$ etc. $E-\omega$, $E-2\omega$, etc. et les valeurs correspondantes de t seront $\frac{\omega}{V}$, $\frac{2\omega}{V}$, $\frac{3\omega}{V}$, etc. $-\frac{\omega}{V}$, $-\frac{2\omega}{V}$, etc. de manière que le temps employé à parcourir l'une quelconque des divisions ω aura pour valeur numérique $\frac{\omega}{V}$, quelque soit la valeur particulière de ω. On arriverait à un résultat semblable en plaçant un des points de division partout ailleurs qu'au point où $x=E$.

686. Les valeurs de x et t étant quelconques si t augmente d'une unité de temps, ou de $1''$, l'équation $x=E+Vt$ deviendra

$x+\omega=E+V(t+1'')$ en désignant par ω l'espace parcouru par le mobile pendant $1''$; retranchant la première équation de la seconde on a $\omega=V$, d'où on conclut que la constante V est l'espace que le mobile parcourt pendant chaque unité de temps.

Cette constante V est une quantité que j'appelle *caractéristique*, parce-qu'elle distingue un mouvement uniforme de tout autre mouvement du même genre; une propriété semblable ne peut point appartenir à la constante E, vu que cette constante dépend de la position de l'origine des x, laquelle origine peut, pour un même mouvement, être placée arbitrairement, au lieu que V ne peut changer qu'avec le mouvement.

Par cette raison on a donné à la *caractéristique* V un nom particulier et on l'a appelé *vîtesse*; l'acception de ce mot est parfaitement conforme à celle qui lui est attribuée dans le langage ordinaire; on dit qu'un mobile se meut plus ou moins vite qu'un autre, lorsqu'il parcourt un même espace dans un temps plus ou moins court, ce qui, en présupposant l'uniformité du mouvement, revient à dire qu'il parcourt, pendant chaque division égale du temps, un espace plus ou moins long.

687. Lorsque l'espace parcouru pendant chaque unité de temps n'est pas immédiatement donné, mais que l'on connoit l'espace total X parcouru pendant un temps T, on en conclut la vîtesse V en substituant, dans l'équation de l'art. 685, X à $x-E$ et T à t, ce qui donne

$$V=\frac{X}{T};$$

« la *vîtesse*, dans le mouvement uniforme, est égale à l'espace parcouru « divisé par le temps employé à parcourir cet espace.»

[redacted]

689. Si plusieurs points mobiles se meuvent uniformément, le mouvement de chacun d'eux sera exprimé par une équation de la forme $x = E + Vt$; on peut supposer que tous ces mobiles marchent sur une même ligne droite, et chercher leurs distances respectives à des instants déterminés, les points de la ligne du mouvement où ils se rencontrent deux à deux, trois à trois, etc. les instants de ces rencontres etc.; ces problêmes sont connus sous le nom de *problêmes des courriers*; on peut encore supposer que tous ces mobiles circulent autour d'une même courbe fermée (ce cas renferme les *problêmes des aiguilles* qui parcourent un même cadran); dans ce cas les phénomènes, dont je viens de parler, se renouvellent périodiquement, et leurs *époques* donnent lieu à des déterminations qui s'obtiennent généralement, ainsi que les solutions des *problêmes des courriers*, par des combinaisons d'équations de la forme $x = E + Vt$; ces problêmes peuvent fournir une matière d'exercice aux élèves, mais je ne m'y arrêterai point vu leur peu d'utilité; ils trouveront aux art. 8 et 9 de ma *Mécanique philosophique*, les formules générales qui les résolvent.

690. J'ai dit, art. 672, à propos de la mesure du temps, que les oscillations du pendule étaient toutes d'égale durée, mais que les sous-divisions égales de l'arc décrit dans une oscillation n'étaient pas parcourues dans des temps égaux; d'après cela, si on portait sur une même ligne droite, un nombre indéfini de longueurs consécutives et contigues, égales à l'arc décrit par le point inférieur du pendule, dans chaque oscillation, et qu'un mobile parcourut successivement ces longueurs, ayant, à un point quelconque de l'une d'entr'elles, précisément le même mouvement dont est doué le point inférieur du pendule, au point correspondant de l'arc qu'il décrit, il résulterait de ces dispositions que des divisions de la ligne du mouvement, égales entr'elles et à un nombre entier des longueurs dont je viens de parler, seraient parcourues dans des temps égaux, ce qui offre, pour ce mode de sous-division, la propriété du mouvement uniforme, mais cette propriété n'aurait pas lieu pour un mode quelconque ou arbitraire de sous-division de la ligne du mouvement.

L'équation du symbole de mouvement uniforme, dont je viens de parler, en ne le bornant pas au cas du pendule, mais en l'étendant à tous les cas qui offrent des phénomènes de même espèce, est $x = \Theta + Vt$; x et t ont la même signification que ci-dessus, V est une cons-

tante, et Θ une fonction quelconque ou arbitraire des quantités A, B sin. $\frac{2\pi t}{k}$, C cos. $\frac{2\pi t}{k}$; A, B et C étant des constantes, π la demi circonférence dont le rayon $= 1$ et k le temps constant employé par le mobile à parcourir une des divisions de la ligne du mouvement qui offre la propriété de l'uniformité. Il est manifeste, en effet, que Θ a une valeur constante pour toutes les valeurs $t = 0$, $t = k$, $t = 2k \ldots\ldots t = nk$, n étant un nombre entier positif ou négatif. On trouvera, dans la suite du cours, quelques exemples de l'espèce de mouvement dont je viens de parler.

Pour voir les relations qui lient l'équation $x = \Theta + Vt$ à l'équation $x = E + Vt$, il faut observer qu'on satisfait également aux conditions de l'uniformité du mouvement par l'équation différentielle $\frac{ddx}{dt^2} = 0$ et par l'équation aux différences $\frac{\Delta\Delta x}{\tau^2} = 0$; la première, par une double intégration, conduit purement et simplement à la relation $x = E + Vt$, les constantes arbitraires étant E et V; mais la seconde, d'après la théorie de la *méthode inverse des différences*, conduit à une équation finie qui n'acquiert toute la généralité dont elle est susceptible, que lorsqu'on y introduit la fonction arbitraire Θ; or, pour ramener l'équation finie, fournie par l'équation aux différences, à la forme $x = E + Vt$, il suffit de supposer, dans Θ, l'incrément du temps infiniment petit, c'est-à-dire de substituer à k, la quantité $\frac{1}{m} k$, m étant un nombre entier infini, positif ou négatif; dès-lors on a, pour toutes les valeurs possibles de t, sin. $\frac{2\pi t}{\ldots} = 0$; cos. $\frac{2\pi t}{\ldots} = 1$,

[redacted]

patibles avec la définition du mouvement varié donnée, article 681, lorsqu'on y compare des espaces finis avec les temps finis employés à les parcourir. Il existe cependant, dans ce genre de mouvement, une quantité qui a une valeur déterminée pour chaque instant, mais variable d'un instant à l'autre, et à laquelle on peut rigoureusement appliquer tout ce que j'ai dit de la vîtesse. Voici comment on obtient l'expression de cette quantité, par la considération des *infiniment petits ;* j'observe, d'une part, que la notion de vîtesse est tout-à-fait indépendante de la grandeur absolue de l'espace parcouru, d'une autre part, que d'après la théorie des équations à deux variables, qu'on peut désigner par x et t, si ξ est la différence entre deux valeurs consécutives d'une des variables, de x par exemple, et τ la différence entre les deux valeurs correspondantes de l'autre, l'équation entre ξ et τ, déduite de celle qui existe entre les deux variables et qu'on peut représenter par $x=f(t)$, approchera d'autant plus d'être de la forme $a\xi+b\tau=0$ (a et b se composant de constantes absolues et de quantités rapportées à l'origine de ξ et τ et considérées comme constantes) que ξ et τ seront plus petites. De manière que si ξ et τ deviennent dx et dt, la n^e. partie de dx correspondra à la n^e. partie de dt, quelque soit le nombre n ; ainsi $x=f(t)$ étant l'équation d'un mouvement varié quelconque et $\frac{1}{n}\,dx$ étant l'incrément de x, $\frac{1}{n}\,dt$ sera l'incrément correspondant de t et on aura, entre les espaces parcourus $\frac{dx}{n}$ et les temps $\frac{dt}{n}$ employés à les parcourir, les relations qui constituent un mouvement uniforme dans lequel la vîtesse, désignée par v, aura pour valeur $v=\frac{dx}{n}:\frac{dt}{n}=\frac{dx}{dt}$.

692. L'équation de l'art. 684 conduit immédiatement au résultat que je viens d'obtenir d'une manière d'autant plus satisfaisante qu'elle fournit la démonstration que j'ai supposée connue du théorême sur la limite du rapport de ξ à τ. En effet, on déduit de cette équation la relation $\frac{\xi}{\tau}=f'(t)+\frac{1}{2}\tau f''(t+\lambda\tau)$ dans laquelle le rapport fini de l'espace parcouru ξ au temps τ approche d'autant plus d'être égal à la quantité $f'(t)$, constante par rapport à ξ, que τ est plus petit, et on peut toujours donner à τ une valeur telle que $\frac{\xi}{\tau}-f'(t)$ soit plus

petit qu'aucune quantité assignable ; donc, à la limite, l'équation qui exprime la relation entre les espaces parcourus ξ et les temps τ employés à les parcourir, est celle d'un mouvement uniforme dans lequel la vîtesse serait égale à $f'(t)$ ou à la valeur déterminée qu'a $\frac{dx}{dt}$ à l'origine de ξ.

693. La vîtesse n'est plus ici comme dans le cas de l'art. 686 une quantité caractéristique qui distingue un mouvement varié des autres mouvements du même genre ; c'est une variable v, qui a pour expression générale

$$v = f'(t).$$

et qui change, par conséquent, à chaque instant. On peut toujours assigner dans deux mouvements variés quelconques, très-différents d'ailleurs, les instants où elle a une valeur commune.

694. Le terme $\frac{1}{2} f''(t + \lambda\tau)$ renferme toutes les parties de la valeur de ξ qui constituent le mobile dans l'état de *mouvement varié ;* si quelque changement à cet état occasionnait l'anéantissement de ce terme, le mobile ne cesserait pas de se mouvoir, mais sa vîtesse cesserait de varier et il continuerait son mouvement avec la vîtesse constante $f'(t)$ ou $\frac{dx}{dt}$, en donnant à cette expression la valeur qu'elle doit avoir au moment où le changement de l'état du corps s'est opéré.

695. Les élèves trouveront, dans la suite du cours, quelques exemples de mouvements qui, par leur nature, tendent à l'uniformité et l'atteignent par fois, sensiblement, dans un temps très-court. Tels sont les mouvements dans lesquels l'équation, qui donne la vîtesse à chaque instant, est de

considérée relativement à la production d'un mouvement actuel, joindre à la théorie du mouvement uniforme que j'ai exposée dans les art. 685 et suivants, celle d'une première espèce de mouvement varié, dont il est important que les élèves se rendent les formules très-familières.

Le mouvement dont je parle et qu'on appelle mouvement *uniformément varié* est celui dans lequel il existe entre les augmentations ou les diminutions de vîtesse du mobile, et les temps pendant lesquels ces changemens de vîtesse s'opèrent, précisément les mêmes relations assignées, art. 685, dans le mouvement uniforme, entre les espaces parcourus et les temps employés à parcourir ces espaces, relations qui caractérisent ce dernier mouvement ou le constituent ce qu'il est.

Le mouvement *uniformément varié* est désigné particulièrement par les noms de mouvement *uniformément accéléré* ou *uniformément retardé*, respectivement, suivant que la vitesse croit ou diminue lorsque le temps augmente.

697. Il s'agit donc, pour exprimer analytiquement les loix du mouvement *uniformément varié*, de poser une équation, entre les vîtesses v et les temps t, énonçant que les variations de v sont proportionnelles aux variations correspondantes de t; cette équation, entre v et t, doit évidemment être de la même forme que l'équation, entre x et t, de l'art. 685, c'est-à-dire qu'on a

$$v = U \pm gt;$$

les signes supérieurs et inférieurs se rapportent, respectivement, aux cas des mouvements *uniformément accéléré* et *uniformément retardé*, U et g sont deux constantes; la première est la vîtesse qui a lieu lorsque l'on compte *zéro temps* de la même manière que dans l'équation de l'art. 685, E était, pour le même cas de $t=0$, la valeur correspondante de x où la distance du mobile a un point fixe pris sur la ligne du mouvement.

La vîtesse acquise dans le mouvement uniformément accéléré ou perdue dans le mouvement uniformément retardé, depuis l'origine du temps t, est, respectivement, $v-U$ ou $U-v$, quantité proportionnelle à t, comme l'était $x-E$ dans l'équation de l'art. 685.

698. De plus la constante g est la *caractéristique* d'un mouvement *uniformément varié*, considéré en particulier, c'est-à-dire la quantité qui distingue ce mouvement de tout autre mouvement de son espèce,

comme la quantité V était la *caractéristique* du mouvement uniforme. En effet la constante U de l'équation $v = U \pm gt$, ou la vitesse initiale peut être commune à une infinité de mouvements uniformément variés, différents les uns des autres, mais g, pour chacun de ces mouvements, ne peut pas changer sans que ce mouvement ne change.

La propriété *caractéristique* dont je viens de parler devient manifeste si on observe que cette quantité g est, suivant que le mouvement est accéléré ou retardé, l'augmentation ou la diminution de vîtesse que le mobile éprouve, dans le cours de son mouvement, pendant chaque unité de temps; car si on substitue $t + 1''$ à t, ce qui donnera $v' = U \pm g(t + 1'')$, et qu'on retranche de cette équation l'équation $v = U \pm gt$ on aura $g = \pm (v' - v)$, les signes supérieur et inférieur se rapportant encore, respectivement, au cas du mouvement accéléré et à celui du mouvement retardé.

699. J'ai dit art. 686 qu'on avait désigné, par un nom particulier, la *caractéristique* V; on en a aussi donné un à la *caractéristique* g qui s'appelle *force accélératrice*. Je reviendrai bientôt sur cette expression.

Lorsque g n'est pas donné immédiatement, et qu'on connait la vîtesse W gagnée ou perdue pendant un temps T, c'est-à-dire ajoutée à celle que le mobile avait déjà au commencement de ce temps T ou retranchée de cette vîtesse initiale, on peut déterminer g par le moyen de W et T, en substituant, dans l'équation $v - U = \pm gt$, W à $v - U$ et T à t, ce qui donne $W = \pm gT$ et $g = \pm \frac{W}{T}$.

Au moyen de cette équation $W = \pm gT$ l'une quelconque des trois quantités W, g et T se détermine par les deux autres.

[redacted]

nous faire découvrir des propriétés qui sont particulières au mouvement uniformément varié.

Continuant à désigner par x la distance à laquelle le mobile se trouve, au bout du temps t, d'un point fixe pris sur la ligne droite de son mouvement, j'observe que, d'après la valeur générale de la vîtesse donnée art. 693, je puis dans l'équation $v = U \pm gt$ substituer $\frac{dx}{dt}$ à v ce qui donne

$$dx = U\,dt \pm gt\,dt \ldots\ldots\ldots (1)$$

et en intégrant

$$x = E + Ut \pm \tfrac{1}{2}gt^2 \ldots\ldots (2)$$

les signes supérieur et inférieur continuent à se rapporter, respectivement, au cas du mouvement accéléré et à celui du mouvement retardé. E est la constante arbitraire introduite par l'intégration; c'est la distance à laquelle le mobile se trouve de l'origine lorsque l'on compte *zéro temps*.

701. $x - E$ est l'espace parcouru pendant le temps t et cet espace se compose 1°. d'un espace Ut proportionnel au temps t et égal à celui que le mobile aurait parcouru d'un mouvement uniforme si, depuis l'origine de t, il n'eût été animé que de la vîtesse constante et initiale U; 2°. d'un espace $\pm \frac{1}{2}gt^2$, proportionnel au carré du temps et à la *caractéristique* g : c'est l'expression $\pm \frac{1}{2}gt^2$ qui détermine la variation du mouvement, lequel, sans cette expression, serait uniforme.

702. Je puis, pour simplifier et sans nuire à la généralité des résultats, supposer que le mobile se trouve à l'origine des x lorsque l'on compte *zéro temps* et les équations du mouvement uniformément varié deviennent

$$v = U \pm gt \ldots\ldots (1)$$

$$x = Ut \pm \tfrac{1}{2}gt^2 \ldots\ldots (2)$$

Tous les problêmes relatifs au mouvement uniformément varié se résolvent par ces deux équations, mais on peut, pour plus de facilité, en éliminant t, déduire de leur combinaison une relation immédiate entre les espaces parcourus et les vîtesses, relation donnée par l'équation suivante

$$x = \pm \frac{v^2 - U^2}{2g} \ldots\ldots (3)$$

703. Si on suppose de plus que la vîtesse initiale U est égale à zéro, les formules applicables au mouvement uniformément accéléré deviennent

$$v = gt\,;\quad x = \tfrac{1}{2}gt^2\,;\quad 2gx = v^2.$$

la vîtesse absolue, au bout du temps t, est proportionnelle à ce temps, l'espace parcouru est proportionnel au quarré du temps employé par le mobile à parcourir cet espace, ou au quarré de la vîtesse acquise pendant le même temps.

704. Dans cette dernière hypothèse, si le mobile, après avoir acquis la vîtesse gt, au bout d'un temps t pendant lequel il a parcouru l'espace $\frac{1}{2}gt^2$ continuait à se mouvoir, pendant un second intervalle de temps t, égal au premier, non d'un mouvement accéléré, mais d'un mouvement uniforme, en conservant la vîtesse gt, il parcourrait art. 668, en vertu de cette vîtesse, pendant ce second temps t, un espace égal à $gt \times t$ ou à gt^2 double de l'espace $\frac{1}{2}gt^2$ parcouru d'un mouvement accéléré pendant le premier temps t.

On tire, de cette propriété du mouvement uniformément varié, une conséquence remarquable relativement à la valeur de la caractéristique g; si le premier temps t est égal à l'unité, la vîtesse acquise, pendant ce temps, sera g et l'espace parcouru $\frac{1}{2}g$; d'où on déduit le théorême suivant : « la *force accélératrice*, dans le mouvement uniformément accéléré, qui, art. 698, est la valeur de la vîtesse gagnée par le mobile « pendant chaque unité de temps, est aussi celle du double de l'espace « parcouru pendant la première unité de temps, la vîtesse initiale, celle « qui a lieu lorsque l'on compte *zéro temps*, étant supposée nulle. »

705. Dans le cas du mouvement *uniformément retardé* dont les

vîtesse initiale U se trouve, par les diminutions graduelles qu'elle éprouve, entièrement épuisée, c'est-à-dire à l'instant où $v = 0$, ce qui arrive après un temps $\frac{U}{g}$, le mobile étant alors à la distance $\frac{U^2}{2g}$ de son point de départ, et déterminer les positions de ce mobile par ses distances au point où il a ainsi perdu toute sa vîtesse; en conséquence on fera, dans la 1ere. et la 3e. des équations ci-dessus rapportées, $t = \frac{U}{g} - \tau$, $x = \frac{U^2}{2g} - \xi$ et les relations entre ξ, τ et v seront exprimées par les équations

$$v = g\tau\,; \ \xi = \frac{v^2}{2g}\,; \text{ d'où } \xi = \tfrac{1}{2} g\tau^2.$$

dans l'hypothèse de $\tau = 1''$ on a $v = g$ et $\xi = \frac{1}{2} g$; d'où on conclut que la *force retardatrice* g est double de la distance à laquelle le mobile se trouve du point où sa vîtesse initiale est anéantie, lorsque le temps, qui lui est nécessaire pour arriver à ce point, est égal à l'unité.

J'observerai, avant d'aller plus loin, et à propos de la *force accélératrice* et de la *force retardatrice*, dont j'ai donné la définition et la valeur, que l'intelligence de la signification de ces deux dénominations, quoique le mot *force* y soit introduit, est cependant tout-à-fait indépendante de la considération de la cause motrice, et porte entièrement sur la considération des *effets* ou phénomènes, ce qui est une conséquence manifeste de tout ce que j'ai dit depuis l'art. 677.

706. Pendant la durée du mouvement qui suit l'instant où la vîtesse initiale s'est trouvée épuisée, la valeur de $v = U - gt$ devient négative, parcequ'on a $gt > U$, et cette valeur est continuellement croissante, en conservant le signe négatif. La valeur de $x = \frac{U^2 - v^2}{2g}$ conserve encore le signe positif, mais, de croissante qu'elle était, depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{U}{g}$, elle devient décroissante, tellement que le mobile se retrouve au point de départ lorsque le quarré v^2 est reredevenu égal à U^2, ou a repris la valeur qu'il avoit à l'instant où on comptait *zéro temps*. A partir de ce même instant, x devient négatif et ses valeurs négatives ont des accroissements sans limites. Je reviendrai sur ces divers phénomènes de mouvement lorsque je traiterai du mouvement des corps graves considéré avec les diverses circonstances

physiques, par lesquelles il est modifié dans le passage de ces corps au travers de l'atmosphère.

Application de la théorie du mouvement uniformément varié au mouvement vertical des corps graves dans le vide.

707. J'ai dit art. 667 que *Galilée* avait posé les premiers fondements de la *dynamique;* ses principales découvertes sur cette science, absolument ignorée avant lui, sont les lois du *mouvement composé,* dont je parlerai bientôt, et les lois du mouvement des corps graves près de la surface de la terre. Il a reconnu, sans le secours de l'observation et par la seule force de son génie, que ces dernières lois étoient celles du mouvement *uniformément varié,* exposées dans le chapitre précédent; et il a établi *à priori* la théorie de ce mouvement par la méthode synthétique des anciens. Les moyens de soumettre les phénomènes de la chute des graves à des expériences précises n'ont été imaginés qu'après lui.

708. Je vais parler des lois de ces phénomènes comme de vérités de fait, parfaitement constatées, lesquelles, d'une part, fourniront des quantités ou des nombres absolus qu'on a très-souvent occasion d'employer dans les formules et les calculs de dynamique, et d'une autre part serviront de confirmation aux principes reçus sur la mesure des forces.

Si on suppose qu'un point matériel libre et pesant est abandonné à la pesanteur, dans le vide, sans vîtesse initiale, il se mouvra dans une ligne verticale; prenant, à son point de départ, l'origine des espaces parcourus x, comptant *zéro temps* au moment de ce départ, et désignant par v la vîtesse acquise au bout du temps t, les relations entre les espaces parcourus, les vîtesses et les temps, seront celles

le nombre $9^m,81$ et on le fixera dans sa mémoire en observant que les parties de ce nombre qui se trouvent à gauche et à droite de la virgule sont, respectivement, les 2e. et 4e. puissances de 3.

709. La caractéristique ou force accélératrice $9^m,81$, constante au niveau de la mer sous le parallèle de l'observatoire de Paris, varie avec la latitude en la supposant toujours prise au niveau de la mer; elle a, depuis l'Équateur jusqu'au Pôle, des augmentations proportionnelles au carré de la latitude, et en désignant cette latitude par L on a en général,

L'unité de temps est une partie du jour moyen égal a $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{100000} \ldots g = 7{,}30058 + 0{,}03863 \sin.^2 L; \\ \frac{1}{86400} \ldots g = 9{,}77980 + 0{,}05174 \sin.^2 L; \end{array} \right.$

le terme constant du 2e. membre est la valeur de g sous l'Équateur; si on veut prendre pour type la valeur de g sous le parallèle moyen on employera les deux équations suivantes qui ont les premiers termes de leurs 2e. membres égaux à la valeur de g sous ce parallèle moyen.

L'unité de temps est une partie du jour moyen égale à $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{100000} \ldots g = 7{,}31989 - 0{,}01931 . \cos. 2L; \\ \frac{1}{86400} \ldots g = 9{,}80567 - 0{,}02587 \cos. 2L; \end{array} \right.$

toutes ces valeurs sont, ainsi que j'en ai prévenu, prises à la surface de la mer, mais à partir d'un point quelconque de cette surface la valeur de g varie encore à mesure qu'on s'élève; je donnerai, dans la suite du cours, la loi de cette variation en hauteur quand j'aurai expliqué la théorie sur laquelle sa loi est fondée.

710. Tous ce que j'ai dit depuis l'art. 707, convient particulièrement au cas du mouvement vertical de descente d'un corps grave; ce corps, pour se mouvoir verticalement de bas en haut, doit avoir, au point de départ, une vîtesse initiale qui diminue, ensuite, graduellement jusqu'à ce qu'elle soit éteinte; lorsque cette vîtesse initiale se trouve épuisée le corps est parvenu au point culminant de sa marche; à ce point il se trouve dans le cas d'un corps grave libre et abandonné sans vîtesse initiale à la tendance qu'il a à descendre et à laquelle il cède pour se mouvoir de haut en bas pendant un temps indéfini; toutes ces circonstances sont exprimées par les équations du mouvement *uniformément retardé* données art. 705, et contenant la caractéristique g laquelle conserve,

d'après la définition de ce mouvement, la même valeur tant dans la marche directe que dans la marche rétrograde du mobile.

Le raisonnement et l'expérience s'accordent pour prouver que les mêmes équations représentent les phénomènes des mouvements successifs d'ascension et de descente d'un grave lancé de bas en haut avec une vîtesse initiale. Je ne dois en ce moment, d'après la manière dont je suis convenu, art. 677, d'envisager le mouvement, donner cette proposition que comme l'énoncé d'une vérité de fait, cependant on s'assurera aisément que le mouvement vertical et ascensionnel des graves est *uniformément retardé* avec une *caractéristique* négative numériquement égale à celle du *mouvement uniformément accéléré* de leur chute, si on considère que la cause motrice qui, pendant chacun des éléments égaux de temps dt de la descente d'un mobile, ajoute à sa vîtesse acquise un élément de vîtesse constant dv, en agissant sur lui dans le sens de son mouvement, doit, lorsqu'elle agit dans un sens contraire à celui de ce mouvement, c'est-à-dire lorsque le corps monte, retrancher, pendant chaque instant dt de sa vîtesse actuelle, le même élément de vîtesse qu'elle y ajoute dans le cas de la descente.

Les équations de l'art. 705 sont donc applicables aux mouvements successifs de montée et de descente d'un grave lancé verticalement de bas en haut avec une vîtesse initiale, et la constante g doit, dans l'application dont je parle, avoir pour valeur numérique $9^m,81$ à la latitude de Paris et au niveau de la mer, les valeurs numériques, au même niveau et à différentes latitudes, devant se calculer d'après les formules de l'art. 709.

711. D'après le contenu de l'art. précédent et l'équation $x = \frac{U^2 - v^2}{2g}$

U est ce qu'on nomme la *vîtesse due à la hauteur X*, et réciproquement *X* s'appelle la *hauteur due à la vîtesse U*.

Comparaison d'un mouvement varié, d'une manière quelconque, avec le mouvement uniformément varié. De la quantité qui, dans un mouvement quelconque, a le nom de *force accélératrice*.

712. J'ai expliqué, art. 697, 698 et 699, tout ce qui était relatif à la quantité appelée *force accélératrice*, dans le mouvement uniformément varié; je vais, maintenant, déterminer une quantité analogue, dans le mouvement varié d'une manière quelconque, en le comparant avec le mouvement uniformément varié et en employant une marche de raisonnement semblable à celle par laquelle j'ai déduit, art. 691 et 692, la notion et la valeur de la *vîtesse*, dans le mouvement varié en général, de la comparaison de ce mouvement avec le mouvement uniforme.

La valeur instantanée de la *vîtesse* v, pour un mouvement quelconque, dans lequel $x=f(t)$ exprime la relation entre les espaces parcourus et les temps, est, art. 693, $v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$; j'appelle v' la valeur de v au bout du temps $t+\tau$, et faisant $v'-v=\upsilon$, j'observe que plus υ et τ seront petits, plus le rapport $\frac{\upsilon}{\tau}$ s'approchera d'être constant et égal à $\frac{dv}{dt}$, plus, parconséquent, la valeur de v' s'approchera d'être égale à $f'(t)+\phi\tau$, ϕ étant une quantité constante pendant le temps τ; (la quantité $\frac{dv}{dt}$ appartient à l'origine de υ et τ et doit être considérée comme une constante dans l'équation qui exprime la relation entre ces variables υ et τ); mais $v'=f'(t)+\phi\tau$ est, art. 701, l'équation d'un mouvement uniformément varié, dans lequel $f'(t)$ est la vîtesse initiale, celle qui a lieu lorsque $\tau=0$, et ϕ la *caractéristique* ou *force accélératrice*, art. 698 et 699, la vîtesse υ gagnée pendant le temps τ ayant, pour valeur, $\upsilon=\phi\tau$. On rattache donc, de cette manière, les phénomènes d'un mouvement varié en général, à ceux du mouvement uniformément varié, et l'identité devient rigoureuse en supposant τ infiniment petit; dans ce cas, chaque valeur $\frac{\tau}{n}$, répond à une valeur $\frac{\upsilon}{n}$ (n étant un nombre positif quelconque plus grand que l'unité) et l'équation $\upsilon=\phi\tau$, dans laquelle υ et τ deviennent respectivement dv et dt, donne ... $\phi=\frac{dv}{dt}=\frac{ddx}{dt^2}=f''(t)$

cette quantité remarquable ϕ, dont nous aurons à faire un usage continuel dans la Dynamique, doit porter le même nom que son analogue

dans le mouvement uniformément varié ; nous l'appellerons, en conséquence, *force accélératrice*. Je crois devoir répéter ici l'observation, déjà consignée à l'art. 705, que quoique l'usage ait introduit le mot *force* dans cette dénomination, cependant la considération de la cause motrice, peut être, relativement à l'objet que j'ai en vue dans ce chapitre et le précédent, séparée de la notion de la *force accélératrice* qui ne porte que sur les phénomènes de mouvement dont les lois sont censées données par le fait. Le signe ϕ représente ici un *effet* analogue à celui que j'ai désigné, art. 698, par le signe g, en traitant du mouvement uniformémnet varié ; cet effet est le changement de vîtesse du mobile, $= \frac{1''}{dt} \times dv$ (la seconde est prise pour unité de temps) qui aurait lieu si, pendant l'unité de temps, le rapport $\frac{dv}{dt}$, ou l'une des quantités équivalentes $\frac{ddx}{dt^2}$ et $f''(t)$, demeurait constante. La différence, entre le cas général actuel et le cas particulier du mouvement uniformément varié, consiste en ce que, dans celui-ci, l'*effet* est réellement produit, au lieu que, dans le cas général, il est simplement hypothétique.

713. Il résulte des rapprochements, précédemment faits, entre les mouvements *uniforme*, *uniformément varié* et un mouvement varié suivant une loi quelconque et formant un cas particulier de l'équation générale $x = f(t)$, que dans le développement de la valeur d'ε (voyez pour la notation l'art. 683).

$$\varepsilon = \tau f'(t) + \tfrac{1}{2}\tau^2 f''(t) + \tfrac{1}{2\cdot 3}\tau^3 f'''(t) + \text{etc.}$$

1°. Les coëfficients de τ et de $\frac{1}{2}\tau^2$ sont, respectivement, la vîtesse et la force accélératrice à l'origine de τ ou à la fin de t ; 2°. le mouvement, dont il s'agit ne diffère, pendant la durée de τ, d'un mouvement *uniformément varié*, dont le double du coëfficient de τ^2 est la *caractéristique* ou *force accélératrice*, que par les termes contenant les puissances de τ égale et supérieures à la troisième, et ne diffère d'un mouvement *uniforme*, dont le coëfficient de τ est la *caractéristique* ou la *vîtesse*, que par les puissances de τ égale et supérieures à la seconde.

Ces résultats, ramenés à des considérations géométriques, se trouveroient liés à la théorie des *osculations* de différents ordres.

Classement des effets *dynamiques* produits par une force sur un corps. Cas où la force, après la génération instantanée d'une vîtesse finie, cesse d'agir sur le mobile. Phénomènes qui ont lieu lorsque ce mobile est ainsi abandonné à lui même. De la *force d'inertie*.

714. Les notions et les principes établis dans les deux chapitres précédents, sur les différentes espèces de mouvement, sur les quantités *caractéristiques* qui entrent dans leurs équations, ou qui s'en déduisent, étaient indispensables pour l'intelligence de ce qui me reste à dire sur la comparaison et la mesure des forces, envisagées sous le point de vue qui intéresse la *Dynamique ;* je vais faire un premier usage de ces notions, pour rapporter à des idées nettes et classer les divers effets *dynamiques* d'une force sur un corps qui sera d'abord censé être un point matériel.

Ce mobile, mis en mouvement par la force, se meut, à un instant quelconque, avec une certaine vîtesse et dans une certaine direction; or, on peut imaginer qu'il a acquis cette vîtesse par l'action instantanée d'une cause motrice qui, après la lui avoir imprimée, a cessé d'agir sur lui, ou qu'il l'a acquise, par l'action prolongée et soumise à la loi de *continuité* d'une puissance de direction et d'intensité constantes ou variables.

Il résulte, de ces divers modes d'action, des états très-différents du corps à l'instant où il commence à être mis en mouvement ; dans le premier cas, il est dès ce premier instant, par hypothèse, animé d'une vîtesse finie, dans le second il a une simple *vîtesse naissante* qui ne devient une vîtesse finie qu'au bout d'un temps fini, après avoir acquis, en suivant la *loi de continuité*, toutes les valeurs intermédiaires entre zéro et sa valeur au bout de ce temps. Je vais d'abord m'occuper du premier cas, celui de la génération instantanée d'une vîtesse finie par une force qui, après l'avoir imprimée, cesse d'agir sur le mobile, et l'abandonne à lui-même.

Je commence par observer que cette génération subite et instantanée d'une vîtesse finie dans un corps n'existe pas, selon toute apparence, dans la nature, où la communication et les modifications du mouvement sont, en général, soumises à la loi de continuité ; quelques phénomènes, il est vrai, semblent contredire cette assertion, tels sont ceux

qui accompagnent les *chocs*, les *explosions de gaz*, etc., cependant en examinant les choses de près, on reconnait aisément que la *loi de continuité* n'est violée dans ces phénomènes qu'en apparence; on s'assure que les modifications successives et nuancées du mouvement existent réellement, mais qu'elles échappent à nos sens par leur rapidité. D'après ces observations, il faut considérer la durée infiniment petite de la génération d'une vîtesse finie comme une limite qui n'est jamais atteinte, et dont les durées effectives des phénomènes de ce genre s'approchent plus ou moins; je n'en résoudrai pas moins des questions importantes de dynamique dans l'hypothèse d'une pareille génération, et ce n'est pas la seule circonstance où, pour se préparer, avec avantage, à des applications physiques, il faut d'abord traiter des cas *extrêmes*, ou abstraits, qui ne sont jamais rigoureusement ceux de la nature.

715. Les questions à faire sur les phénomènes résultants de l'impulsion, ainsi donnée au mobile, portent sur la direction initiale, sur la ligne qu'il suivra dans l'espace, et sur la loi de son mouvement le long de cette ligne, c'est-à-dire sur la relation entre les longueurs qu'il parcourra et les temps qu'il employera à parcourir ces longueurs.

La réponse à la première question est, que la direction initiale du mobile sera celle suivant laquelle la cause motrice aura agi sur lui, proposition qu'on peut regarder comme évidente par elle-même; les deux autres questions, relatives à la ligne parcourue et à la loi du mouvement le long de cette ligne, se résoudront par le raisonnement déjà employé en plusieurs endroits de ce cours, et particulièrement à l'art. 43, par lequel on s'assurera que le corps doit suivre la ligne droite suivant laquelle sa direction initiale a lieu, et se mouvoir d'un mouvement uniforme; en effet, si on fait passer, par la ligne dont je viens

direction initiale, qui divise en deux parties égales les distances entre les points homologues des deux courbes.

Pareillement, si on dit que le mobile ne se mouvra pas uniformément sur la ligne, il faudra prouver que son mouvement sera, ou acceléré, ou retardé; mais, à un instant quelconque de ce mouvement, dont l'équation est $x=f(t)$, on n'a pas plus de raison pour poser $f'(t)=\frac{dx}{dt}$ que $f'(t)=-\frac{dx}{dt}$, donc la seule hypothèse recevable est celle de $f'(t)=0$, c'est-à-dire que le mouvement est uniforme.

716. Tous les raisonnements qui précèdent peuvent aussi être appliqués à un corps qui, après avoir acquis une vîtesse finie par des gradations nuancées, et soumises à la loi de continuité, est ensuite abandonné à lui même, les puissances qui l'ont mis en mouvement cessant d'agir sur lui; à l'instant où cette cessation d'action a lieu, il suit nécessairement une certaine direction qu'il conserve dans les instants suivants, en se mouvant uniformément le long de la droite qui a cette direction.

717. Les preuves des propositions énoncées dans les deux articles précédents tirent essentiellement leur force de cette loi de la nature, déjà citée à l'art. 6, par laquelle « un corps ne passe jamais de l'état « de repos à celui de mouvement, et réciproquement, sans que le chan« gement d'état ne soit la suite d'une action exercée sur ce corps par « un agent qui en est indépendant. »

Cette inaptitude d'un corps à changer de lui-même son état de repos ou de mouvement a été nommée *force d'inertie*. Je conserverai cette dénomination, quoique le mot *force* n'y soit pas placé avec plus de raison qu'il ne l'est dans la dénomination du rapport $\frac{dv}{dt}$, qu'on a appelé, art. 712, *force accélératrice*; je me bornerai à observer que l'existence de cette *force d'inertie* est constatée, tant par les observations des phénomènes de mouvement qui se passent à chaque instant autour de nous, que par les observations, dont les conclusions sont encore plus rigoureuses, des mouvements des corps célestes. Vainement voudrait-on conclure de l'action réciproque, constatée par ces observations, des molécules de matière les unes sur les autres, qu'il existe dans les corps un principe de mouvement incompatible avec la *force*

d'inertie; cette objection aurait toute la force dont elle est susceptible dans le cas, purement idéal, d'un point matériel agissant par attraction sur un autre point matériel, qui n'agirait pas sur lui, et vers lequel il devrait se mouvoir, comme je le ferai voir par la suite; et cependant, même dans ce cas idéal, la *force d'inertie* n'en subsisterait pas moins dans le point matériel attirant, puisque son mouvement n'est pas le résultat d'une action qu'il exerce sur lui-même, mais exige la présence d'un autre corps, hors de lui, sans lequel ce mouvement n'aurait pas lieu; pour rendre les propositions relatives à la *force d'inertie*, absolument indépendantes de la considération des forces de la nature qui, très-probablement, tiennent toutes les parties de la matière dans un mouvement perpétuel, il faut appliquer ces propositions à un point matériel dans l'hypothèse où il n'y aurait pas, dans l'espace, d'autre matière que la sienne.

Diverses manières d'agir des forces dont l'action est soumise à la loi de continuité, eu égard au mouvement actuel des corps qui éprouvent cette action. Principes sur la comparaison de ces forces entr'elles. Définition de la *force motrice*.

718. Les forces dont l'action est soumise à la *loi de continuité* sont, très-probablement, ainsi que je l'ai observé dans le chapitre précédent, les seules qui existent dant la nature quoique, eu égard à l'imperfection de nos organes, les phénomènes sensibles paraissent souvent contredire cette assertion; et il faut d'abord poser, sur leur comparaison et leur mesure, des principes qui pourront ensuite s'appliquer aux cas hypothétiques des changements brusques dans l'état dynamique des corps.

[redacted]

doit surpasser la sienne d'une quantité pareillement déterminée, et que sans cet excès de vîtesse le corps échapperait entièrement à l'action de la main.

La même remarque a lieu pour l'impulsion donnée par un ressort, par un fluide etc. le point matériel, mis en mouvement, éprouve d'autant moins l'action du corps moteur que sa vîtesse approche davantage de celle du point de ce corps moteur avec lequel il est en contact; les valeurs de l'une et l'autre de ces deux vîtesses, à un instant quelconque, ont donc, sur la variation de la vîtesse du mobile, au même instant, une influence qui doit entrer en considération dans le calcul de son mouvement.

719. Il n'en est pas de même de certaines forces de la nature, dont la plus généralement connue, par ses effets, est la pesanteur; leur action est indépendante de la vîtesse actuelle du mobile dans le sens de cette action. Ainsi un grave étant, à partir de l'état de repos, abandonné à la pesanteur, il en recevra un certain élément de vîtesse, ou une vîtesse naissante dv, au bout du premier instant dt, égal à l'incrément que la pesanteur aurait ajouté à une vîtesse finie quelconque dont il aurait pu être doué, dans le sens vertical, au commencement de ce même instant.

La pesanteur ou l'atraction universelle ne possède pas exclusivement cette propriété; d'autres forces de la nature telles que les attractions magnétiques, les attractions et répulsions électriques, en jouissent dans l'étendue de leur sphère d'activité; elle paraît s'étendre à toutes les forces dont le mode matériel d'action sur les corps échappe à nos sens; les calculs faits dans l'hypothèse de son existence sont généralement confirmés par l'observation.

On peut donner une explication de la propriété dont je viens de parler en disant que la propagation des actions des forces, auxquelles elle appartient, a lieu avec une vîtesse ou infinie, ou si grande qu'on peut la regarder comme infinie, (*) de manière que les corps en mouve-

(*) Il parait, en effet, que les actions de la pesanteur, et des autres forces de même nature, ne sont pas *rigoureusement* indépendantes des vitesses des corps soumis à ces actions; voici comment s'explique, à cet égard, l'illustre auteur de *L'Exposition du système du monde* et de la *Mécanique céleste :* « Nous n'avons aucun moyen pour mesurer la durée de la propagation de la « pesanteur; parceque, l'attraction du soleil ayant une fois atteint les planètes,

ment, dans le sens de ces actions, en reçoivent des impulsions aussi énergiques que s'ils étaient en repos. On ramène à ce cas les actions des forces qui y échappent en introduisant dans les expressions analytiques de leurs impulsions, ou pouvoirs moteurs, les *vîtesses relatives* comme on le verra dans la suite du cours.

720. Ayant ainsi réduit les diverses espèces de forces à un mode commun d'action, il s'agit de voir comment on peut, par des considérations déduites des phénomènes du mouvement, comparer leurs intensités. Un moyen simple d'arriver, sur cet objet, aux résultats généralement adoptés, est de supposer que plusieurs forces impriment, pendant un même instant dt, 1°. différentes vîtesses élémentaires à une même masse ou point matériel, 2°. la même vîtesse élémentaire à différentes masses ou points matériels. Après avoir examiné ces deux cas dans l'hypothèse des générations des vîtesses élémentaires pendant un même instant dt, je rendrai les résultats indépendants de cette hypothèse, et je les appliquerai ensuite à des productions instantanées de vîtesses finies. Or, dans le premier cas, les rapports entre les forces, qui agissent sur une

---

« cet astre continue d'agir sur elles comme si la force attractive se communiquait, dans un instant, aux extrémités du système planétaire, on ne peut « donc pas savoir en combien de temps elle se transmet à la terre ; de même « qu'il eût été impossible, sans les éclipses des satellites de Jupiter, et sans « l'aberration, de reconnaître le mouvement successif de la lumière. Il n'en « est pas ainsi de la petite différence qui peut exister dans l'action de la pesanteur sur les corps, suivant la direction et la grandeur de leur vîtesse. Le « calcul m'a fait voir qu'il en résulte une accélération dans les moyens mouvements des planètes autour du soleil et des satellites autour de leurs planètes.

même masse, ne peuvent être assignés qu'au moyen des effets produits sur cette masse, et ces effets se réduisent absolument aux vîtesses élémentaires engendrées; il est donc bien naturel de regarder les forces comme proportionnelles à ces éléments de vîtesses, et il serait peut-être impossible, *à priori*, de donner des raisons pour prouver qu'elles sont dans une proportion plus grande, qui ne s'appliquassent également à prouver qu'elles sont dans une proportion plus petite; mais à cette considération, qui est du plus grand poids, se joint l'accord de tous les phénomènes avec le principe qui rend la force proportionnelle à la vîtesse, la masse étant constante; ce principe est donc une loi de la nature; je ferai voir dans la suite du cours comme elle se trouve pleinement confirmée par les phénomènes du mouvement des graves.

Dans le second cas, celui d'une même vîtesse élémentaire imprimée par diférentes forces à différentes masses, on a encore la réunion et de la simplicité du principe et de son accord avec tous les phénomènes, pour affirmer que les forces dont il s'agit sont entr'elles comme les masses auxquelles elles impriment une vîtesse élémentaire commune. Les phénomènes du mouvement des graves nous offrent, pareillement, une preuve, aussi concluante que remarquable, de cette seconde loi et qui est, même, plus immédiate que celle de la première, quoiqu'au fond l'une et l'autre soient également bien confirmées par des observations qui ne laissent rien à desirer et dont je parlerai, successivement, à mesure que les élèves connaîtront les théories propres à les leur faire bien concevoir et apprécier.

721. Puisque, d'après la première des deux lois posées dans l'article précédent, la *puissance* est proportionnelle à l'élément de vîtesse, lorsque la masse est constante, et à la masse, pour un même incrément de vîtesse, cette puissance est en général proportionnelle au produit de la masse pour l'élément de la vîtesse. J'ai rapporté les actions des diverses puissances à une même durée infiniment petite dt; pour arriver à des résultats indépendants de cette hypothèse, considérons d'abord les rapports des puissances qui impriment aux mobiles des mouvements uniformément variés. Dans un de ces mouvements pris en particulier, la masse du mobile étant constante, l'intensité de la puissance motrice est aussi constante d'après la 1e. loi de l'article précédent, puisque, art. 697, dans tout le cours du mouvement, à une même durée dont

la valeur est arbitraire et peut être ou finie ou infiniment petite, correspond une même variation de la vîtesse ; si une autre masse égale à celle dont je viens de parler se meut aussi d'un mouvement uniformément varié mais différent du précédent, les puissances motrices, dans ces deux mouvements, seront entr'elles, d'après la même première loi, comme les éléments différentiels de vîtesses qu'elles engendrent pendant un même élément de temps dt, mais, d'après la propriété fondamentale du mouvement uniformément varié, art. 698, les rapports de ces éléments de vîtesses sont ceux des incréments finis de vîtesses engendrés pendant l'unité de temps, c'est-à-dire ceux des *caractéristiques* ou *forces accélératrices* respectives des deux mouvements ; or dv étant, dans le premier mouvement, l'élément de vîtesse engendré pendant l'élément de temps dt, et dv' l'élément de vîtesse engendré pendant l'instant dt' dans le second mouvement, les *forces accélératrices* respectives ont article 699 pour valeur $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{dv'}{dt'}$, le rapport de dt à dt' étant quelconque ; ainsi lorsque différents mouvements uniformément variés sont imprimés à des masses égales, une des puissances, qui engendre un de ces mouvements, est, en général, dans ses relations avec les autres, représentée par $\frac{dv}{dt}$, ou par g, l'équation du mouvement dû à cette puissance étant $x = E + Ut + \frac{1}{2} gt^2$ (voyez l'art. 700 pour la notation).

Supposant ensuite que les mobiles ainsi soumis à des puissances constantes ont des masses différentes, une des puissances serait d'après la 2e. loi de l'article précédent proportionnelle à la masse sur laquelle elle agit, et que je désigne par m, si les quantités g étaient égales

bout d'un temps quelconque t, quelle que soit la loi du mouvement d'une masse m, la puissance est proportionnelle au produit de cette masse m par la force accélératrice $\frac{dv}{dt}$, ou à $\frac{dv}{dt}m$.

723. On a donné, à cette expression remarquable $\frac{dv}{dt}m$ qui représente l'intensité momentanée de la puissance, le nom de *force motrice*; je suis parvenu à sa détermination générale par une marche de raisonnement semblable à celle que j'ai suivie, art. 712 et suivants, pour déduire de la notion de la *force accélératrice*, dans le mouvement uniformément varié, celle de la quantité qui lui correspond dans un mouvement quelconque, en profitant ainsi de la clarté que répand, sur les raisonnements et les démonstrations, le passage du mouvement uniforme au mouvement uniformément varié, et de celui-ci au mouvement varié en général, par des considérations de phénomènes et de quantités analogues dans ces divers mouvements; mais on arrive, ordinairement, à la notion de la *force motrice*, par un raisonnement beaucoup plus court, en disant que, pour une masse constante, la puissance doit être en raison directe de l'élément de vîtesse engendré, et en raison inverse de la durée de cette génération, ce qui la rend immédiatement proportionnelle à $\frac{dv}{dt}$; et comme son intensité doit être, toutes choses égales d'ailleurs, d'autant plus grande que la masse mise en mouvement est plus considérable, cette puissance est, généralement, représentée par le produit $\frac{dv}{dt}m$.

724. Il est manifeste que $\frac{dv}{dt}$ ou $\frac{1''}{dt}dv$ est la valeur d'une vîtesse finie, celle qui serait engendrée pendant l'unité de temps, si à l'instant où dv a lieu le mouvement était modifié de manière que dans le développement de la valeur de x, donnée par l'équation $x=f(t)$, les termes du 3e. ordre et des ordres supérieurs disparussent. La force motrice est donc le produit de la masse par une vîtesse finie.

Introduction, dans la mesure des forces, en dynamique, des mêmes quantités *absolues* qui ont servi à la mesure des forces en statique. Équations fondamentales du mouvement varié avec les principales formules qui s'en déduisent.

725. Le résultat de ce qui a été dit, dans la première partie du cours,

sur la comparaison des intensités des forces et l'expression de ces intensités en nombres absolus peut être ramené à l'énoncé suivant : « si « une force quelconque est supposée agir verticalement de bas en haut « sur un corps grave, d'une matière homogène celle qui est choisie pour « fournir une base aux mesures de poids, et que le corps, qu'on suppose « n'avoir encore pris aucun mouvement, perde, par cette action, toute « tendance à descendre de manière à céder au plus petit excédant d'effort « qui tendrait à le faire monter, le nombre d'unités cubiques rapportées « à une mesure déterminée de longueur, contenues dans le volume du « corps, est l'expression numérique, en unités de poids, de l'intensité « de la force. » Voyez les art. 16 et suivants.

Ce mode de comparaison et de mesure des forces détermine parfaitement la nature, le mode d'action et l'espèce de celles dont la composition, la décomposition et l'équilibre ont été les objets des théories exposées dans la première partie du cours ; mais les principes posés, depuis le commencement de cette seconde partie, ajoutent quelque chose aux connaissances de détail qui les concernent. Si on a plusieurs masses m', m'', m''', etc. de la matière dont il est question dans la règle précédente, et que les *poids* de ces masses soient les mesures respectives d'autant de forces F', F'', F''', etc. Il est évident que les tendances à descendre de m', m'', m''', etc. sont uniquement dues à la vîtesse élémentaire gdt que leur imprime la pesanteur, et les rapports entre les efforts exercés par ces corps contre les puissances qui annulent leurs tendances à descendre, ou entre les nombres d'unités de poids qui représentent les valeurs numériques de ces puissances, sont aussi, art. 722, ceux des forces motrices imprimées à m', m'', m''', en vertu

[redacted]

la force motrice qui a lieu en vertu de l'action d'une puissance quelconque sur une masse m, à l'instant où cette puissance engendre, dans cette masse, un élément de vîtesse dv, on a, art. 722, $\mu = \frac{dv}{dt} m$. si p est le poids d'un grave de même masse que m, on aura, d'après ce qui précède, $p = gm$ ou $m = \frac{p}{g}$, d'où $\mu = \frac{p}{g} \cdot \frac{dv}{dt}$. l'évaluation de μ se trouve, par là, rapportée à celle d'une quantité p, qui se détermine par des moyens et des instruments connus, et à une longueur $g = 9^{m},81$ à la latitude de Paris. $\frac{dv}{dt}$ dépend de la loi du mouvement, c'est la *fonction seconde* de la valeur de x dans l'équation $x = f(t)$ qui exprime cette loi.

727. Voici un tableau des équations fondamentales du mouvement varié et des formules principales qui s'en déduisent;

Le temps = ... t;
La distance à laquelle le mobile se trouve, au bout du temps t, d'un point fixe pris sur la ligne droite de son mouvement = ... x;
Sa vîtesse au bout du temps t = ... v;
La force accélératrice au bout du temps t = ... ϕ;
La force accélératrice due à la pesanteur = ... $g = 9^{m},809$;
La masse du mobile = ... m;
Le poids d'un grave de même masse que lui = ... p;
La force motrice au bout du temps t = ... μ.

J'ai démontré les équations fondamentales

$$(1) \ldots v = \frac{dx}{dt}; \quad (2) \ldots \phi = \frac{dv}{dt}; \quad (3) \ldots \mu = \frac{m\,dv}{dt}$$

ainsi que l'équation

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots \mu = \frac{p}{g} \cdot \frac{dv}{dt}$$

Combinant (1) avec (2) et (2) avec (3) et (4) on a

$$(5) \ldots v\,dv = \phi\,dx; \quad (6) \ldots \mu = m\phi; \quad (7) \ldots \mu = \frac{p}{g}\,\phi.$$

on déduit de (1), $dv = \frac{ddx}{dt}$; cette valeur de dv, substituée dans (2) (3) et (4), donne

$$(8) \ldots \phi = \frac{ddx}{dt^2}\,;\; (9) \ldots \mu = \frac{ddx}{dt^2}\,m\,;\; (10) \ldots \mu = \frac{p}{g} \cdot \frac{ddx}{dt^2}.$$

L'intégrale de (5), dans l'hypothèse des valeurs simultanées $v = W$ et $\int \phi dx = 0$, donne

$$(11) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad v^2 = W^2 + 2\int \phi dx\,;$$

et en substituant pour ϕ sa valeur $\frac{g}{p}\,\mu$

$$(12) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad v^2 = W^2 + \frac{2g}{p}\int \mu\, dx.$$

Lois du mouvement rectiligne et vertical d'un point matériel pesant, en ayant égard aux variations que subit la pesanteur à différentes distances du centre de la terre. (*)

728. J'ai donné, art. 707 et suivants, les équations du mouvement des graves, près de la surface de la terre, qui renferment, avec les lois de ce mouvement découvertes par Galilée, les termes dûs à la variation de la pesanteur à différentes latitudes. Ces équations satisfont aux phénomènes, avec toute l'exactitude désirable, à des hauteurs au-dessus du niveau de la mer, ou à des profondeurs au-dessous de ce niveau, très-petites par rapport aux dimensions de la terre ; mais cette exactitude, suffisante dans une infinité de cas, n'est pas rigoureuse, la force accélératrice, au lieu d'être constante, comme je l'ai supposé, dans une même verticale, change aux différents points de cette verticale, et ce changement est déjà sensible au sommet des montagnes élevées. La loi à laquelle il est soumis n'est pas la même au-dessus et au-dessous de [redacted]

distances simples, dans l'intérieur de la terre. Cependant les formules différentes qui se rapportent à l'une et à l'autre loi, s'accordent pour donner les mêmes valeurs approchées, ainsi que je le ferai bientôt voir, lorsqu'on y introduit, pour condition, que le mobile est à une petite distance de la surface de la mer, d'où il suit que sa force motrice n'éprouve que des changements insensibles dans une verticale qui traverse cette surface, la condition dont je viens de parler étant supposée remplie, mais ces changements, quoiqu'insensibles, n'en sont pas moins réels.

Les équations données, depuis l'art. 707 jusqu'à l'art. 711 ne sont donc, au fond, que des équations empiriques; nous pouvons maintenant leur en substituer d'autres fondées sur les véritables lois des forces de la nature, lois dont la théorie est aussi curieuse par elle-même qu'importante par ses conséquences. Les résultats de l'analyse suivante, établie d'après ces lois, seraient encore susceptibles de quelques modifications, si on avait égard à la figure sphéroïdique de la terre; mais cette considération est tout-à-fait inutile pour les applications que j'ai à faire de ces résultats dans la suite du cours; elle intéresse particulièrement et exclusivement l'Astronomie physique.

729. Je suppose d'abord que le mobile part d'un point donné d'une verticale élevée au-dessus de la surface de la mer, à l'instant où on compte *zéro temps*; qu'à cet instant sa vîtesse est nulle, et qu'abandonné à la pesanteur il va se mouvoir de haut en bas le long de cette verticale. Je désigne par a sa distance initiale au centre de la terre, par x la hauteur dont il est descendu au bout du temps t, par ϕ et v, respectivement la force accélératrice et la vîtesse au bout du même temps, par g la force accélératrice à la surface de la mer dans la ligne verticale du mouvement, et par r le rayon de la terre $= 6366198^{\text{m}}$. La masse du mobile est supposée égale à l'unité.

On a, d'après la loi de la variation de la force accélératrice énoncée dans l'article précédent, l'égalité de rapport

$$(1) \ldots\ldots\ldots \frac{\phi}{g} = \frac{r^2}{(a-x)^2}.$$

Substituant pour ϕ sa valeur $\frac{dv}{dt}$ (art. 712), multipliant, après

la substitution, le premier membre par v et le second par la valeur $\frac{dx}{dt}$ de v, on a

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots vdv = gr^2 . \frac{dx}{(a-x)^2} :$$

cette équation a pour intégrale $v^2 = \frac{2gr^2}{a-x} + C$, et comme on a, par hypothèse, les valeurs simultanées $v = 0$ et $x = 0$, l'intégrale devient

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots v^2 = \frac{2gr^2 x}{a(a-x)} ;$$

d'où on déduit $(4) \ldots\ldots x = \frac{a^2 v^2}{av^2 + 2gr^2}$.

730. Telle est la relation entre les vîtesses successives et les espaces parcourus correspondants; et pour comparer ce résultat avec celui qu'on aurait en supposant, comme je l'ait fait art. 707 et suivants, la force accélératrice constante, on peut d'abord en tirer la valeur de la vîtesse au point où le mobile arrive au niveau de la mer; à ce point on a $a - x = r$, et cette condition, introduite dans l'équation (3) de l'art. précédent, la réduit à

$$v^2 = \frac{r}{a} \cdot 2gx .$$

l'équation de l'art. 708 donne simplement $v^2 = 2gx$, ainsi, dans le cas de la nature, la vîtesse acquise est plus petite que dans le cas hypothétique auquel se rapporte l'équation de l'art. cité, vu que $\frac{r}{a} < 1$. cette

[redacted]

multipliant le 2e. membre, haut et bas, par $(a-x)^{\frac{1}{2}}$, ajoutant et retranchant ensuite $\frac{\frac{1}{2}a\,dx}{\{x(a-x)\}^{\frac{1}{2}}}$ de ce second membre, (1) devient

$$(2) \ldots\ldots \left(\frac{2g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} r\,dt = \frac{(\frac{1}{2}a-x)\,dx}{\{x(a-x)\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{2}a\,dx}{\{x(a-x)\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Si sur la verticale a, comme diamètre, on construit un demi cercle, dont x soit une abscisse à compter de l'extrémité supérieure, s l'arc correspondant, compté de la même origine, et y l'ordonnée, les valeurs de dy et ds seront, respectivement le 1er. et le 2e. terme du 2e. membre de l'équation ci-dessus; d'où on déduit, en observant, relativement à la détermination de la constante, qu'on a les valeurs simultanées $x=0$, $y=0$ et $s=0$, l'une ou l'autre des deux intégrales

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \left(\frac{2g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} rt = y + s;$$

$$(4) \ldots\ldots \left(\frac{2g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} rt = \{x(a-x)\}^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}a.\text{arc}\left(\cos. = \frac{\frac{1}{2}a - x}{\frac{1}{2}a}\right).$$

En substituant, dans cette équation, la valeur de x donnée par (4), art. 729, on aura la valeur du temps en fonction de la vîtesse; mais cette vîtesse ainsi que l'espace parcouru ne peuvent s'exprimer, en fonction du temps, que par les séries.

732. Si la loi de l'accélération sur laquelle toute l'analyse précédente est établie se conservait la même sur la longueur entière de a, c'est-à-dire depuis le point de départ du mobile jusqu'au centre de la terre, le temps employé, par ce mobile, pour parcourir la ligne a serait (équation (4) de l'art. précédent) égal à $\frac{1}{2}\pi . \frac{a^{\frac{3}{2}}}{r\sqrt{2g}}$, expression dont nous retrouverons l'analogue dans la théorie du mouvement elliptique des planètes; la valeur de la force accélératrice et celle de la différentielle du quarré de la vîtesse prendraient les formes respectives $\frac{A}{0^2}$ et $\frac{Bdt}{0^2}$; la vîtesse serait elle-même, infinie, et, deplus, aurait, ainsi que le temps, des valeurs imaginaires pour tous les points de la ligne du mouvement qui se trouveraient au-delà du centre de la terre par rapport au point de départ.

Ces espèces de paradoxes s'expliqueront lorsque j'aurai exposé les lois du mouvement d'un point matériel sollicité par une force qui, émanant d'un centre fixe, agit en raison inverse des carrés des distances. Si ce corps a reçu une impulsion suivant une direction qui ne passe pas par le centre fixe, il décrira, dans le plan qui renferme cette direction et ce centre, une section conique, dont le *centre d'action* sera un des foyers, lequel foyer se trouvera d'autant plus rapproché du sommet de la courbe décrite que l'impulsion aura été plus foible ; dans le cas où elle serait nulle, le foyer et le sommet de la courbe se confondraient, la *trajectoire* serait une ligne droite.

Mais l'hypothèse, que je viens de faire par la conservation de la loi du mouvement dans l'étendue entière de a, se rapporte à un cas purement idéal ; dans le cas de la nature, le point matériel, placé hors de la masse de la terre, doit, avant d'arriver à son centre, parcourir la moitié de son rayon, et dès qu'il a commencé à pénétrer dans son intérieur, la loi de l'accélération change, ainsi que je l'ai annoncé art. 728, et devient telle que la force accélératrice ne peut jamais être infinie.

Voici l'analyse par laquelle on détermine tous les phénomènes du mouvement entre la surface de la mer et le centre de la terre.

733. L'origine des espaces parcourus, désignés par x, étant prise au niveau de la mer, c'est-à-dire à la distance r du centre de la terre, et à un point où la force accélératrice $=g$, le mobile est supposé commencer à se mouvoir sans vîtesse initiale et partir de cette origine, lorsqu'on compte *zéro temps ;* abandonné ainsi à la pesanteur, et, se mouvant dans l'intérieur de la terre, la force accélératrice est, art. 728, à chaque instant, proportionnelle à la distance à laquelle il se trouve du centre de la terre, c'est-à-dire à $r-x$, on a donc

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ v^2 = \frac{g}{r}.x\,(2r-x);$$

d'où on déduit

$$(3) \ldots\ldots\ x = r \pm \sqrt{\frac{r\,(gr-v^2)}{g}}.$$

Si sur le diamètre $2r$ de la terre, comme grand axe, on construit une ellipse dont le demi petit axe soit $\sqrt{gr}$, l'ordonnée à cette ellipse, correspondante à l'espace parcouru x, sera la vîtesse v du mobile. Cette vîtesse, supposée nulle au point de départ, ou à une des extrémités du diamètre terrestre, se trouvera encore nulle à l'autre extrémité du même diamètre, le mobile étant censé avoir traversé le globe terrestre. Le maximum de la vîtesse aura lieu au centre de la terre où sa valeur $\sqrt{gr}$ sera à la valeur $\sqrt{2gr}$ qu'elle aurait eu, si la force accélératrice g, qui a lieu à la surfaçe de la mer, se fut maintenue constante dans l'intérieur de la terre, comme $1 : \sqrt{2}$.

734. Je substitue, dans l'équation (2) de l'art. précédent, pour v sa valeur $\frac{dx}{dt}$ et cette équation devient

$$(1) \ldots\ldots\ (gr)^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{rdx}{\sqrt{x\,(2r-x)}}.$$

Si, sur le demi cercle circonscrit à la demi ellipse dont j'ai donné la construction dans l'article précédent, on prend un arc s qui ait la même origine que l'espace parcouru x, et dont l'abcisse soit ce même espace x, le second membre de l'équation précédente sera la valeur de ds, d'où on conclut, en observant que t et s sont nuls ensemble, l'une ou l'autre des valeurs

$$(2) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} t\sqrt{gr} = s; \\ t\sqrt{gr} = r\,\text{arc.}\left\{ \cos. = \dfrac{r-x}{r} \right\}; \end{array} \right.$$

et réciproquement

$$(3) \ldots\ldots\ x = r\left\{1 - \cos.\left(t\sqrt{\frac{g}{r}}\right)\right\};$$

égalant cette valeur à celle que fournit l'équation (3) de l'art. précédent, on obtient les deux équations

$$(4)\ \ldots\ldots\ v=(gr)^{\frac{1}{2}}\sin.\left(t\sqrt{\frac{g}{r}}\right);$$

$$(5)\ \ldots\ldots\ t=\left(\frac{r}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\text{arc.}\left\{\sin.=\left(\frac{v}{(gr)^{\frac{1}{2}}}\right)\right\};$$

et tous les phénomènes du mouvement se trouvent complétement déterminés par les équations de cet article et du précédent.

735. Le mobile, qui est censé pouvoir parcourir le diamètre entier de la terre, a, d'une extrémité à l'autre de ce diamètre, un mouvement oscillatoire, qui est exprimé très-clairement par l'équation (3) de l'art. précédent; en effet, si dans cette équation on attribue à t les valeurs successives 0, $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, $\frac{2}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, $\frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, $\frac{4}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, etc. ($\pi$ étant la demi circonférence qui a l'unité pour rayon) les valeurs correspondantes de x seront, respectivement, 0, r, $2r$, r, etc. et se reproduiront continuellement dans ce même ordre, si les valeurs successives de t, à compter de $t=0$, croissent par intervalles égaux à $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$; le mobile, après avoir parcouru le diamètre de la terre, reviendra donc à son point de départ, retournera ensuite à l'autre extrémité du diamètre, etc. par des oscillations qui ne peuvent cesser qu'en vertu de causes étrangères à la loi du mouvement. Chaque allée et retour, a une durée égale à $2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, et voilà un premier exemple des symboles de mouvements uniformes dont j'ai parlé à l'art. 690; le [redacted]

de la mer et éliminant x de l'équation (1) de l'art. 729 au moyen de l'équation $r+\xi+x=a$, la valeur de ϕ, donnée dans le même article, devient $\phi=\frac{gr^2}{(r+\xi)^2}$; on voit par cette équation et par l'équation (1) de l'art. 733 $\phi=\frac{g}{r}(r-x)$ que, dans une même verticale et à partir de la surface de la mer, la force accélératrice, due à la pesanteur, va en diminuant à mesure qu'on s'éloigne du point de départ, tant au-dessus qu'au-dessous de cette surface. Ainsi un mobile tombant d'un certain point supérieur à la mer aura une force accélératrice toujours croissante jusqu'au moment ou il sera arrivé au niveau de la mer; à ce moment si on suppose qu'il peut continuer son mouvement vertical dans l'intérieur de la terre, la force accélératrice de croissante qu'elle était deviendra décroissante, et la loi de continuité sera, sous un certain point de vue, violée dans ce changement. En effet l'équation $\phi=\frac{gr^2}{(r+\xi)^2}$ donne en général $\frac{d\xi}{d\phi}=-\frac{(r+\xi)^3}{2gr^2}$, valeur qui, à la surface de la mer, c'est-à-dire dans l'hypothèse de $\xi=0$, devient $\frac{d\xi}{d\phi}=\frac{-r}{2g}$; dans l'équation $\phi=\frac{g}{r}(r-x)$, on a, pour toutes les valeurs de x, $\frac{dx}{d\phi}=-\frac{r}{g}$; ainsi la *fonction prime* de la valeur de x en ϕ est subitement doublée au point où l'on passe de l'extérieur à l'intérieur du globe terrestre.

737. L'expression $\frac{gr^2}{(r+\xi)^2}$ étant développée, et ξ n'étant pas censé excéder les plus grandes hauteurs auxquelles l'homme peut s'élever, on pourra négliger les termes du développement qui contiènent les 2e. 3e. etc. puissances de ξ; et cette expression deviendra $\left(1-\frac{2\xi}{r}\right)g$. La quantité $1-\frac{2\xi}{r}$ est le facteur par lequel il faut multiplier les diverses valeurs de g que j'ai données art. 709, lorsqu'on veut avoir égard à la variation de la pesanteur dans le sens vertical à une hauteur ξ au-dessus du niveau de la mer. S'il s'agit des variations de la pesanteur à des profondeurs x au-dessous de ce niveau le facteur sera $1-\frac{x}{r}$, et

on observera que ce dernier facteur est rigoureusement applicable à une profondeur quelquonque, au lieu que le premier ne convient qu'à des hauteurs très-petites par rapport au rayon de la terre. Ces facteurs seront employés utilement dans l'exposition de la théorie du nivellement barométrique.

738. Si on veut examiner comment les équations du mouvement des graves données depuis l'art. 729 jusqu'à l'art. 734 s'accordent avec celles dans lesquelles on suppose la force accélératrice constante, il faut, dans les premières, introduire, pour condition, que l'espace parcouru x est assez petit pour qu'on puisse négliger les termes multipliés par sa 2e. puissance. On aura ainsi pour le mouvement au-dessus de la mer,

$$(1) \ldots v = \frac{r}{a}\sqrt{2gx}\,; \quad (2) \ldots t = \frac{a}{r}\sqrt{\frac{2x}{g}}\,;$$

et pour le mouvement dans l'intérieur de la terre

$$(3) \ldots v = \sqrt{2gx}\,; \quad (4) \ldots t = \sqrt{\frac{2x}{g}}\,;$$

pour ce second cas, la seule condition de la petitesse de x fait coincider les équations (2) de l'art. 733 et de l'art. 734 avec celles de l'art. 708.

Pour le premier cas les relations entre x, v et t dépendent de la distance a, ou de la position initiale du mobile; mais si on veut étendre l'usage des équations, qui se rapportent à ce premier cas, au mouvement de descente dans l'intérieur de la terre, à partir du niveau de la mer, elles deviendront identiques avec les équations du 2e. cas, parce qu'alors on aura la distance initiale au centre de la terre $= a = r$.

Lois du mouvement vertical d'un point matériel pesant, en ayant égard à la

[redacted]

en ce que son sens d'action est déterminé par le sens du mouvement du mobile auquel elle est toujours directement opposée ; de plus, elle n'a d'effet qu'autant que ce mobile a une vîtesse finie dont elle lui enlève, à chaque instant, une portion infiniment petite.

On a conclu, et d'un grand nombre d'expériences et du raisonnement (je reviendrai sur cette matière quand je traiterai de la résistance des fluides) que, les cas extrêmes des très-petites et des très-grandes vîtesses exceptés, si le mouvement a lieu dans un liquide ou dans un gaz aëriforme, de même densité par toute sa masse, l'élément de vîtesse détruit à chaque instant, par la résistance du milieu (dt supposé constant) est sensiblement proportionnel au quarré de la vîtesse du mobile, au même instant ; ainsi le mobile pesant, se mouvant dans une verticale, la variation instantanée de sa vîtesse, est due, 1°. à la pesanteur qui change cette vîtesse v en $v \pm gdt$; 2°. à la résistance du milieu par laquelle cette dernière valeur devient $v \pm gdt - kv^2dt$, en désignant par k une constante à déterminer par l'expérience ; ensorte qu'on a $dv = \pm gdt - kv^2 dt$; et la force motrice a pour valeur $\pm g - kv^2$, la masse étant $= 1$. Les signes supérieur et inférieur de gdt, sont respectivement applicables aux mouvements verticaux de descente et d'ascension.

740. Je vais d'abord traiter le cas du mouvement d'ascension, et pour rendre les expressions homogènes et la suite de l'analyse plus facile, je substituerai à la constante k une autre constante a^2 en faisant $k = \frac{g}{a^2}$, et j'aurai

$$(1) \ldots\ldots \frac{dv}{dt} = -g\left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right)$$

on tire immédiatement de cette équation

$$\frac{g}{a} \cdot dt = -\frac{\frac{dv}{a}}{1 + \frac{v^2}{a^2}}$$

Le 2e. membre est la différentielle d'un arc qui a pour tangente trigonométrique $\frac{v}{a}$, ce qui donne

$$\frac{g}{a} t = C - \text{arc.} \left\{ \text{tang.} = \frac{v}{a} \right\}$$

Le mouvement vertical d'ascension ne peut avoir lieu sans une vîtesse initiale; soit U cette vîtesse, dont on suppose que le mobile étoit animé à l'instant où on comptait *zéro temps*, l'état initial donnera $o = C - \text{arc.}\left\{\text{tang.} = \frac{U}{a}\right\}$ et on aura pour intégrale ultérieure

$$(2) \ldots \frac{g}{a} t = \text{arc.}\left\{\text{tang.} = \frac{U}{a}\right\} - \text{arc.}\left\{\text{tang.} = \frac{v}{a}\right\}.$$

on déduit de cette équation

$$(3) \ldots v = a \,.\, \text{tang.}\left\{\text{arc.}\left[\text{tang.} = \frac{U}{a}\right] - \frac{g}{a} t\right\}.$$

Pour avoir la rélation entre l'espace parcouru et la vîtesse on multipliera le premier membre de (1) par v et son second membre par la valeur $\frac{dx}{dt}$ de v, en désignant par x la distance à laquelle le mobile se trouve au bout du temps t, du point où il avait la vîtesse initiale U, et cette équation (1) pourra se mettre sous la forme $dx = -\frac{a^2}{2g} \cdot \frac{2vdv}{a^2 + v^2}$

ayant pour intégrale $x = C - \frac{a^2}{2g} \log. (a^2 + v^2)$;

l'hypothèse des valeurs simultanées $x = 0$, et $v = U$, donne $C = \frac{a^2}{2g} \log. (a^2 + U^2)$, d'où

$$(4) \ldots\ldots x = \frac{a^2}{2g} \,.\, \log.\left(\frac{a^2 + U^2}{a^2 + v^2}\right).$$

on déduit de cette équation, en désignant par e le nombre dont le

$$(1) \ldots\ldots \frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right).$$

on en déduit

$$gdt = \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{a^2}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dv}{1 + \frac{v}{a}} + \frac{dv}{1 - \frac{v}{a}}\right);$$

et on a pour intégrale, après avoir divisé les deux membres par a,

$$(2) \ldots\ldots t = \frac{a}{2g} \cdot \log.\left(\frac{a+v}{a-v}\right).$$

La constante arbitraire est nulle d'après l'hypothèse des valeurs simultanées $v = 0$ et $t = 0$. On déduit de cette équation

$$(3) \ldots\ldots v = \frac{a\,(e^{2gt:a} - 1)}{e^{2gt:a} + 1},$$

Pour obtenir une équation finie entre les vîtesses et les espaces parcourus on multipliera le 1er. membre de (1) par v et le 2e. membre par la valeur $\frac{dx}{dt}$ de v; et on aura

$$gdx = \frac{vdv}{1 - \frac{v^2}{a^2}};$$

multipliant les deux membres par $\frac{2}{a^2}$ et intégrant

$$\frac{2g}{a^2}\,x = -\log.\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right), \text{ ou}$$

$$(4) \ldots\ldots x = \frac{a^2}{2g} \log.\left(\frac{a^2}{a^2 - v^2}\right);$$

la constante est encore nulle parce qu'on a, en même temps, par hypothèse, $v = 0$ et $x = 0$.

Résolvant cette équation par rapport à v on a

$$(5) \ldots\ldots v = \frac{a\,(e^{2gx:a^2} - 1)^{\frac{1}{2}}}{e^{gx:a^2}}.$$

Si on substitue cette valeur dans (2) on aura t en x; et si on l'égale à celle qui est donnée par l'équation (3) on obtiendra l'équation

$$(6) \ldots\ldots \frac{e^{2gt:a} - 1}{e^{2gt:a} + 1} = \frac{(e^{2gx:a^2} - 1)^{\frac{1}{2}}}{e^{gx:a^2}}.$$

742. La quantité a est constante pour un milieu et un mobile donnés, mais quoique le mobile reste le même, elle varie d'un milieu à l'autre, et réciproquement dans le même milieu elle varie avec la masse du mobile. Je reviendrai sur ces observations avec quelque détail, lorsque je parlerai de la *résistance des fluides*. Je me bornerai à dire, en ce moment, que les équations des deux articles précédents peuvent être employées utilement à la détermination de a par l'expérience. En effet dans le cas de l'art. 740, connaissant la vîtesse initiale U et la plus grande hauteur H à laquelle le mobile s'est élevé, l'équation (4) de cet article donnera $H=\frac{a^2}{2g}\log.\left(1+\frac{U^2}{a^2}\right)$, la seule inconnue restante sera a qui pourra se calculer par des méthodes d'approximation. Si au lieu de la plus grande élévation, on connaît le temps T de cette élévation, on tirera de l'équation (2), $\frac{U}{a}=\text{tang.}\left(\frac{g}{a}T\right)$; enfin, sans connaître la vîtesse initiale, si on a observé la plus grande hauteur de l'ascention et sa durée, on aura l'équation $H=\frac{a^2}{2g}\log.\left\{1+\text{tang.}^2\left(\frac{g}{2}T\right)\right\}$; voilà donc trois moyens de calculer a par des données expérimentales.

Dans le cas de l'art. 741, H étant la hauteur totale de la chute et T sa durée, on substituera ces valeurs observées à x et t dans l'équation (6) de cet article, et on aura encore une équation qui ne contiendra d'autre inconnue que a. On peut aussi employer le temps total d'une ascension et d'une descente, en combinant les équations qui se [redacted]

comme le quarré de la vîtesse; on y voit que la valeur de cette vîtesse ne peut jamais être plus grande que a, quelle approche sans cesse de cette limite et qu'elle ne l'atteint rigoureusement que lorsque le temps ou l'espace parcourus sont infinis; mais, dans un grand nombre de cas les quantités exponentielles peuvent prendre un accroissement très-rapide de manière que le nombre qui multiplie a, dans la valeur de v, devienne promptement presque égal à l'unité, et que le mouvement parvienne sensiblement à l'uniformité avec la vîtesse a. C'est un premier exemple des espèces de mouvements variés, dont j'ai parlé à l'art. 695.

744. Le mobile lancé de bas en haut avec la vîtesse initiale U séléve, comme on a vu précédemment, à une hauteur $\frac{a^2}{2g}\log.\left\{1+\text{tang.}^2\left(\frac{g}{a}T\right)\right\}$; à cette hauteur, sa vîtesse se trouvant entièrement éteinte, il prend un mouvement rétrograde et une des forces qui font varier son mouvement, subit, ainsi que je l'ai observé art. 739, un changement, brusque en prenant, tout-à-coup, une direction diamétralement opposée à celle qu'elle avait pendant l'ascension du mobile. Les équations du mouvement, dans ce second cas, ne peuvent pas se déduire de celle qui se rapportent au premier cas, les relations entre t et v sont différentes. Cependant on peut ramener l'expression de ces relations à des considérations géométriques qui établissent la loi de continuité entre les phénomènes du mouvement de montée et de descente. Du rayon $AC=a$ traçons un arc-de-cercle AB dont la tangente AT, menée au point A, soit égale à la vîtesse initiale U; prenons sur cette tangente la longueur $AQ=v$, et traçons les sécantes CT et CQ; on verra très-aisément, en rapprochant cette construction de l'énoncé de l'équation (2) art. 740, que cette équation peut être remplacée par la suivante Fig. 1.

$$t=\frac{2\times\text{secteur } CBn}{ag}$$

Soit maintenant, C le centre et A le sommet d'une hyperbole équilatère AMH; prolongeons la tangente TA, commune aux deux courbes, jusqu'à sa rencontre R avec l'assymptote CRN; prenons sur AR une longueur $A\tau=v$ (cette indéterminée v étant celle qui entre dans l'équation (3) art. 741), et une longueur $A\tau'$ dont l'excès sur la première soit censé une partie infiniment petite $\tau\tau'=dv$; menons enfin les

rayons vecteurs $C\tau M$, $C\tau' M'$. On trouvera sans difficulté que le secteur élémentaire $CMM' = \frac{\frac{1}{2}adv}{1-\frac{v^2}{a^2}} = \frac{agdt}{2}$ d'où $dt = \frac{2\times CMM'}{ag}$

et $t = \frac{2\times CAM}{ag}$, cette équation pouvant remplacer l'équation (2) de l'art. 741.

Ainsi comptant les vîtesses sur la ligne RT, de part et d'autre de l'origine A, savoir les vîtesses qui ont lieu dans le mouvement d'ascension du côté de T, et celles qui ont lieu dans le mouvement de descente du côté de R, les temps correspondant à ces vîtesses seront représentés par les aires comprises entre le rayon CB la courbe composée $BnAMH$, et un autre rayon vecteur quelconque, Cn ou CM, mené à cette courbe composée, et coupant RT à l'extrémité de la partie AQ ou $A\tau$ qui représente la vîtesse. On comptera *zéro temps* au moment où le mobile sera lancé de bas en haut avec la vîtesse initiale $AT = U$, le rayon vecteur $C\tau$ ou CQ se confondant alors avec CT, et cette origine du temps sera commune à la montée et à la descente.

La propriété énoncée à l'art. 743 est manifeste dans cette construction; on voit que la vîtesse $A\tau$ ne peut jamais excéder la longueur AR du demi-axe a; elle n'atteint cette longueur que lorsque CM se confond avec l'asymptote CR, auquel cas l'aire CAM qui représente le temps est infinie ; mais le point τ peut être promptement assez rapproché du point R pour que les lignes $A\tau$ et AR ne diffèrent [redacted]

comme on peut s'en assurer à l'aspect des équations (1) des art. cités, de développer la fonction $\frac{1}{1 \pm \frac{v^2}{a^2}} = 1 \mp \frac{v^2}{a^2} + \frac{v^4}{a^4} \mp \frac{v^6}{a^6} + \text{etc.}$

le signe supérieur est applicable au cas du mouvement d'ascension et le signe inférieur au cas du mouvement de descente.

Dans l'un et l'autre cas on intègre le produit de la série par dv ou par vdv, respectivement, pour obtenir la valeur du temps ou celle de l'espace parcouru et on a,

Dans le cas du mouvement d'ascension

$$gt = \tfrac{1}{1}(U - v) - \tfrac{1}{3}\,\frac{U^3 - v^3}{a^2} + \tfrac{1}{5}\,\frac{U^5 - v^5}{a^4} - \tfrac{1}{7}\,\frac{U^7 - v^7}{a^6}\ \text{etc.}$$

$$gx = \tfrac{1}{2}(U^2 - v^2) - \tfrac{1}{4}\,\frac{U^4 - v^4}{a^2} + \tfrac{1}{6}\,\frac{U^6 - v^6}{a^4} - \tfrac{1}{8}\,\frac{U^8 - v^8}{a^6}\ \text{etc.}$$

Dans le cas du mouvement de descente

$$gt = \tfrac{1}{1}\,v + \tfrac{1}{3}\,\frac{v^3}{a^2} + \tfrac{1}{5}\,\frac{v^5}{a^4} + \tfrac{1}{7}\,\frac{v^7}{a^6}\ \text{etc.}$$

$$gx = \tfrac{1}{2}\,v^2 + \tfrac{1}{4}\,\frac{v^4}{a^2} + \tfrac{1}{6}\,\frac{v^6}{a^4} + \tfrac{1}{8}\,\frac{v^8}{a^6}\ \text{etc.}$$

Lorsque la résistance du milieu est nulle ou que $a = \infty$, le 2ᵉ. membre de chacune de ces équations se réduit à son premier terme, et on obtient alors les relations entre t, v et x qui doivent avoir lieu dans le vide.

On peut aussi employer utilément ces valeurs en série dans les calculs relatifs à la détermination de la quantité a, ou de la résistance du fluide; je supprime ces détails par les motifs donnés à la fin de l'art. 742.

De la *dureté*, de l'état de *mollesse*, de l'*élasticité* et des divers degrés de ces qualités dans les corps. Mesure de l'*élasticité*.

746. La *dureté* est la propriété des corps par laquelle ils résistent plus ou moins aux efforts qui tendent à séparer les différentes parties de leurs masses, ou, en général, à changer les positions respectives

de ces parties, et par conséquent les formes des corps; un corps *parfaitement dur* est celui dans la forme duquel aucun effort ne peut produire le plus léger changement. On a tout lieu de croire qu'il n'existe pas de corps pareils dans la nature, et je considère la *parfaite dureté* comme une qualité purement abstraite, mais dont l'introduction, dans certaines branches de théorie générale, est indispensable, comme on le verra dans la suite du cours.

Lorsqu'un corps n'est pas *parfaitement dur* et que sa forme est par conséquent susceptible de changement, si une force, après avoir opéré un pareil changement, cesse d'agir sur lui, ou ce corps conservera la nouvelle forme qu'il a été obligé de prendre, ou il reviendra complétement à la première, ou enfin il changera sa nouvelle forme mais sans regagner entièrement la première.

Le corps qui est dans le premier cas s'appelle un corps *mou;* il doit être, à certains égards, quant aux phénomènes de mouvement, assimilé aux corps *parfaitement durs;* le second cas est celui des corps *parfaitement élastiques;* on peut si l'on veut, considérer encore la *parfaite élasticité* comme une propriété abstraite, quoique la nature nous offre beaucoup de corps qui en jouissent à un degré éminent, enfin le 3e. cas est celui des corps *imparfaitement élastiques.*

747. On a tenté d'établir, entre les différents degrés de dureté des corps, quelques modes de comparaison, utiles dans les arts, mais étrangers aux recherches qui vont suivre, et qui ne sont pas d'ailleurs susceptibles d'une rigueur mathématique. Il n'en est pas de même des différents degrés d'élasticité, leur mesure, que j'aurai occasion d'introduire dans des problêmes importants de dynamique, se rapporte [redacted]

Soit maintenant un autre corps imparfaitement élastique se trouvant, d'ailleurs, dans des circonstances parfaitement semblables à celles que je viens de décrire, à la valeur près de sa vîtesse avant le choc, qui peut être ou ne pas être la même que celle du premier corps; après le choc ce corps retournera aussi en arrière sur la ligne de direction de son premier mouvement, mais sa vîtesse sera moindre qu'elle n'était avant le choc dans un rapport qu'on peut supposer $= 1 : n$, l'unité représentant la vîtesse antérieure au choc, et n un nombre positif < 1; ce nombre n donnera la mesure l'élasticité du second corps lorsqu'on fera l'élasticité parfaite $= 1$.

Définition de la *quantité de mouvement*. Distinction entre la *pression* et le *choc*. La rigueur des théories d'équilibre est indépendante des considérations sur les forces particulières à la Dynamique. Représentation des forces, dans l'analyse des phénomènes du mouvement d'un corps ou d'un système de corps, par des *forces motrices* ou des *quantités de mouvement*, des *forces accélératrices*, ou des *vîtesses*. Observation sur la décomposition des vîtesses. On peut toujours ramener les expressions qui représentent les forces appliquées à un systême à ne contenir que des *forces accélératrices* ou des *vîtesses*.

748. On a vu par les détails dans lesquels je suis entré art. 714 et suivants sur la comparaison et la mesure des forces, que les effets mécaniques dont les corps en mouvement sont capables dépendent essentiellement de leurs masses et de leurs vîtesses; m désignant la masse et v la vîtesse, le produit mv qu'on employe, à chaque instant, dans les problêmes de dynamique a été désigné par le nom particulier de *quantité de mouvement.*

J'observerai, à propos de cette définition, que le mode de comparaison des forces entr'elles, établi art. 718 et suivants, se réduit à assigner des rapports entre des *quantités de mouvement;* en effet la *force motrice* $\frac{dv}{dt}\,m$, à laquelle, art. 722, la *puissance* est proportionnelle, n'est autre chose qu'une *quantité de mouvement* hypothétique, qui aurait lieu au bout de l'unité de temps, si, à partir de l'état de repos, le corps se mouvait, pendant cette unité de temps, d'un mouvement uniformément accéléré avec la force accélératrice $\frac{dv}{dt}$ supposée constante.

749. J'ai fait connaître, aux articles cités, que les forces dont la composition, la décomposition et l'équilibre constituaient les objets de la première partie du cours, étaient celles qui, dans le premier instant de leurs actions sur les masses *m*, leur impriment des *quantités de mouvement* élémentaires *mdv* ou *mφdt*, (en désignant respectivement par *v*, *φ* et *dt*, la vîtesse, la force accélératrice et l'élément du temps) ou qui, à un instant quelconque de ces actions prolongées, font varier de *mdv* ou *mφdt* la *quantité de mouvement* actuelle *mv* du corps. Or les effets mécaniques dont est capable une masse lorsqu'elle jouit de la quantité de mouvement élémentaire *mφdt*, ou qu'elle est animée d'une quantité de mouvement finie *mv*, étant d'ordres différents, et tels qu'on ne peut établir ni rapports de quantités, ni conditions d'équilibre entre les actions des masses, prises dans l'un, et les actions des mêmes masses, prises dans l'autre de ces cas, (je donnerai bientôt, sur cet objet, des développements appuyés d'exemples) on a distingué ces effets par des noms différents. On appelle *pression* l'action, contre un obstacle d'une masse *m*, animée d'une quantité de mouvement élémentaire *mφdt*, celle que lui communique, dans le 1er. instant, une puissance *continue*, la masse *m* étant à cet instant supposée en état de repos, et l'effet de l'obstacle qu'elle *presse* étant d'empêcher les accroissements successifs de la vîtesse naissante; et on désigne par le nom de *choc*, l'action contre un obstacle de la même masse *m*, lorsqu'elle a acquis soit par l'action continuée de la puissance, soit d'une autre manière quelconque la *quantité de mouvement* finie *mv*.

750. Ces détails, ceux qui les ont précédé depuis l'art. 714, et d'autres qui ne tarderont pas à être exposés, doivent, ainsi que j'en

tement les circonstances auxquelles on rapporte son action, on ne compare à cette force, et entr'elles, que d'autres forces qui, *par le fait*, ont des modes d'actions tels qu'elles peuvent, dans les conditions et dans les circonstances assignées, contre-balancer les efforts résultants de l'action de la puissance prototype, ce qui suppose qu'elles sont, nécessairement, de même nature et de même *ordre* qu'elle; dès-lors l'expression d'une force, pour la Statique, n'est que le nombre indiquant le rapport entre cette force et son unité convenue, sans aucun égard aux facteurs de cette expression que des considérations de dynamique ont fait découvrir.

751. Des puissances p', p'', etc. capables d'imprimer, respectivement, à des masses m', m'', etc. des quantités de mouvement élémentaires $m'\phi' dt$, $m''\phi'' dt$, etc. doivent donc, d'après les explications fort étendues qui précèdent, si, pour ne s'attacher d'abord qu'au cas le plus simple, leurs directions concourent en un même point, être sujettes aux mêmes lois de composition, de décomposition et d'équilibre qui ont été établies dans la première partie du cours. Qu'on suppose maintenant que chacune de ces puissances soit capable d'imprimer, dès le premier instant de son action, au lieu de l'élément $m\phi dt$ de quantité de mouvement, la quantité de mouvement finie $m\phi$ qui représente la *force motrice*; les équations posées dans le premier cas devront encore subsister dans celui-ci, puisque les rapports entre les puissances resteront les mêmes. Les changements opérés dans les termes de ces équations consistent en ce que les nombres, qui représentoient d'abord les intensités, se trouvent ensuite multipliés par le facteur infini mais commun $\frac{1}{dt}$; les données et les inconnues passent d'un ordre de quantité à l'autre mais conservent les mêmes relations.

En général si un point matériel reçoit, dans des directions quelconques, les impulsions simultanées de plusieurs puissances dont chacune pourrait lui donner, dès le premier instant de son action, une vîtesse soit élémentaire soit finie, la vîtesse et la direction résultantes de toutes ces impulsions se détermineront d'après les vîtesses et les directions que le corps pourrait recevoir des différentes forces, en substituant purement et simplement ces vîtesses et ces directions aux intensités et aux directions des forces dans les formules de composition fournies par la statique, ce qui est évidemment applicable aux décompositions et aux conditions d'équilibre.

Ces propositions, qui sont des conséquences immédiates ou plutôt les énonciations, en d'autres termes, de celles qui sont consignées dans les art. 714 et suivants, pourroient se démontrer immédiatement par une suite de raisonnements absolument semblables à ceux que j'ai employés depuis l'art. 41 jusqu'à l'art. 74. On commencerait par le cas de deux forces capables d'imprimer des vîtesses égales V dans des directions différentes faisant entr'elles un angle 2α, et on trouverait la vîtesse résultante $v = 2V \cos. \alpha$, imprimée suivant une ligne qui partagerait l'angle 2α en deux parties égales, etc.

752. La décomposition d'une vîtesse V en plusieurs autres peut être considérée sous un point de vue purement géométrique; si, par exemple, un corps M, animé de cette vîtesse V, se meut d'un mouvement uniforme, dans une direction déterminée faisant les angles respectifs α, β, γ avec trois directions rectangulaires suivant lesquelles la décomposition est censée avoir lieu, les composantes $V \cos. \alpha$, $V \cos. \beta$, $V \cos. \gamma$, seront les valeurs des projections orthogonales, sur les droites auxquelles se rapportent α, β et γ, de l'espace parcouru pendant chaque unité de temps par M sur sa ligne de mouvement, et les produits $tV \cos. \alpha$, $tV \cos. \beta$, $tV \cos. \gamma$ seront les projections orthogonales, sur les mêmes droites, de l'espace total parcouru par M pendant le temps t.

753. En résultat si l'un quelconque M des points matériels composant un système est sollicité par des forces dont chacune serait capable de lui imprimer une vîtesse finie V au premier moment de son action, toutes les forces appliquées au système seront dans l'analyse relative à la détermination des phénomènes du mouvement, représentées par des termes de la forme MV, et si toutes les masses M sont égales les forces [redacted]

nécessaires. Dans le cas où les masses sont égales les puissances sont représentées par les seules *forces accélératrices*.

754. J'observerai, en finissant ce chapitre, que, dans l'analyse des phénomènes de mouvement d'un système de corps sollicité par des puissances quelconques, on peut toujours ramener les signes qui représentent les forces à n'exprimer que de simples vîtesses. En effet, une force étant capable de donner à une masse M dans le 1er. instant de son action soit une vîtesse finie V, soit un élément de vîtesse duquel on déduise une force accélératrice Φ, ce qui, dans l'un ou l'autre cas, lui assigne parmi les forces de même ordre ou l'expression MV ou l'expression $M\Phi$, si on suppose que cette force agisse sur un autre corps M' on devra toujours pouvoir déduire de l'effet produit sur ce second corps la quantité qui assigne à la cause motrice une relation déterminée avec les autres puissances; cet effet se réduit à la production d'une vîtesse V' ou d'une force accélératrice Φ', la puissance devra donc être représentée dans le 1er. cas par MV ou par $M'V'$ et dans le second cas par $M\Phi$ ou $M'\Phi'$, c'est-à-dire qu'on aura $M'V' = MV$ et $M'\Phi' = M\Phi$, d'où $V' = \frac{MV}{M'}$, $\Phi' = \frac{M\Phi}{M'}$, et comme on peut poser pour chaque force du système une équation semblable dans laquelle entre la même masse M', on voit qu'en divisant tous les produits MV ou $M\Phi$, qui représentent les forces appliquées à un système, par une quantité commune M', représentant une masse déterminée, les quotients V' ou Φ', qui représentent ou des vîtesses ou des forces accélératrices, pourront, dans l'analyse des phénomènes du mouvement, être substitués aux produits MV ou $M\Phi$ pour représenter les forces.

Conditions de l'équilibre dans le choc de deux corps parfaitement durs qui se meuvent en sens directement opposés.

755. Les principes sur la comparaison et la mesure des forces, indistinctement applicables tant à la théorie de l'équilibre, traitée dans la première partie du cours, qu'aux phénomènes du mouvement, étant établis comme je l'ai fait dans les chapitres précédents, je vais les appliquer à un cas fondamental d'équilibre entre les corps en mouvement, dont l'examen, ainsi que j'en ai prévenu art. 668, appartient proprement à la Dynamique.

Une force qui agit sur un corps libre et en repos (considéré d'abord

comme un point matériel parfaitement dur) et qui, dans le premier moment de son action, lui imprime une certaine vîtesse, ou finie, ou naissante, met ce corps en état d'agir lui-même contre un obstacle qui s'opposerait à son mouvement. Supposons que l'obstacle soit un plan matériel immobile, perpendiculaire à la direction du mouvement imprimé; le mobile fera éprouver à ce plan, ou un *choc*, ou une *pression*, art. 749; mais quelle sera la mesure de cette impulsion quelconque, ou plutôt quel sera son rapport avec l'impulsion que l'obstacle aurait reçu de la force, si celle-ci eût exercé immédiatement sur lui l'action qu'elle a exercé sur le mobile? d'abord les seuls éléments dont se compose la faculté qu'a le corps d'agir sur l'obstacle, étant la *masse* et la *vîtesse*, la loi la plus naturelle et la plus simple qu'on puisse assigner aux relations existantes entre les actions pareilles de plusieurs corps est de dire qu'elles suivent entr'elles les raisons composées des masses et des vîtesses, c'est-à-dire qu'elles ont, les unes avec les autres, les rapports existants entre les forces qui ont donné aux corps la faculté d'agir; mais on peut, indépendamment de cette considération, affirmer que le rapport de l'effet immédiat de la force contre l'obstacle, à l'effet correspondant du corps qui lui doit sa faculté d'agir, est celui de l'égalité, puisqu'on ne saurait nier cette proposition sans nier tout ce qui est connu et adopté, comme incontestable, sur la comparaison et la mesure des forces dont le mode d'action échappe à nos sens; nous ne pouvons lier à la notion de ces agents invisibles l'idée de *quantité*, que par les phénomènes observés sur les corps auxquels ils ont communiqué le pouvoir de produire des effets *sensibles*; ainsi c'est à la connaissance de ces phénomènes que se réduit tout ce que nous savons sur la *pesanteur*; l'intensité de son action sur un corps est toujours considérée comme identique avec l'effort que ce corps exerce contre un obstacle, représentée par cet effort lui-même, et comme c'est la pesanteur qui nous a fourni le terme général de comparaison et de mesure des forces, celles-ci se trouvent à tous égards dans le même cas que leur prototype commun.

756. Des points matériels m', m'', etc. à qui des forces f', f'', etc. ont donné des vîtesses élémentaires dv', dv'' etc. peuvent donc exercer, contre un obstacle, dans les circonstances énoncées à l'art. précédent, des efforts qui ont des mesures $m'dv'$, $m''dv''$, etc. communes avec les forces

f', f'', etc. Il en serait de même, art. 751, si les vîtesses engendrées, au lieu d'être infiniment petites, étaient les vîtesses finies $\frac{dv'}{dt}$, $\frac{dv''}{dt}$, etc. c'est-à-dire si des *quantités de mouvement* égales aux *forces motrices* $\frac{m'dv'}{dt}$, $\frac{m''dv''}{dt}$, etc. étoient instantanément imprimées aux corps. Dans tous ces cas, si les masses animées de quantités de mouvement élémentaires ou finies sont supposés agir simultanément sur un point, leur équilibre sera soumis aux mêmes lois que celui des forces auxquelles elles doivent leurs facultés d'agir.

On déduit immédiatement de ces considérations le théorême suivant. « Si deux corps parfaitement durs M' et M'', que l'on peut, pour fixer « les idées, considérer comme deux sphères finies ou infiniment petites, « se meuvent uniformément avec les vîtesses respectives V' et V'', et en « sens directement opposés, le long de la ligne droite qui renferme leurs « centres, et qu'on ait l'équation $M'V' = M''V''$ (qui est l'énonciation de « l'égalité entre les *quantités de mouvement*) ces corps resteront juxta- « posés et immobiles à compter du moment où il se seront rencontrés.

757. Quelques auteurs, après avoir établi les principes posés précédemment sur la comparaison et la mesure des forces, ont, cependant, cru devoir assujettir la démonstration du théorême sur l'équilibre, dans le choc direct des corps durs, à des raisonnements particuliers, sans la déduire immédiatement, comme je viens de le faire, de l'identité entre l'effet dont un corps en mouvement est capable et celui qu'on doit attribuer à la force qui a mis ce corps en mouvement. Voici à quoi se réduisent ces raisonnements : le rapport de masses de M' à M'' étant supposé celui de $1 : n$ et le rapport des vîtesses V' et V'' celui de $n : 1$; (on suppose d'abord que les masses sont commensurables entr'elles, ainsi que les vîtesses, et quand on a traité ce cas celui de l'incommensurabilité n'a aucune difficulté) et on dit 1°. que l'effet de la masse M'' égale à n fois la masse M' et animée de la vîtesse V'' est le même que celui de n masses M', unies ou agglomérées ensemble, et animées chacune de la vîtesse V''; 2°. que l'effet de la masse M' jouissant de la vîtesse V' égale à n fois la vîtesse V'', est le même que celui qu'on obtiendrait si on faisait sur V' la même sous-division en n parties, précédemment opérée sur M'', et qu'on imprimât chacune de ces n vîtesses partielles $\frac{V'}{n}$

à autant de masses M' qui, réunies, agiraient ensemble. On ramène ainsi le cas des masses et des vîtesses différentes à celui des masses et des vîtesses égales. J'observe que la première des propositions par lesquelles on arrive à ce résultat est incontestable et même évidente, mais que la seconde, quoique vraie, n'est point du tout dans la classe de celles qui doivent être accordées sur le simple énoncé, et, avec une légère réflexion, on reconnaîtra qu'elle renferme une *pétition de principe*, c'est-à-dire qu'elle présuppose la vérité de ce qu'on veut démontrer. Or cette même proposition est une conséquence immédiate des principes relatifs à la mesure des forces et aux effets dont les corps mis en mouvement par ces forces sont capables, la liaison de ces principes avec le théorême de l'article précédent est donc également immédiate et on tombe dans un cercle vicieux en voulant établir cette liaison par des raisonnements intermédiaires.

Lois du choc direct des corps parfaitement durs, et des corps qui jouissent d'un degré quelconque d'élasticité.

758. Deux mobiles qui se meuvent sur une même ligne droite, ou *directrice*, sont, pour fixer les idées, supposés être des sphères de grandeurs finies ou infiniment petites, ayant constamment leurs centres sur la directrice, et un mouvement de translation générale de tous les points de leurs masses parallèlement à cette ligne sans rotation autour du centre. Ces mobiles désignés par M' et M'' sont animés des vîtesses respectives V' et $\pm V''$; les signes respectifs de ces vîtesses se déterminent d'après les mêmes règles auxquelles sont soumis les signes des puissances qui les ont engendrées (voyez les articles 25 et 26); ainsi, en attribuant à V' le signe positif, V'' aura le signe positif ou le signe négatif, respectivement, suivant que M' et M'' se mouvront dans le même sens ou dans des sens contraires; enfin, dans le cas de V' et V'' positives, il faudra, pour que le choc puisse s'effectuer, supposer $V'>V''$.

Ces préliminaires posés, lorsque, pour une combinaison quelconque des signes de V' et V'', la rencontre des deux corps aura eu lieu, il est évident, d'après leur incompressibilité et leur parfaite dureté, qu'ils resteront juxta-posés, se mouvant avec une vîtesse commune, précisément

ment comme le ferait un corps unique M''' dont la masse serait égale à $M' + M''$; mais, à l'instant de la génération de cette vîtesse commune, les choses se passent exactement de la même manière que si le système de deux masses juxta-posées M' et M'', ou la masse unique M''', recevait tout-à-coup une impulsion donnée par une force dont l'intensité serait représentée par la somme des quantités de mouvement $M'V' \pm M''V''$; après l'impulsion, ce corps M''' doit, conformément aux principes ci-dessus établis, être en état de produire, contre un obstacle, précisément le même effet que la force à laquelle il doit sa faculté d'agir, et les effets de ce genre sont entr'eux comme les quantités de mouvement; M''' acquerra donc, par l'impulsion, une quantité de mouvement égale à $M'V' \pm M''V''$; désignant sa vîtesse par v on aura $M'''v = M'V' \pm M''V''$ et en substituant pour M''' sa valeur $M' + M''$

$$v = \frac{M'V' \pm M''V''}{M' + M''}.$$

759. Le raisonnement par lequel cette équation est obtenue n'est, au fond, que celui qui a conduit au théorême de l'art. 756 relatif à la condition d'équilibre dans le choc des corps durs; ce raisonnement peut être employé, pour arriver au même but, d'une manière, plus expéditive encore, qui a l'avantage de donner la première idée d'une méthode générale indistinctement applicable à la *mise en équation* de tous les problêmes de dynamique, et dont nous ferons le plus grand usage. Puisque, par l'état de la question, le système $M' + M''$ ou le corps M''' se trouve soumis à l'action de la puissance $M'V' \pm M''V''$ et que, par hypothèse, ce système ou corps doit, en vertu de cette action, acquérir la quantité de mouvement $(M' + M'')\,v$ ou $M'''v$, si à l'instant de la production de cet effet, un autre corps M''', animé de la vîtesse $-v$ et se mouvant sur la même ligne de direction que le premier corps M''', venait choquer ce premier corps, la quantité de mouvement $M'''v$ serait évidemment détruite; ce nouveau corps M''' ou la nouvelle puissance $-M'''v$ annulerait donc l'effet de la puissance qui a pour mesure $M'V' \pm M''V''$, c'est-à-dire ferait équilibre à cette puissance, ce qu'on énonce par l'équation $M'V' \pm M''V'' - M'''v = 0$ donnant, pour v, la valeur trouvée dans l'art. précédent.

On observera que l'équation par laquelle le problême est résolu est

une équation d'équilibre renfermant les inconnues qui se rapportent au mouvement.

760. Voici une autre manière d'obtenir cette équation que j'expose ici pour servir de préparation à la théorie du choc des corps élastiques. Puisque les deux corps, après le choc, doivent se mouvoir, juxta-posés, avec une vîtesse commune v, on peut, sans rien changer à l'état des choses, imaginer qu'avant le choc il sont supportés par un plan, qui se meut parallélement à leur ligne de mouvement avec cette même vîtesse v; les vîtesses de M' et M'', sur ce plan, étant, respectivement, $V' - v$ et $v \mp V''$, les vîtesses absolues dans l'espace seront $v + (V' - v)$ et $v - (v \mp V'')$ ou V' et $\pm V''$. Or c'est uniquement en vertu des vîtesses $V' - v$ et $v \mp V''$ sur le plan, que M' et M'' peuvent se joindre et agir l'un sur l'autre dans le choc, celle qui leur est commune avec le plan n'étant d'aucun effet pour changer la distance qui les sépare et déterminer leur rencontre. On peut donc, sans égard au mouvement du plan, considérer M' et M'' comme deux corps qui vont à la rencontre l'un de l'autre sur ce plan, avec les vîtesses respectives $V' - v$ et $v \mp V''$ et qui se choquent avec les quantités de mouvement $M'(V' - v)$ et $M''(v \mp V'')$. Mais, par hypothèse, la vîtesse que chacun d'eux doit avoir après le choc est celle du plan qui les entraine, et pour que cette condition soit remplie il faut que ces corps restent immobiles, par rapport au plan, au point de ce plan où ils se rencontreront, et, par conséquent, que les quantités de mouvements $M'(V' - v)$ et $M''(v \mp V'')$ se détruisent ou se fassent équilibre, ce qui suppose, art. 756, l'égalité de ces quantités de mouvement, et fournit l'équation $M'(V' - v) = M''(v \mp V'')$ de laquelle on déduit $v = \frac{M'V' \pm M''V''}{M' + M''}$ comme à l'art. 758.

est, comme dans le cas du choc des corps parfaitement durs, égale à la somme des quantités de mouvement primitives divisées par la somme des masses, mais le cas du choc des corps *mous* a cela de particulier que chacune des vîtesses V' et V'' ne devient pas brusquement la vîtesse v, et n'y arrive que par des nuances continues en passant par toutes les vîtesses intermédiaires. Le changement s'opère pendant un temps ordinairement fort court, ce qui le fait paraître instantané (voyez l'art. 714); ce tems varie suivant la nature des corps. Le 1er. volume de mon *architecture hydraulique*, contient, (art. 438 et suiv.) beaucoup de détails sur cette matière.

762. Je passe au cas du choc direct des corps parfaitement élastiques, en conservant, pour les masses et les vîtesses, la même notation employée dans les articles précédents, et j'observe 1°. que depuis l'instant où les corps commencent à être en contact jusques et y compris celui où ces corps, par suite de leurs actions réciproques, ont acquis une vîtesse commune, les phénomènes qui ont lieu sont comparables à ceux que présente la première époque du choc des corps *mous*, dont il a été question dans l'article précédent, et la vîtesse commune, à l'instant qui commence la seconde époque, a la valeur trouvée art. 758; 2°. qu'à ce même instant où M' et M'', en vertu de la vîtesse commune, cesseraient de se presser et se mouvraient juxta-posés, s'ils n'étaient pas élastiques, ils doivent, d'après la propriété de l'élasticité (voyez l'art. 747) exercer encore, l'un sur l'autre, des actions réciproques desquelles résultent la séparation des corps et des changements dans leur vîtesse commune v, différents, en général, pour chaque corps, et qu'il s'agit de déterminer.

On arrivera aisément à cette détermination en employant l'hypothèse de l'art. 760. Dans cette hypothèse, vu l'égalité des quantités de mouvements $M'(V'-v)$ et $M''(v \mp V'')$ que les deux corps ont sur le plan qui les transporte; et l'équilibre qui a lieu, sur ce plan, au moment où leur choc y est effectué à la manière des corps durs, et considérant de plus que ces phénomènes se passent comme si le plan transportant était immobile, chacun des corps élastiques est dans le même cas que s'il avait consommé la quantité de mouvement, avec laquelle il opère le choc, contre un plan inébranlable perpendiculaire à la droite suivant laquelle il se meut et passant par le point où il rencontre l'autre corps; il doit donc, art. 747, en vertu de son élasticité prendre un mouve-

ment rétrograde et s'éloigner du plan choqué avec la même vîtesse dont il jouissait en s'en approchant; ainsi après le choc, M' et M'' jouiront sur le plan qui les transporte, des vîtesses respectives $-(V'-v)$ et $(v \mp V'')$ lesquelles auront lieu en sens directement opposés, puisqu'en vertu de ces vîtesses ils s'éloignent, sur ce plan, du point où ils s'y sont rencontrés; et leurs vîtesses absolues, dans l'espace, seront, $v-(V'-v)$ ou $2v-V'$ pour M', et $v+(v \mp V'')$ ou $2v \mp V''$ pour M''; désignant, par v' et v'', respectivement, ces vîtesses finales de M' et M'' on aura

$$v' = 2v - V'$$
$$v'' = 2v \mp V''$$

ou en substituant pour v sa valeur trouvée art. 758,

$$v' = \frac{M'V' + M''(\pm 2V'' - V')}{M' + M''}$$

$$v'' = \frac{\pm M''V'' + M'(2V' \mp V'')}{M' + M''}$$

équations qui peuvent se mettre sous la forme

$$\left.\begin{aligned} v' &= v - (V' - v) \\ v'' &= v + (v \mp V'') \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\left.\begin{aligned} v' &= V' - \frac{2(V' \mp V'')M''}{M' + M''} \\ v'' &= \pm V'' + \frac{2(V' \mp V'')M'}{M' + M''} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

On se rappellera que le signe supérieur se rapporte au cas où les corps, avant le choc, se mouvaient dans le même sens, et le signe inférieur

$$v''=\frac{\pm V''M''+M'\{(n+1)V'\mp nV''\}}{M'+M''}$$

équations qui peuvent se mettre sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} v'=v-n(V'-v) \\ v''=v+n(v\mp V'') \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} v'=V'-\dfrac{(n+1)(V'\mp V'')M''}{M'+M''} \\ v''=\pm V''+\dfrac{(n+1)(V'\mp V'')M'}{M'+M''} \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Ces formules générales reproduisent, comme cas particuliers, celles qui ont rapport au choc des corps durs en y faisant $n=0$, et celles qui ont rapport au choc des corps parfaitement élastiques en y faisant $n=1$.

Conservation du mouvement du centre de gravité dans le choc des corps durs et dans celui des corps jouissant d'un degré quelconque d'élasticité. Définition de la *force vive*. Évaluation de la perte de *force vive* qui a lieu dans le choc des corps, ou parfaitement durs, ou jouissant d'un dégré quelconque d'élasticité. Cette *force vive* se conserve, sans altération, dans le choc des corps parfaitement élastiques. Changement de signe et valeur de la vîtesse relative après le choc des corps de nature quelconque. Propriétés liées au principe de la *moindre action* et au principe des *aires*. Conservation des *moments*.

764. Les lois de la communication du mouvement, dans le choc des corps, ont été trouvées, après les découvertes de Galilée sur les mouvements *composé* et *uniformément varié*, par Wallis, Huigens et Wren. Descartes s'était aussi occupé de la recherche de ces lois, mais trompé par des vues systématiques, qui tenaient à la philosophie des *causes finales*, il était tombé dans de grandes méprises. Une de ses principales erreurs a été de croire que la même somme de *quantités de mouvement* se conservait invariablement dans l'univers, et cette conservation lui paraissait nécéssaire pour prévenir toute chance d'une cessation générale de mouvement dans le système du monde, qui entraînerait sa désorganisation complète. La théorie du choc des corps, établie dans le chapitre précédent, prouve que, lorsque les corps agissent les uns sur les autres, la somme *absolue* des produits des masses par les vîtesses, ne se conserve que dans des cas particuliers ; je dis la somme *absolue* pour la distinguer de la somme *algébrique* prise dans l'ac-

ception générale, sans avoir égard aux signes. Ainsi en multipliant par M' et M'', respectivement, la 1re. et la 2me. des équations (2) de l'art. précédent et faisant la somme des équations produits, on a

$$M' v' + M'' v'' = M' V' + M'' V''$$

les termes dépendants de l'élasticité ont disparu, et on voit que, dans une hypothèse quelconque sur le degré de cette élasticité, la somme *algébrique* des quantités de mouvement est la même avant et après le choc.

Si les corps se mouvoient dans le même sens avant le choc, la somme *algébrique* se confondrait avec la somme *absolue* et, pour ce cas, l'assertion de Descartes serait vraie, mais elle est erronnée dans le cas contraire.

La théorie fait reconnaître d'autres conservations de produits, dans lesquels entrent les masses et les vîtesses, dont la connaissance est d'autant plus intéressante qu'elle est liée à plusieurs grands *principes* de la mécanique, que je démontrerai dans la suite du cours, en les considérant sous le point de vue le plus général, et qui fournissent d'importants secours pour la solution des problêmes de dynamique.

765. Le premier de ces principes est celui de la *conservation du mouvement du centre de gravité ;* il a une analogie assez remarquable avec celui de Descartes, en ce qu'il établit, dans le choc des corps, une conservation de produits de masses et de vîtesses, indépendante de la *solution de continuité* qui peut avoir lieu dans la communication du mouvement, et applicable indistinctement tant aux corps parfaitement durs qu'aux corps mous et aux corps jouissant d'un degré quelconque d'élasticité.

Deux masses M' et M'', jouissant d'un degré quelconque d'élasticité [redacted]

$\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$ et $\frac{dx''}{dt}$ sont, à l'instant où on considère le mouvement de M' et M'', la vîtesse du centre de gravité et celles de M' et M'' quelque soient d'ailleurs les relations entre les espaces parcourus et les temps, ainsi M' et M'' ayant des mouvements rectilignes, assujettis à des lois quelconques, on aura la vîtesse de leur centre de gravité à un instant déterminé « en divisant la somme des quantités de mouvement, dont « elles jouissent au même instant, par la somme de ces masses » cette règle est, de plus, indépendante des positions respectives des corps et s'applique sans modification tant au cas de leur séparation qu'à celui de leur contiguité.

766. Si on considère les mouvements de M' et M'', après le choc, leurs vîtesses respectives étant, pour un degré quelconque d'élasticité, v' et v'' on aura la vîtesse du centre de gravité

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{v'M' + v''M''}{M' + M''}$$

on aurait eu, avant le choc

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{V'M' + V''M''}{M' + M''}$$

mais, art. 764, $v'M' + v''M'' = V'M' + V''M''$, donc la vîtesse du centre de gravité qui avait lieu avant le choc se conserve lorsque le choc est consommé, quelque soit le degré d'élasticité des corps.

767. Le second principe est celui de la *conservation des forces vivse* ; on entend par *force vive* d'un corps en mouvement le produit de sa masse par le carré de sa vîtesse; ainsi les corps M' et M'' se mouvant avec les vîtesses respectives V' et $\pm V''$, la somme de leurs forces vives est $M'V'^2 + M''V''^2$; si ces corps se trouvent dans le cas des art. 758 et suivants, ils devront se rencontrer, et une question importante est de savoir quel changement subira la somme initiale des *forces vives*. Pour résoudre cette question, je vais chercher la somme de ces forces vives, après le choc, en employant les valeurs des vîtesses données par les équations (2) de l'art. 763, qui sont indistinctement applicables aux corps parfaitement durs et aux corps jouissant d'un degré quelconque d'élasticité. On a, par ces équations, en élevant tous leurs membres au carré, multipliant ensuite la 1ere. par M', la 2e. par M'', et faisant enfin la somme des équations produits.

$$\left.\begin{array}{r} M'v'^2+M''v''^2=M'V'^2+M''V''^2-2(n+1)(V'\mp V'')^2\dfrac{M'M''}{M'+M''} \\ +(n+1)^2(V'\mp V'')^2\dfrac{M'M''}{M'+M''} \end{array}\right\}\ldots.(1)$$

effectuant la réduction du 2e. terme on a

$$(2)\ldots M'v'^2+M''v''^2=M'V'^2+M''V''^2-(1-n^2)\frac{M'M''}{M'+M''}(V'\mp V'')^2$$

il y a donc en général une perte de force vive, après le choc qui a pour valeur $(1-n^2)\dfrac{M'M''}{M'+M''}(V'\mp V'')^2$, et qui augmente à mesure que l'élasticité diminue, son maximum ayant lieu dans le cas des corps parfaitement durs qui donne $n=0$; mais cette perte devient nulle dans le cas de la parfaite élasticité, ou de $n=1$; ainsi une propriété remarquable du choc des corps parfaitement élastiques est la *conservation des forces vives*.

Je parlerai, quand il en sera tems, du principe de cette conservation en le considérant sous le point de vûe le plus général, et je démontrerai un théorème général sur l'évaluation de la perte de force vive, dans le cas d'un système quelconque de corps qui agissent les uns sur les autres, théorême curieux et important dû à M. Carnot.

768. Un 3e. principe général de la Dynamique est celui de la *moindre action*, sur lequel je donnerai, quand il en sera temps, tous les détails nécessaires. Je vais placer ici la démonstration d'une propriété curieuse liée à ce principe, et il est necessaire, pour arriver à cette démonstration, que je fasse d'abord remarquer le changement opéré par le choc dans la *vîtesse relative* des corps. Cette vîtesse relative avant le choc,

[redacted]

au coëfficient n qui mesure le degré d'élasticité, ensorte qu'elle se trouve à son maximum dans le cas du choc des corps parfaitement élastiques, se conservant la même dans ce cas, au signe près, avant et après le choc; sa valeur minimum est zéro, et a lieu dans le cas du choc des corps parfaitement durs, résultat évident d'ailleurs, puisque ces corps se meuvent juxta-posés après leur rencontre.

Voici, maintenant, l'énoncé de la propriété, liée au principe de la *moindre action*, dont j'ai parlé au commencement de cet article; « si on multiplie chaque masse par le quarré de la différence « entre ses vîtesses avant et aprés le choc, la somme des produits « ainsi faits sera un minimum, en prenant pour variables les vîtesses « après le choc » en effet, la somme des produits dont je viens de parler est $M'(V'-v')^2 + M''(v'' \mp V'')^2$, différentiant cette expression par rapport à v' et à v'' et égalant la différentielle à zéro, on a

$$(a) \; \ldots \; M''(v'' \mp V'')\,dv'' - M'(V'-v')\,dv' = 0.$$

on a de plus l'équation, ci-dessus trouvée, de la conservation des *vîtesses relatives* et sa différentielle; savoir:

$$v' - v'' + n(V' \pm V'') = 0\,; \; dv' = dv''\,;$$

qui combinées avec (a) redonnent les valeurs de v' et v'' consignées dans l'art. 763.

769. Si on conçoit une droite perpendiculaire à la ligne du mouvement (qu'on peut pour fixer les idées faire passer par le point de rencontre de M' et M'') et, d'un point déterminé de cette perpendiculaire, des rayons vecteurs menés aux points matériels M' et M'', ces rayons vecteurs engendreront, pendant chaque instant dt, des aires élémentaires $aV'\,dt$, $\pm aV''\,dt$, avant le choc, et $av'\,dt$, $av''\,dt$ après le choc, a étant la distance de l'origine des rayons vecteurs à la ligne du mouvement; ainsi, en ayant égard aux signes et dt étant constant, la somme des produits des masses par les aires élémentaires qu'engendrent leurs rayons vecteurs respectifs est la même avant et après le choc; ce qui vérifie le principe des *aires* dans le cas dont il s'agit.

L'équation qui établit la conservation des sommes des produits des masses par les *aires* élémentaires énonce, en même temps, la conservation des *moments* des quantités de mouvement de M' et M'' par rapport à l'origine des rayons vecteurs, qui peut être placée arbitraire-

ment ; cette conservation est, d'ailleurs, une conséquence évident de la relation entre les *aires* et les *moments* expliquée et démontrée art. 200 et suivants.

Toutes les propriétés du mouvement de deux masses sur une même ligne, démontrées dans cet article et les cinq précédents, se démontreraient avec la même facilité dans le cas du mouvement d'un nombre indéfini de masses ; mais je n'ai voulu donner ici que de simples aperçus sur les applications des quatre grands principes de la mécanique, cette matière devant être traitée, ainsi que j'en ai prévenu art. 764, dans la suite du cours, avec tous les détails nécessaires.

Du *mouvement composé* en général. Application de sa théorie au changement que subit le mouvement d'un point matériel, doué d'un degré quelconque d'élasticité et animé d'une vitesse finie, à la rencontre d'un plan immobile qu'il choque sous un autre angle que l'angle droit. Rapport général entre les angles d'*incidence* et de *réflexion*. Dans quel cas ces deux angles sont égaux.

770. Le mouvement d'un point matériel, isolé ou faisant partie d'un système, est appelé *mouvement composé* lorsqu'il est le résultat des actions ou impulsions qu'exercent immédiatement, sur ce mobile, des puissances d'intensités et directions quelconques, combinées tant avec d'autres actions que les masses du système dont il peut faire partie exercent sur lui ou les résistances que ces masses lui font éprouver, qu'avec des résistances particulières, parmi lesquelles on peut citer les corps ou surfaces qu'il rencontre et choque, l'assujettissement à se mouvoir sur des lignes ou des surfaces fixes ou mobiles, etc.

J'ai fait voir que la détermination des forces accélératrices, des vi-

tions de quelques questions élémentaires, dont j'aurai d'ailleurs à déduire des conséquences importantes.

771. Je considère le mobile comme un point matériel désigné par m, auquel on peut donner la forme sphérique, en supposant son rayon infiniment petit. Ce mobile jouit d'un degré d'élasticité qui est à l'élasticité parfaite comme $n : 1$, n étant un nombre positif plus petit que l'unité ; il se meut avec une vîtesse u dans une direction faisant un angle ϕ avec un plan immobile désigné par plan (A) vers lequel il est poussé en vertu du mouvement qui l'anime ; il s'agit de déterminer le mouvement que prendra m après sa rencontre avec ce plan. Je dis d'abord que si on fait passer par la ligne suivant laquelle m se mouvait avant le choc, un plan perpendiculaire au plan choqué, désigné par plan (B), m se trouvera encore dans (B) après le choc, puisque la résistance de (A), qui seule modifie le mouvement de m, est représentative d'une force normale à ce même plan (A), laquelle n'a aucun effet dans des directions formant des angles finis avec (B), et ne peut pas, par conséquent, faire dévier m de ce plan (B) ; il ne s'agit donc plus que de savoir quelles seront la direction et la vîtesse de m dans le plan (B).

Je décompose la vîtesse u, avant le choc, en deux vîtesses composantes savoir, $u \cos.\phi$ et $u \sin.\phi$ respectivement parallèle et perpendiculaire au plan choqué (A) et dirigées dans le plan (B) ; la composante $u \sin.\phi$ est celle à laquelle est due la force du choc qui a pour mesure la quantité de mouvement $mu \sin.\phi$, et qui n'éprouve aucune altération de la part de la composante $mu \cos.\phi$. L'impulsion que m reçoit au moment du choc, en vertu de son élasticité, pour s'éloigner du plan choqué, est donc, art. 747, égale à $n.mu \sin.\phi$, et la vîtesse, due à cette impulsion, a pour valeur $nu \sin.\phi$.

La première composante $u \cos.\phi$ n'est, en aucune manière, modifiée par le choc, qui n'a d'effet que dans le sens normal au plan choqué, on peut donc, au moment où ce choc est effectué, considérer m comme livrée aux actions simultanées de deux puissances capables de lui imprimer, l'une une vîtesse $nu \sin.\phi$ perpendiculairement au plan choqué, et l'autre une vîtesse $u \cos.\phi$ suivant une ligne dirigée dans ce même plan.

La vîtesse résultante, désignée par v, aura pour valeur

$$(1) \ldots\ldots v = u\sqrt{n^2 \sin.^2 \phi + \cos.^2 \phi}\ ;$$

et l'angle ϕ' formé, après le choc, par le plan choqué et par la ligne du mouvement comprise dans le plan (B) perpendiculaire au plan choqué (A), se calculera par l'équation

$$\text{tang.}\, \phi' = n\ \text{tang.}\, \phi.$$

772. Le mobile perd, généralement, par l'effet du choc une partie de la vîtesse dont il jouissait avant le choc, et qui a pour valeur, $u - v = u\left\{1 - \sqrt{n^2 \sin.^2 \phi + \cos.^2 \phi}\right\}$. Dans le cas de l'élasticité nulle, on a $n = 0$ et $u - v = u\,(1 - \cos.\,\phi) = u \sin.$ verse ϕ; ce cas donne le maximum de perte de vîtesse. Cette perte diminue à mesure que l'élasticité du mobile augmente et se réduit à zéro lorsque cette élasticité est parfaite, puisqu'on a alors $n = 1$ et par conséquent $u - v = 0$, ou $u = v$.

773. Les angles que la direction du mouvement forme, avant et après le choc, avec le plan choqué, s'appellent, respectivement, ***angle d'incidence*** et ***angle de réflexion***. Ces deux angles sont généralement différents l'un de l'autre; la valeur de l'angle de réflexion dont la tangente est proportionnelle au degré d'élasticité, varie entre zéro et la valeur ϕ de l'angle d'incidence qu'elle ne peut pas surpasser. La valeur zéro a lieu lorsque l'élasticité est nulle c'est-à-dire lorsque $n = 0$, et dans le cas de l'élasticité parfaite qui donne $n = 1$, on a $\phi' = \phi$, l'***angle d'incidence*** est égal à l'***angle de réflexion***.

Mouvement d'un point matériel pesant sur un plan incliné, tant en faisant abstraction du frottement, qu'en ayant égard à cette résistance.

774. Un point matériel pesant étant posé sur un plan incliné, et aban-

[redacted]

instant ; d'où il suit qu'en faisant passer par le point de départ un plan perpendiculaire aux horizontales menées sur le plan incliné, le mobile ne sortira pas de la ligne d'intersection de ces deux plans.

Cette détermination est indistinctement applicable au cas où le frottement est nul et à celui où le frottement existe, puisque cette résistance n'a d'effet à chaque instant que dans le sens actuel du mouvement.

775. Il s'agit maintenant de trouver la loi du mouvement sur la ligne déterminée dans l'article précédent. J'appelle m le point matériel mobile, θ l'angle formé par le plan incliné et par le plan horizontal, t le temps écoulé depuis le commencement du mouvement, x l'espace que m parcourt pendant le temps t, ϕ et v, respectivement, la force accélératrice et la vîtesse, au bout de ce temps, du mobile m qui est supposé être dans l'état de repos, lorsqu'on a $t=0$ et $x=0$; la force accélératrice due à la pesanteur, dans le cas de la chute verticale, continuera à être représentée par la lettre g.

Si le mobile descendait librement le long de la verticale menée par son point de départ, il recevrait, à chaque instant, un incrément de vîtesse gdt; cet incrément de vîtesse lui est aussi imprimé sur le plan incliné, mais la résistance de ce plan et le frottement lui en font perdre une partie. Faisant d'abord abstraction du frottement, je puis, conformément aux principes précédemment établis, décomposer la vîtesse élémentaire gdt en une vitesse gdt sin. θ, dirigée suivant la ligne du mouvement, et en une vîtesse gdt cos. θ dirigée suivant une perpendiculaire à cette ligne du mouvement et au plan incliné. Cette dernière vîtesse élémentaire et la force motrice qui en résulte ne peuvent, par conséquent, produire aucun changement dans la vîtesse actuelle du corps, et sont détruites par la résistance du plan incliné. La seule force accélératrice qui ait lieu dans le sens du mouvement est donc g sin. θ, d'où

$$\phi = g \sin. \theta.$$

La force motrice $m\phi$, qui modifie continuellement le mouvement du corps, est une quantité constante $= mg$ sin. θ, d'où il suit que ce mouvement est uniformément accéléré.

776. La relation entre la vîtesse et le temps se déterminera en substituant, dans l'équation précédente, à ϕ sa valeur $\frac{dv}{dt}$ et intégrant, ce qui, dans l'hypothèse des valeurs initiales $v=0$ et $t=0$, donne

(1) . . . . $v = gt \sin.\theta$;

Substituant ensuite à v sa valeur $\frac{dx}{dt}$ et intégrant dans l'hypothèse des valeurs initiales $t = 0$ et $x = 0$, on a

(2) . . . . $x = \frac{1}{2} g t^2 \sin.\theta$,

enfin on déduit de la combinaison des deux équations précédentes

$$(3) \ldots\ldots \begin{cases} v = \sqrt{2gx \sin.\theta}; \\ x = \dfrac{v^2}{2g \sin.\theta}. \end{cases}$$

Les phénomènes du mouvement sont exactement identiques avec ceux qui auraient lieu dans le cas de la chute libre verticale, si l'intensité de la force constante de la pesanteur était diminuée dans le rapport de $1 : \sin.\theta$.

777. Supposons maintenant que le corps m reçoive une impulsion qui tende à lui faire remonter le plan incliné, et qui lui imprime, parallèlement à ce plan et perpendiculairement aux horizontales qu'il renferme, une vîtesse initiale U, (le corps est censé se trouver dans l'état de repos lorsque l'impulsion lui est donnée) la force accélératrice $g \sin.\theta$ deviendra une force retardatrice ; on aura, v étant la vîtesse au bout du temps t, $\frac{dv}{dt} = -g \sin.\theta$ d'où, en observant que l'état initial donne $t = 0$ et $v = U$,

(1) . . . . $v = U - gt \sin.\theta$,

ensuite x étant la distance du mobile à son point de départ au bout du temps t, on a en substituant, pour v, sa valeur $\frac{dx}{dt}$

plan incliné, en supposant, conformément à ce qui a été expliqué art. 612 et suivants, que cette résistance est égale au produit de la pression normale par un nombre constant f déduit de l'observation. D'après les principes précédemment posés, la pression normale a, pour mesure, dans le cas actuel, la quantité de mouvement élémentaire $mgdt \cos. \theta$ imprimée à m perpendiculairement au plan incliné, et fait par conséquent varier à chaque instant, de $fmgdt . \cos. \theta$, la quantité de mouvement effective du mobile dans le sens de la ligne parcourue. Appliquant d'abord cette détermination au cas du mouvement de descente on aura, pour la valeur de la quantité de mouvement élémentaire imprimée à chaque instant au mobile dans le sens de la ligne parcourue, $mgdt \sin. \theta - fmgdt \cos. \theta$. La différentielle de la vîtesse sera donc $gdt\,(\sin. \theta - f \cos. \theta)$ et la force accélératrice $g(\sin. \theta - f \cos. \theta)$. En substituant cette expression à $g \sin. \theta$, dans les équations de l'art. 776, on aura celles qui donnent les relations entre x, v et t, eu égard au frottement, savoir :

$$(1) \ldots\ldots \begin{cases} v = gt\,(\sin. \theta - f \cos. \theta); \\ x = \frac{1}{2} gt^2\,(\sin. \theta - f \cos. \theta); \\ v = \sqrt{2gx\,(\sin. \theta - f \cos. \theta)}; \\ x = \dfrac{v^2}{2g\,(\sin. \theta - f \cos. \theta)}. \end{cases}$$

dans le cas du mouvement d'ascension, la vîtesse initiale étant U, comme à l'article précédent ; on a $dv = -gdt(\sin. \theta + f \cos. \theta)$ parce que la pesanteur et le frottement se réunissent pour diminuer la vîtesse v qui a lieu au bout du temps t ; il faut donc, alors, substituer, dans les équations de l'article cité, $g\,(\sin. \theta + f \cos. \theta)$ à $g \sin. \theta$, ce qui donne

$$(2) \ldots\ldots \begin{cases} v = U - gt\,(\sin. \theta + f \cos. \theta); \\ x = Ut - \frac{1}{2} gt^2\,(\sin. \theta + f \cos. \theta); \\ v^2 = U^2 - 2gx\,(\sin. \theta + f \cos. \theta); \\ x = \dfrac{U^2 - v^2}{2g\,(\sin. \theta + f \cos. \theta)} \end{cases}$$

Les équations (1) seraient celles du mouvement libre de descente verticale, qui aurait lieu si la pesanteur était diminuée dans le rapport de $1 : (\sin. \theta - f \cos. \theta)$; et les équations (2) seraient celles d'un

mouvement libre d'ascension verticale, dans l'hypothèse où ce rapport de diminution serait celui de 1 : (sin. $\theta + f$ cos. θ); il est à remarquer que l'introduction du frottement, dans l'analyse, rend la valeur numérique de la force accélératrice applicable à la descente, différente de celle de la force retardatrice qui s'applique à la montée, ces valeurs numériques étant égales entr'elles lorsqu'on fait abstraction du frottement. Cette circonstance tient à ce que le sens suivant lequel la résistance du frottement a son effet dépend de celui du mouvement du mobile auquel il est toujours opposé, ce qui présente un cas semblable à celui dont il a été question, art. 739 et 744, à l'occasion du mouvement vertical d'un corps dans un milieu résistant.

Propriétés du mouvement d'un corps pesant sur un plan incliné.

779. Dans le cas du mouvement de descente auquel se rapportent les équations de l'art. 776, lorsque le mobile a parcouru la longueur x sur le plan incliné, il s'est abaissé verticalement au-dessous de son point de départ, d'une hauteur x sin. θ et s'il fut tombé librement de cette hauteur dans une direction verticale il aurait, art. 708, acquis une vîtesse $= \sqrt{2g . x \sin. \theta}$; mais c'est là, précisément, la valeur de la vîtesse qu'il a acquise dans son mouvement sur le plan incliné, donc « sa vîtesse à chaque instant, sur ce plan, est *due* à la hauteur qui mesure son abaissement vertical au-dessous de son point de départ. » Il faut se rappeler que la vîtesse initiale a été supposée nulle.

780. Dans le cas du mouvement d'ascension, dont les équations ont été données art. 777, la vîtesse initiale U du mobile est entièrement

[redacted]

monte ou descend la ligne parcourue sur ce plan, et, comme tous les résultats précédents sont indépendants de l'inclinaison θ, on peut dire généralement « que deux plans fixes horizontaux étant placés à une dis- « tance verticale H l'un de l'autre, si un point matériel pesant passe « du plan supérieur au plan inférieur le long d'une droite formant un « angle quelconque avec ces plans, droite dont la longueur se trouve par « conséquent arbitraire, il aura acquis, en arrivant au plan inférieur, une « vîtesse due à la distance verticale H; et ce mobile pourra remonter, le « long de cette ligne, du plan inférieur au supérieur, si on lui imprime « une vîtesse initiale, dans le sens de la même ligne, due à la hauteur H, « laquelle vîtesse sera éteinte à son arrivée au plan supérieur» je ferai voir, par la suite que ces propriétés ont encore lieu si le mobile au lieu de parcourir une ligne droite, entre les deux plans, parcourt une courbe continue quelconque.

782. Voici une autre propriété liée à la théorie du *tautochronisme* et découverte par Galilée avant qu'il fut question, parmi les géomètres, des courbes *Tautochrones* dont je parlerai dans la 2e. section de cette 2e. partie du cours. Si, dans l'hypothèse de la descente du mobile le long du plan incliné, traitée à l'article 776, on mène par le point où ce mobile se trouve au bout du temps t une perpendiculaire sur la ligne x parcourue, qui aille rencontrer la verticale menée par l'origine supérieure de la même ligne x, la distance entre cette origine et le point de rencontre aura, pour valeur, $\frac{x}{\sin.\theta}$, et le temps qu'un grave employerait pour descendre librement de cette hauteur verticale $\frac{x}{\sin.\theta}$ serait, art. 708, $\sqrt{\frac{2x}{g\sin.\theta}}$; ce temps serait donc, art. 776, égal à celui que le corps a employé pour parcourir la ligne x le long du plan incliné.

Si dans le plan vertical, qui renferme x et la verticale menée par l'origine de cette même longueur x, on construit un demi-cercle dont cette origine soit le point supérieur, et dont le diamètre soit vertical et égal à $\frac{x}{\sin.\theta}$, l'espace parcouru x sera une corde de ce demi-cercle; le mobile m étant ensuite supposé parcourir, en vertu de la pesanteur, une autre corde quelconque de ce demi-cercle, menée

par son point supérieur, si on observe que la perpendiculaire à cette seconde corde, menée par son point inférieur dans le plan du cercle, passe aussi par l'extrémité inférieure du diamètre vertical, on aura, entre les temps respectivement nécessaires pour parcourir la nouvelle corde et pour descendre librement le long du diamètre, le même rapport d'égalité que présentait le mouvement sur la première corde, ce qui fournit le théorême suivant « un demi-cercle étant construit sur un diamètre vertical, le temps employé par un grave à descendre librement « le long de ce diamètre, est égal au temps pendant lequel ce grave « parcourrait une corde quelconque menée par le point supérieur « du demi-cercle s'il glissait le long de cette corde en vertu de sa « pesanteur. »

Mouvement de deux points matériels pesants, posés sur des plans inclinés adossés et liés l'un à l'autre, en ayant, ou non, égard à la résistance du frottement.

783. Je désigne par m' et m'' deux points matériels, ou corps mobiles pesants, posés sur des plans inclinés adossés, qui ont une hauteur et une base commune, et auxquels on peut substituer, si l'on veut, deux lignes situées dans un plan vertical ayant leurs extrémités inférieures sur une même horizontale, et se coupant au-dessus de cette horizontale en un point où se trouve le sommet commun. Je suppose que l'horizon forme un angle θ' et un angle θ'', respectivement, avec le plan, ou la ligne inclinée, qui supporte m' et m''; un fil inextensible parfaitement flexible et dont je négligerai la pesanteur, dans ce premier problême, lie m' à m'', en passant par le sommet commun,

[redacted]

tité de mouvement du systême, à l'instant dont il s'agit, sera égale à la quantité de mouvement élémentaire qu'acquerrait le même systême, en supposant les corps m' et m'', qui le composent, juxta-posés et animés, en sens contraires, des vîtesses élémentaires respectives gdt sin. θ' et gdt sin. θ''. J'ai fait voir que cette quantité de mouvement de la masse $m' + m''$ aurait pour valeur $m'gdt$ sin. $\theta' - m''gdt$ sin. θ'' ou $gdt\,(m' \sin.\theta' - m'' \sin.\theta'')$, quantité positive si on a m' s. $\theta' > m''$ s. θ''; cette dernière condition sera censée avoir lieu, et, en désignant par A, B et C, respectivement, le point inférieur du plan incliné qui porte m'', le sommet commun, et le point inférieur de l'autre plan incliné, la vîtesse positive sera prise dans le sens ABC.

Il suit de ce qui précède qu'en appelant v la vîtesse au bout du temps t, la variation dv de cette vîtesse sera égale à $\frac{gdt\,(m' \sin.\theta' - m'' \sin.\theta'')}{m' + m''}$, et qu'en désignant, par ϕ, la force accélératrice commune, on aura

$$\phi = \frac{g\,(m' \sin.\theta' - m'' \sin.\theta'')}{m' + m''}.$$

La valeur de cette force accélératrice a la même forme que celle de la vîtesse commune de deux corps durs, lorsque ces corps se sont choqués en sens directement opposés, parceque l'une et l'autre valeur sont obtenues par des considérations exactement semblables.

784. Substituant, pour ϕ, dans l'équation précédente, sa valeur $\frac{dv}{dt}$, on a par l'intégration l'expression de v en t; substituant ensuite, dans l'équation entre v et t, pour v sa valeur $\frac{dx}{dt}$ (x est l'espace parcouru par chacun des corps pendant le temps t), on a, par une seconde intégration, l'expression de x en t, et, par suite, la relation entre x et v.

On peut, au lieu de faire les calculs que je viens d'indiquer, observer que le mouvement du systême, considéré quant à la relation entre x, v et t est le même que celui d'une masse composée de l'agrégation des deux masses m' et m'', qui se mouvrait d'un mouvement de descente vertical et libre dans l'hypothèse où la force de la pesanteur serait di-

minuée et réduite à la partie $\frac{m' \sin.\theta' - m'' \sin.\theta''}{m' + m''}$ de son intensité naturelle ; il suffit donc, pour déterminer les lois du mouvement avec la condition des valeurs initiales $t = 0$, $v = 0$, $x = 0$, de substituer, dans les équations de l'art. 708, $v = gt$; $x = \frac{1}{2}gt^2$; $x = \frac{v^2}{2g}$, la quantité $\frac{m' \sin.\theta' - m'' \sin.\theta''}{m' + m''} g$ à la quantité g, ce qui donne

$$(1) \ldots\ldots v = \frac{m' \sin.\theta' - m'' \sin.\theta''}{m' + m''} gt;$$

$$(2) \ldots x = \frac{1}{2} \cdot \frac{m' \sin.\theta' - m'' \sin.\theta''}{m' + m''} gt^2;$$

$$(3) \ldots v = \sqrt{\left(\frac{2(m' \sin.\theta' - m'' \sin.\theta'')}{m' + m''} gx\right)}.$$

Le cas où on a $m' \sin.\theta' = m'' \sin.\theta''$ rend la force accélératrice du système nulle, et c'est le cas d'équilibre de l'art. 532, lequel a lieu lorsque les poids sont en raison réciproque des longueurs des plans inclinés qui les supportent (voyez l'article cité).

785. Lorsqu'on veut avoir égard à la résistance du frottement il faut diminuer la quantité de mouvement élémentaire $gdt(m' \sin\theta' - m'' \sin\theta'')$ qui, abstraction faite de cette résistance, produirait la variation de la vitesse commune, d'une partie des quantités de mouvement élémentaires auxquelles sont dues les pressions normales aux plans inclinés, laquelle partie, d'après les déterminations précédentes, art. 778, a pour valeur

[redacted]

Application de la théorie exposée dans le chapitre précédent à la solution d'un problême qui rend sensible la différence dés effets de la *percussion* à ceux de la *pression*. Détails à ce sujet.

786. La valeur de la vîtesse v art. 784 a été déduite de l'équation $\frac{dv}{dt} = \frac{m' \sin. \theta' - m'' \sin. \theta''}{m' + m''} g$, en se donnant, pour condition, que la vîtesse initiale était nulle ; on peut faire, sur cette vîtesse initiale, une hypothèse qui rendra très-sensible la différence des effets de la *percussion* à ceux de la *pression*. Je continue à supposer, comme à l'article cité, que $m' \sin. \theta' > m'' \sin. \theta''$ et qu'ainsi, abstraction faite de toute force étrangère à celle de la pesanteur, le poids m' est prépondérant et doit en descendant sur son plan incliné c'est-à-dire, en marchant dans le sens BC, faire monter m'' vers le sommet commun des deux plans, ou le faire mouvoir dans le sens AB (voyez art. 783 les positions des lettres A, B, C); mais, si au premier instant du mouvement m'' reçoit dans le sens BA une impulsion capable de lui imprimer une vîtesse finie u, à ce premier instant le système acquerra les quantites de mouvement $m'' u + m'' g dt \cdot \sin. \theta''$ dans le sens BA et $m' g dt \sin. \theta'$ dans le sens BC; la vîtesse résultante aura, pour valeur, art. 758, $\frac{m''(u + gdt \cdot \sin. \theta'') - m' gdt \sin. \theta'}{m' + m''}$, ou $\frac{m'' u}{m' + m''}$, dans le sens CBA contraire au sens du mouvement résultant de l'action de la pesanteur d'après la condition $m' \sin. \theta' > m'' \sin. \theta''$. Il faut donc, pour avoir égard à cette circonstance, déterminer la constante arbitraire dans l'intégrale $v = C + \frac{(m' \sin. \theta' - m'' \sin. \theta'') gt}{m' + m''}$ de l'équation $\frac{dv}{dt} = \frac{m' \sin. \theta' - m'' \sin. \theta''}{m' + m''} g$, en posant les équations simultanées $t = 0$, $v = -\frac{m'' u}{m' + m''}$, ce qui donne $C = -\frac{m'' u}{m' + m''}$, et

$$v = \frac{(m' \sin. \theta' - m'' \sin. \theta'') gt - m'' u}{m' + m''}.$$

787. On voit par cette équation que, quelque soit la prépondérance du poids m' sur le poids m'' ou la différence entre m' sin. θ' et m'' sin. θ'', la plus petite quantité de mouvement finie imprimée à m'' doit, pendant un temps fini, empêcher l'effet de cette prépondérance, et faire mouvoir le système dans un sens contraire à celui qu'aurait son mouvement en vertu de l'action continue et nuancée de la pesanteur. Mais cette dernière force, après avoir, d'abord, cédé à l'impulsion brusque donnée au système, détruit ensuite, par des gradations insensibles, l'effet de cette impulsion, de manière que, lorsque t a acquis une valeur telle qu'on a $(m' \sin. \theta' - m'' \sin. \theta'')\, gt - m''u = 0$, ce qui donne $t = \dfrac{m''\, u}{(m' \sin. \theta' - m'' \sin. \theta'')\, g}$, la vîtesse initiale rétrograde, ou négative, est entièrement éteinte, et le système commence à se mouvoir comme s'il partait de l'état de repos ou qu'il fût abandonné à l'action naturelle de la pesanteur sans vîtesse initiale.

788. Pour présenter les résultats précédents sous la forme la plus simple, on peut supposer que les angles θ' et θ'' sont deux angles droits, ou que les corps m' et m'' sont attachés aux extrémités des deux parties verticales d'un même fil qui passe sur la gorge d'une poulie dont l'axe est fixe et horizontal; supposant, de plus, qu'au premier instant, le corps m', dont le poids est censé surpasser celui de m'', et ce corps m'', sont dans un même plan horizontal, où se trouve l'origine de x, (les x positives se comptant au-dessous de ce plan du côté de m', ou au-dessus du même plan du côté de m'') et qu'enfin à ce même premier instant le poids m'' tombe d'une hauteur h, ce qui donne $um'' = m'' \sqrt{2gh}$, valeur de la quantité de mouvement initiale imprimée au système, dans un sens contraire à celui du mouvement que prendrait ce système en vertu de

quelque soit la petitesse de m'' par rapport à m', ce dernier qui devrait naturellement descendre, vu sa prépondérance, n'en sera pas moins obligé de remonter pendant un certain temps égal à $\frac{um''}{g(m'-m'')}$, jusqu'à une hauteur $-\frac{m''^2 h}{m'^2-m''^2}$; ce temps et cette hauteur pourront être d'une petitesse extrême, qui rendra leurs évaluations impossibles par la voie de l'observation, mais ils auront toujours des valeurs finies.

Soient, par exemple, $m''=\frac{m'}{100000}$ et $h=\frac{1}{2}g$, d'où $u=g$; le temps de l'ascension de m' aura pour valeur une fraction de seconde $=\frac{1''}{99999}$ (sexagésimale ou décimale suivant que g se rapportera à la division du jour moyen en 86400 ou en 100000 parties) et la hauteur de son élévation sera égale à $\frac{\frac{1}{2}g}{9999999999}$, ce qui, pour la plus forte des deux évaluations de g, ne fait pas la deux millionième partie d'un millimètre; ces quantités, que le calcul apprécie, ne peuvent être mesurées par aucun moy enmécanique.

789. Ces résultats rendent sensibles les relations qui existent entre les effets de la *percussion* et ceux de la *pression*, relations qui ont été d'ailleurs complétement établies par les notions précédemment données. ainsi une force de *percussion*, quelque petite qu'elle soit par rapport aux forces de son ordre, doit toujours l'emporter sur la plus grande force de *pression*; d'un autre côté, cette dernière peut, en exerçant une action *continue*, atténuer graduellement l'effet de la première et le détruire enfin, mais cette destruction d'effet n'a lieu qu'au bout d'un temps fini.

Les détails dans lesquels je viens d'entrer fournissent le moyen de rapporter à des notions exactes certaines propositions qui paraissent manquer de justesse et qui en manquent, même effectivement, si on les prend dans le sens littéral que quelques personnes leur attribuent.

On trouve par exemple, dans des ouvrages qui traitent de l'art des *constructions*, des procédés pour *peser* le coup d'un *mouton de sonnette* sur la tête d'un *pieu*, celui d'un marteau employé à enfoncer un clou dans une planche, etc. Gautier, dans son *traité des*

ponts , mesure le *poids* du coup de marteau, par celui d'un corps qui, posé sur la tête du clou, ferait pénétrer sa pointe dans la planche, à la même profondeur que ce coup de marteau ; (*) pour ramener l'as-

(*) « Il n'y a pas de doute, dit-il, que la pesanteur du corps de l'un sans « mouvement, ne soit en raison réciproque à la vitesse du coup de marteau « de l'autre. » Malgré le peu de netteté de cette énonciation, on voit que l'auteur établit un rapport entre des quantités de l'ordre *mgdt* et des quantités de l'ordre *MV*, sans même rien statuer sur la valeur de la masse *M*. L'ouvrage de Gautier est du commencement du 18e. siècle ; les principes sur la *loi de continuité* dans les effets des forces motrices, quoique bien établis dès le commencement du 17e. siècle, ont encore été longtemps méconnus par des ingénieurs et des savants recommandables d'ailleurs. Mariotte dit avoir éprouvé qu'un cylindre de verre, de deux lignes de diamètre, était écrasé, dans le sens de son diamètre, soit par une *pression* de 400 livres, soit par le *choc* d'une masse de fer du poids de 2 livres 2 onces, tombant de 7 pouces de hauteur ; et se fondant sur cette expérience, dans laquelle il faisait un rapprochement semblable à celui de Gautier, cité dans le texte, il en concluait, à une époque où les découvertes de Galilée étaient publiques depuis plusieurs années, qu'un corps livré à la seule action de la pesanteur avait, dès le premier instant de sa chute, une vitesse finie d'environ quatre lignes. Il donne cette expérience à l'appui de la proposition XI de son *traité de la percussion* ainsi conçue : « Un corps qui tombe « dans l'air libre, commence à tomber avec une vitesse déterminée et *qui n'est « pas infiniment petite ;* c'est-à-dire qu'elle est telle qu'il y en peut avoir de « moindres en différents degrés, car (ajoute-t-il aussitôt après) il est impos- « sible qu'un mouvement soit sans une vitesse déterminée, et entre le mouve- « ment et le repos il n'y a point de milieu ; donc, sitôt qu'il est en mouvement, « il a une certaine vitesse. » Cet exemple, celui de Descartes que j'ai cité, à propos des lois de la communication du mouvement, et d'autres que je pourrais y joindre, font voir combien les vérités naissantes, les plus simples ,

section à une énonciation précise, il faut dire que si une masse de fer *m*, animée d'une vîtesse $\sqrt{2gh}$, due à une certaine hauteur *h*, et frappant le clou avec cette vîtesse, ou, ce qui revient au même, tombant de la hauteur *h* sur la tête du clou, fait enfoncer sa pointe à une certaine profondeur *z*, on pourra toujours assigner un poids *p* qui, posé immédiatement sur la tête du clou, sans vîtesse initiale, le ferait enfoncer à la même profondeur. Dans ce sens la proposition est vraie et on peut déterminer, par expérience, un nombre indéfini de masses m', m'', etc. qui tombant des hauteurs h', h'', etc. opéreraient des enfoncements z', z'' etc. respectivement égaux à ceux qu'on obtiendrait par la simple superposition des poids p', p'', etc. Or si l'on ne considère, dans les comparaisons à établir, que les *effets* des causes motrices, relatifs aux enfoncements totaux du clou, (les enfoncements qui ont lieu aux instants où son mouvement se trouve éteint) on pourra, sous cet aspect particulier, et pour abréger le discours, dire qu'il y a des percussions *équivalentes* à des pressions ; mais il ne faut pas perdre de vue que l'*identité* ainsi prononcée et qui ne porte que sur un des phénomènes particuliers du mouvement du clou, dans chacun de ses enfoncements, (le seul, à la vérité, qu'on puisse communément observer) ne suppose nullement que des quantités de la forme $m\phi dt$ et MV sont comparables et n'établit la comparaison qu'entre les quantités $\int(m\phi dt)$ et MV. C'est ce que rend manifeste l'examen des circonstances physiques qui accompagnent l'enfoncement du clou ; ce corps, depuis le moment où il commence à être ou *frappé* ou *pressé*, jusqu'à celui où il parvient à son maximum d'abaissement, se meut, pendant un temps fini, et ordinairement très-court, d'un mouvement varié, dans lequel la résistance de la matière qu'il pénètre fait la fonction d'une force retardatrice, qui, au bout de ce temps fini, après avoir détruit, *graduellement* la vîtesse finie engendrée, soit au commencement du mouvement (dans le cas de la percussion initiale), soit pendant la durée de ce mouvement (dans le cas d'un poids superposé au premier instant), fait enfin équilibre aux forces accélératrices qui tendraient à perpétuer ou à faire renaître ce mouvement ; ce qui s'applique également, tant au cas où le marteau et le clou seraient censés être des corps *parfaitement durs* qu'à celui (qui est le cas de la nature) d'un certain degré de compressibilité et d'élasticité de ces deux corps ; dans ce dernier cas, et dans celui d'un poids

trice moindre que la force accélératrice naturelle, qui permette d'observer, pendant la durée du mouvement, les espaces parcourus et les temps correspondants, et de compter leurs nombres respectifs d'unités. On rend ainsi sensibles et mesurables des phénomènes dont on conclut les lois auxquelles le mouvement libre des graves est soumis, près de la surface de la terre ; je ferai voir, dans la suite du cours, comment on peut faire entrer en considération, dans ces évaluations, le poids du fil, la masse de la poulie et la résistance de l'air, quoique, d'après la disposition des parties de l'appareil et la lenteur des mouvements, ces causes d'anomalie aient peu d'influence sur les résultats ; il est certain que, même sans y avoir égard, on a, sur le mouvement des graves, des déterminations d'une exactitude bien supérieure à celles qu'on a voulu obtenir dans les premiers temps où ces sortes de recherches ont occupé les savants, soit en faisant tomber librement des corps dans l'atmosphère, soit en les faisant descendre le long de plans inclinés, droits ou contournés en volutes hélicoïdales.

792. Soit m la plus petite des masses m' et m'', et ω l'excès de la plus grande sur la plus petite ; les formules de l'article précédent deviendront

$$\phi = \frac{\omega}{2m+\omega}\cdot g;\ v = \frac{\omega}{2m+\omega}\,gt = \sqrt{\frac{2\omega g x}{2m+\omega}};\ x = \tfrac{1}{2}gt^2\,\frac{\omega}{2m+\omega}$$

et donneront bientôt lieu, sous cette forme, à des remarques importantes. L'objet spécial de la machine d'Atwood est de vérifier l'équation $x = \frac{1}{2}gt^2\,\frac{\omega}{2m+\omega}$, et lorsque cette équation est vérifiée la théorie entière du mouvement se trouve établie.

Récapitulation des principes généraux de la Dynamique.

la 86400e. partie du jour moyen, mais l'unité la plus convenable à ce système serait la 100000e. partie du jour moyen; ces unités sont, respectivement, désignées par les noms de *seconde sexagésimale* et *seconde décimale* (art. 671 et suivants).

795. On employe continuellement en Dynamique les expressions *temps multiplié par un espace, temps divisé par un espace,* ou *espace divisé par un temps;* il faut d'abord avoir une notion précise du sens a attribuer à ces expressions, qui n'indiquent, réellement, que des opérations faites sur des nombres abstraits (voyez l'art. 678).

796. Un point matériel, qui décrit une certaine ligne en se mouvant, parcourt, sur cette ligne, des *espaces* qui ont certaines relations avec les *temps* employés à les parcourir, le mot *relation* étant pris dans l'acception indiquée à l'art. précédent. Supposant que la ligne décrite soit droite, prenant sur cette ligne un point fixe pour origine de la longueur variable x, qui détermine la position du point mobile, et désignant par t le temps au bout duquel ce mobile se trouve à l'extrémité de cette longueur x, on a généralement $x=f(t)$, f étant le signe de *fonction*. La relation $x=f(t)$ peut être considérée, ou comme une donnée par le fait, ou comme une hypothèse, abstraction faite des forces auxquelles le mouvement est dû. Il est utile et même indispensable, avant de passer à la considération des causes motrices, de s'occuper d'abord, sous le point de vue que je viens d'indiquer, du symbole général d'équation $x=f(t)$, de classer les divers mouvements qui en sont des cas particuliers, et d'avoir les expressions de quelques quantités *caractéristiques* relatives aux phénomènes de ces mouvements. Sans cet examen et ce classement préalable des phénomènes dûs aux causes motrices, les raisonnements sur ces causes seraient nécessairement vagues et obscurs, puisqu'on ne peut les connaître, les comparer entr'elles, les *mesurer* que par leurs *effets* (art. 677).

797. Les quantités *caractéristiques* dont je viens de parler, qui tiennent aux propriétés générales d'un mouvement quelconque, se déduisent des propriétés particulières à deux mouvements qu'on peut appeler *élémentaires*, dont on doit d'abord donner l'analyse complète. Le premier de ces mouvements *élémentaires* se rapporte au cas le plus simple de l'équation $x=f(t)$, celui qui doit, à tous égards, être considéré le premier, et qui donne la relation $x=E+Vt$ (article

680). Les espaces parcourus $x - E$ sont proportionnels aux temps employés à les parcourir. Le mouvement, dont cette équation exprime la loi, s'appelle *mouvement uniforme*, et tout mouvement qui n'est pas uniforme s'appelle *mouvement varié*.

Le coëfficient V du temps t est la valeur de l'espace parcouru pendant chaque unité de temps en vertu du mouvement uniforme; c'est une quantité *caractéristique* qui distingue un *mouvement uniforme* de toute autre mouvement du même genre; on la nomme *vîtesse*; elle se déduit de la connaissance d'un espace X, parcouru pendant un temps T, au moyen de l'équation $V = \frac{X}{T}$, qui donne, en général, l'une des trois quantités V, X et T par les deux autres (art. 687 et 688).

798. Lorsqu'on a donné la notion de la *vîtesse* dans le *mouvement uniforme*, une détermination importante et fondamentale est celle d'une quantité à laquelle cette notion puisse convenir et qui appartienne à un *mouvement varié* quelconque. On s'assure de l'existence de cette quantité en considérant que dans toute loi possible qui lie les espaces parcourus aux temps, le rapport d'un espace ε au temps τ employé à parcourir cet espace approche d'autant plus d'être exprimé par une équation de la forme $a\varepsilon + b\tau = 0$, (a et b étant des constantes par rapport à ε et τ) que ε et τ sont des quantités plus petites. Cette proposition peut se déduire d'un théorême, bien connu des analystes, qui, lorsque ε et τ ont leurs origines respectives, l'un à l'extrémité de x et l'autre au bout du temps t, x et t étant liés par l'équation $x = f(t)$, donne la valeur générale $\frac{\varepsilon}{\tau} = f'(t) + \frac{1}{2}\tau f''(t + \lambda\tau)$ dans laquelle

rait à se mouvoir si, tout-à-coup, les causes qui font varier son mouvement cessoient d'agir; et on rapportera cette proposition à des termes précis en disant qu'un mouvement exprimé par l'équation $x=f(t)$ deviendra uniforme à l'instant qui termine le temps t, avec la vîtesse $\frac{dx}{dt}$, si à cet intant les causes motrices subissent des changements tels que dans l'équation $\varepsilon=\tau f'(t)+\frac{1}{2}\tau^2 f''(t+\lambda\tau)$, déduite de la précédente, le terme $f''(t+\lambda\tau)$ se réduise à zéro, ce qui peut avoir lieu soit par la suppression des forces soit par leur équilibre (art. 694).

800. Un mouvement varié est dit *accéléré* ou *retardé* suivant que $\frac{dx}{dt}$ augmente ou diminue dans les instants successifs de sa durée; il peut se faire que ce mouvement, sans cesser d'être exprimé par une même équation, soit alternativement *accéléré* et *retardé* ou réciproquement (art. 682).

801. L'expression générale de la vîtesse fournit le moyen d'appliquer l'analyse au second des mouvements *élémentaires* dont il a été question au commencement de l'art. 797. Ce mouvement est celui, dans lequel la relation de la vîtesse au temps est la même que celle de l'espace parcouru au temps dans le premier mouvement *élémentaire*, celui qui a le nom de *mouvemement uniforme*; on a donc, dans ce cas, $v=U\pm gt$ d'où on déduit $x=E+Ut\pm\frac{1}{2}gt^2$. Ce mouvement s'appelle *mouvement uniformément varié* et le signe supérieur ou inférieur du terme multiplié par g s'applique respectivement au cas où ce mouvement est accéléré et à celui où il est retardé (art. 696 et 697).

802. La quantité g est ici une quantité *caractéristique* correspondante à la *caractéristique* V du mouvement uniforme; c'est la vîtesse acquise ou perdue par le mobile pendant chaque unité de temps; elle distingue un mouvement uniformément varié de tout autre mouvement de même espèce; on lui a donné le nom de *force accélératrice*, et, cependant, cette dénomination est, tout-à-fait, indépendante de la considération de la force motrice et ne porte que sur la considération immédiate des *effets* ou phénomènes dûs à cette cause (art. 698 et 705).

803. L'analyse des propriétés du mouvement uniformément varié est doublement importante et par les conséquences qu'on en tire pour la théorie générale, et par l'exemple remarquable que la nature nous offre

de ce mouvement, dans les phénomènes de la chute des graves, phénomènes qui fournissent des quantités *absolues* très-utiles pour la comparaison et la mesure des forces. L'expression de la *vîtesse due à une hauteur,* et sa réciproque, qu'on en déduit, s'employent fréquemment dans l'analyse des problêmes de mécanique (art. 707 et suivants).

804. La même marche de raisonnement suivie, art. 692 et 798, pour arriver de la notion de la *vîtesse*, dans le mouvement uniforme, à celle de la *vîtesse* dans un mouvement quelconque, peut s'employer pour passer de la notion de la *force accélératrice* dans le *mouvement uniformément varié,* à celle d'une quantité analogue dans le mouvement *varié* suivant une loi quelconque. On remarquera que, dans le symbole général d'équation $v = f'(t)$ entre la vîtesse et le temps, si on désigne par Δv la quantité dont v varie, pendant un temps τ qui a pour origine la fin du temps t, l'équation entre Δv et τ approchera d'autant plus d'être de la forme $\Delta v = \gamma\tau$ (la quantité γ étant une constante par rapport à Δv et τ) que τ sera plus petit; or cette forme est celle de l'équation $v = gt$ entre la vîtesse et le temps dans le mouvement uniformément varié, lorsque, comme dans le cas actuel, la vîtesse initiale est nulle (observez que Δv et τ commencent ensemble); donc, à la limite, $\frac{\Delta v}{\tau}$ ou γ représente la force accélératrice g et on a, à l'instant qui termine le temps t, $\gamma = \frac{dv}{dt}$, la quantité γ, qui a le nom générique de *force accélératrice,* étant déterminée pour un instant donné, et variable d'un instant à l'autre (art. 712).

805. La valeur du rapport limite entre Δv et τ devient manifeste [redacted]

Rapprochant ce résultat de celui qui a été consigné à l'art. 799 et désignant par $\varDelta x$ et $\varDelta v$ les variations de l'espace parcouru et de la vîtesse qui ont lieu pendant le temps τ, ($\varDelta x$ et τ ont leurs origines respectives à l'extrémité de x et à la fin de t) on a les deux équations $\varDelta x = \tau f'(t) + \frac{1}{2}\tau^2 f''(t+\lambda\tau)$, et $\varDelta v = \tau f''(t) + \frac{1}{2}\tau^2 f'''(t+\lambda'\tau)$, qui font voir, d'une part, qu'un mouvement varié en général coincidera avec le mouvement uniforme ou avec le mouvement uniformément varié, s'il éprouve des changements tels que les termes respectifs $f''(t+\lambda\tau)$ ou $f'''(t+\lambda'\tau)$ deviennent nuls; et d'une autre part que, sans les changements dont je viens de parler, la seule diminution de τ rapproche le mouvement varié suivant une loi quelconque de l'un et l'autre des deux mouvements *élémentaires*, en observant qu'en général, pour une petite valeur déterminée de τ, le mouvement uniformément varié doit mieux représenter les phénomènes que le mouvement uniforme, ce qui est évident par la valeur générale $\varDelta x = \tau f'(t) + \frac{1}{2}\tau^2 f''(t) + \frac{1}{6}\tau^3 f'''(t) + \text{etc.}$ (art. 713).

806. Tous ces principes sur les mouvements *élémentaires* et sur les propriétés générales conclues de leurs rapprochements avec les mouvements variés suivant une loi quelconque, étant posés, on passe à la considération des *forces* dont on n'aurait pu raisonner que d'une manière vague sans l'analyse et le classement préliminaire de leurs principaux *effets*. Il y a, d'abord, un classement à faire des forces relativement à leurs divers modes d'action; on peut concevoir des forces qui, dès le premier instant de leurs actions, impriment des vîtesses finies à des masses finies et dont il est necessaire de s'occuper même dans l'hypothèse de la non-existence de pareilles forces, à *actions discontinues*, dans la nature. Viennent ensuite les forces de la nature, dont l'action est soumise à la *loi de continuité*, et qui ne changent la vîtesse d'un mobile en une autre, qu'après l'avoir fait passer par toutes les vîtesses intermédiaires. La durée du changement, pour une variation donnée, peut être plus ou moins considérable et si on la conçoit, par la pensée, infiniment petite on a le cas *limite* des forces à *actions discontinues* dont je viens de parler, et dont quelques phénomènes de communication de mouvement semblent nous offrir des exemples; quoique la *discontinuité* ne soit qu'apparente, dans ces phénomènes, eu égard à l'imperfection de nos organes.

Enfin l'effet d'une force à *action continue*, sur un mobile animé d'une *vîtesse finie* et considéré, dans le sens du mouvement de ce mobile,

peut être indépendant ou dépendant de sa vîtesse (art. 714, 718 et 719).

807. Malgré la diversité de ces modes d'actions des forces considérées quant à leurs effets dynamiques, leur comparaison ou leur mesure, leur composition et leur décomposition, n'en sont pas moins soumises à des lois communes (art. 751 et 752), les règles relatives aux différents *ordres* des quantités se trouvant d'ailleurs observées comme elles le sont en géométrie et en analyse pures. Avant d'assigner ces lois, et pour assurer la rigueur des applications qu'on aura à en faire, on reconnaît d'abord qu'un corps n'a, en lui-même, aucune faculté de changer son état de repos ou de mouvement, lequel état ne peut subir, par conséquent, de modification qu'en vertu d'une cause extérieure au corps. On déduit de ce principe, lié à ce qu'on a appelé *force d'inertie* des corps, la conséquence suivante : « Si un point matériel est animé d'une « vîtesse finie, dans une certaine direction, vîtesse qui peut avoir été « engendrée, ou par une action *instantanée*, ou par une action *con-* « *tinuée*, et qu'à l'instant où cette vîtesse et cette direction ont lieu, « la cause motrice cesse d'agir sur le mobile ; ce mobile, ainsi aban- « donné à lui-même, continuera à se mouvoir d'un mouvement rec- « tiligne et uniforme, en conservant sa vîtesse et sa direction finales « (art. 715, 716 et 717). »

808. La comparaison et la mesure des forces sont les applications d'un principe général fondé sur les deux propositions suivantes : « 1°. Plu- « sieurs forces capables d'imprimer, instantanément, différentes vîtesses « finies ou infiniment petites à une même masse, sont entr'elles dans les « rapports de ces vîtesses : 2°. Plusieurs forces capables d'imprimer ins- « tantanément la même vîtesse à différentes masses, sont entr'elles dans [redacted]

masses par les vitesses respectives qu'elles peuvent engendrer dans l'unité de temps, c'est-à-dire comme les expressions $m' \frac{dv'}{dt'}$, $m'' \frac{dv''}{dt''}$ etc. que comportent ces divers mouvements, les éléments de temps dt', dt'', etc. pouvant être ou ne pas être égaux entr'eux. Considérant ensuite qu'à chaque instant de la durée d'un mouvement varié suivant une loi quelconque, l'équation qui exprime cette loi, fournit une expression $\frac{dv}{dt}$ qui peut toujours être censée appartenir à un certain mouvement uniformément varié, dont elle est la *caractéristique*, on conclut, de ce rapprochement, que le produit $m \frac{dv}{dt}$, auquel on a donné le nom de *force motrice*, représente l'intensité variable de la force aux différents instants du mouvement du mobile; d'où il suit évidemment qu'en général les forces à *actions continues* sont entr'elles, à des instants déterminés de ces actions, comme les produits $m \frac{dv}{dt}$ ou comme les *forces motrices* dont jouissent les mobiles qu'elles animent (art. 720, 721, 722, 723 et 748).

809. La théorie des mouvements, résultant des actions réciproques des corps les uns sur les autres, se déduit aisément des principes sur la comparaison et la mesure des forces, lorsqu'on a établi, entre ces corps, des distinctions relatives aux propriétés qu'on appelle *dureté*, *mollesse*, *élasticité*, (cette dernière propriété pouvant exister à des degrés différents entre lesquels il faut avoir un mode de comparaison) (art. 746 et 747) et lorsqu'on a fait remarquer que l'effet, contre un obstacle, d'un corps, jouissant, en vertu de l'action instantanée d'une puissance, d'une quantité de mouvement finie ou infiniment petite, est identique avec celui qu'aurait produit l'action immédiate de la puissance, si, au lieu d'être exercée sur le corps, elle l'eût été sur l'obstacle (art. 755).

Ces préliminaires posés, on démontre le théorême fondamental de l'équilibre de deux corps parfaitement durs, qui se meuvent en sens directement opposés avec des *quantités de mouvement* égales, et cette démonstration se réduit à observer que le cas dont il s'agit, est celui de deux forces opposées qui, d'après le principe général sur la comparaison des forces, doivent être égales entr'elles (art. 756),

810. On arrive ensuite, avec la plus grande facilité, aux lois de la communication du mouvement entre des points matériels qui se meuvent sur une même ligne droite, et pour donner aux formules, qui expriment ces lois, toute la généralité désirable, il est convenable de les adapter au cas où les corps jouissent d'un degré d'élasticité indéterminé (art. 758 et suivants).

811. Les actions exercées par des forces d'*ordres* différents, ne pouvant être comparées entr'elles, il a été nécessaire de les distinguer par des noms différents. Si une masse pesante m tombe d'une hauteur h, à laquelle est due une vîtesse v, sur un plan horizontal, elle exercera sur ce plan une action mesurée par le produit mv ou $m\sqrt{2gh}$ qu'on appelle une *percussion*; et si cette masse m est simplement posée sur le plan horizontal, sans vîtesse initiale, l'effort qu'elle lui fera éprouver sera représenté par mdv ou $mgdt$, et prendra le nom de *pression* (art. 748 et 749). Ce sont à ces *pressions*, ou forces de l'ordre mdv ou $mgdt$, que se rapportent les théories d'équilibre données dans la première partie du cours. On voit ici les éléments qui les composent, et leurs relations avec les quantités que la Dynamique emploie; ces connaissances ne pouvaient être données que par la considération du mouvement, et, cependant, j'ai fait voir que la rigueur des démonstrations de la Statique était indépendante de cette considération (art. 750). Il restait à compléter la théorie de l'équilibre, en la rendant applicable aux *quantités de mouvement* finies; ce complément de théorie, qui était une conséquence facile à déduire des principes sur la comparaison et la mesure des forces, a, en même temps, mis dans tout son jour la liaison et l'identité de principes des diverses parties de la Mécanique.

rigueur des résultats déduits d'observations faites à la surface de la terre, mais elle exige quelques connaissances préalables *d'Astronomie physique* qui trouveront leur place dans la suite du cours. Parmi les appareils d'expérience dont on peut se servir pour suppléer aux preuves astronomiques, il faut particulièrement distinguer la machine d'Atwood et le *pendule composé ;* ce dernier instrument, envisagé sous un point de vue général, offre un système de points matériels pesants oscillant autour d'un axe horizontal, et comme la théorie du mouvement d'un pareil système ne sera donnée que dans la 3e. section de cette seconde partie du cours, je me bornerai en ce moment à exposer les moyens que fournit la machine d'Atwood pour constater la conformité des principes généraux de la Dynamique aux phénomènes observés.

813. J'appliquerai à l'objet que j'ai en vue les formules de l'article 792 et je commencerai par observer que la masse m suspendue à une des extrémités du fil et la partie m de la masse $m + \omega$ suspendue à l'autre extrémité du même fil, se faisant continuellement équilibre, sont dans le même état que si elles étaient dépourvues de pesanteur ; ainsi le système des masses m et $m + \omega$ peut être considéré comme composé d'une masse sans pesanteur, ou purement *inerte*, $2m$, et d'une masse pesante ω qui représente la puissance à laquelle le système $2m + \omega$ doit son mouvement. La réalité de cet état des choses ne pouvant être contestée, on s'assure, d'abord, que le mouvement commun des masses m et $m + \omega$ est soumis à la *loi de continuité* et *uniformément varié* par l'équation $x = \frac{\frac{1}{2} g\omega t^2}{2m + \omega}$ en observant plusieurs couples de valeurs simultanées de x et t et calculant, pour chaque couple, le terme $\frac{x}{t^2}$ qui doit être une quantité constante tant que m et ω conservent ou les mêmes valeurs absolues ou le même rapport entr'elles (la vîtesse initiale est toujours supposée nulle) ; ce résultat étant obtenu *par le fait*, on en conclut que l'équation qui donne la relation entre les espaces parcourus et les temps est vraiment de la forme $x = Ct^2$, C étant une constante, que, parconséquent, la vîtesse $\frac{dx}{dt}$ est proportionnelle au temps et que la variation instantanée de cette vîtesse est proportionnelle à l'élément du temps, ou constante

lorsque dt est constant. Il est essentiel d'observer que toutes ces conclusions sont indépendentes de la considération de la force motrice, leur vérité dépendant uniquement de la réalité des *faits observés*, dont l'équation $x = Ct^2$ exprime la loi *déduite de l'expérience*; voila un des avantages de la méthode que j'ai suivie au commencement de cette section, en traitant, d'abord, des phénomènes du mouvement envisagés comme *données de fait*, et faisant voir comment les équations générales, qui représentent ces phénomènes, peuvent, abstraction faite de la considération des causes motrices, se déduire les unes des autres.

Lorsqu'on a reconnu que le mouvement est *continu* et *uniformément varié*, la vérification importante, qui, rigoureusement, peut dispenser d'en faire d'autres, est celle des deux propositions fondamentales de l'art. 720 où il a été dit 1°. que plusieurs forces sont entr'elles comme les vîtesses finies ou élémentaires qu'elles impriment à une même masse. 2°. Que les rapports entre ces forces sont aussi ceux des masses auxquelles elles impriment la même vîtesse finie ou élémentaire. Pour prouver la première proposition on détermine d'abord $\frac{2x}{t^2}$ pour une certaine valeur de la masse totale $2m+\omega$ que je suppose égale à M, ce qui donne la quantité $\frac{dv}{dt} = \frac{g\omega}{2m+\omega}$ que je désigne par G, convenable à une intensité déterminée de la force motrice ω; on substitue, ensuite, aux masses partielles m et ω, d'autres masses m' et ω' telles que, la masse totale M demeurant la même, on ait le rapport, entre la nouvelle force motrice ω' et l'ancienne ω, égal à un nombre quelconque n, entier ou fractionnaire, et cette hypothèse donne les valeurs

tême $2m'+\omega'$ pendant le temps t) et la quantité constante $\frac{2x}{t^2}=G$ obtenue dans le premier cas (pour une même valeur de t), donnent l'équation $\frac{G'}{G}=n$, ce qui revient à dire que, pour une même valeur de t, on a $\frac{x'}{x}=n$.

Pour vérifier la 2e. proposition, il faut faire varier la masse totale M, de manière que lorsque cette masse devient $M'=nM$, la nouvelle masse additionnelle, ou force motrice ω', devienne $n\omega$, ce qu'on obtient en déterminant m' et ω' par les équations

$$\omega'=n\omega\ ;\ m'=\tfrac{1}{2}n\,(M-\omega).$$

Les masses ω' et m' étant ainsi déterminées, la seconde proposition sera évidemment vérifiée si la nouvelle quantité constante $G'=\frac{2x'}{t^2}$, donnée par l'observation, est égale à l'ancienne $G=\frac{2x}{t^2}$ ou si, pour une même valeur de t, on a $x'=x$, puisque cette égalité suppose nécessairement $\frac{dv'}{dv}=1$.

814. Quoique les vérifications, indiquées dans l'article précédent, ne se rapportent qu'à des observations faites sur un système de corps animés d'un mouvement commun *uniformément varié*, les conclusions qu'on en tire ne doivent pas moins s'étendre à tous les cas possibles de mouvement, puisqu'on peut toujours, art. 712 et suivants, assigner, à un instant déterminé, un mouvement uniformément varié dont les phénomènes coincident avec ceux d'un mouvement quelconque qui aurait lieu au même instant. De plus comme ces vérifications ont, pour objet, des propositions qui sont les véritables bases de toute l'application de l'analyse à la mécanique, je supprime pour abréger celles qui seraient relatives à la transformation subite du mouvement varié en mouvement uniforme, au changement de vîtesse que subit le système $2m+\omega$ lorsque sa masse est tout-à-coup augmentée d'une quantité finie etc. Les élèves se rendront compte aisément des moyens d'opérer ces vérifications accessoires.

815. Il est bon d'observer que les preuves expérimentales, fournies par la machine d'Atwood, de la proposition qui rend la force proporti-

onnelle au produit $\frac{mdv}{dt}$, sont indépendantes de la valeur absolue de la *force accélératrice g* due à la pesanteur dans le cas du mouvement libre et vertical, et supposent seulement que l'expression $\frac{g\omega}{2m+\omega}$ est celle d'une quantité qui demeure constante lorsque ω et m conservent ou les mêmes valeurs absolues ou le même rapport entr'elles. Cette machine pourrait cependant servir à la détermination séparée de g puisqu'elle donne le moyen de connaître, par le fait, la quantité $\frac{2M}{\omega} \cdot \frac{x}{t^2} = g$, qui doit être invariable dans toutes les combinaisons possibles des valeurs absolues ou relatives de M, ω, x et t, pourvu que ces valeurs aient lieu ensemble ; mais si on veut parvenir à cette détermination avec un degré d'exactitude qui assure la précision des 10es. des millimètres, on peut employer le *pendule simple* dont la théorie sera exposée dans la 2e. section de cette 2e. partie du cours. Je donnerai, dans la 3e. section de la même partie, des moyens nouveaux pour employer le *pendule composé* a la même détermination, et j'y ferai voir, en même temps, comment cet instrument employé aux expériences qui auraient pour objet de vérifier, par le fait, les principes fondamentaux de la Dynamique, offrirait des résultats d'une précision supérieure encore à ceux qu'on obtient par la machine d'Atwood. Avant de traiter ce sujet, j'aurai posé les bases de la théorie du mouvement des corps célestes, et complété ainsi l'ensemble des preuves d'après lesquelles on peut affirmer que les principes généraux de la Dynamique, déduits du raisonnement et attestés par tous les phénomènes de la nature, doivent être

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE
DE DYNAMIQUE.

SECTION II.
THÉORIE GÉNÉRALE DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL, EN AYANT ÉGARD AUX DIVERSES CONDITIONS AUXQUELLES CE MOUVEMENT PEUT ÊTRE ASSUJETTI.

Équations générales du mouvement *libre* d'un point matériel sollicité par des forces quelconques.

816. J'AI exposé, dans la première section de cette seconde partie du cours, les théories fondamentales qui s'appliquent indistinctement à toutes les parties de la Dynamique, j'y ai démontré, avec tous les développements nécessaires, les principes relatifs à la comparaison et à la mesure des forces dans le cas du mouvement, et à leurs expressions analytiques; au moyen de ces notions préliminaires, je n'aurai plus besoin que du secours de l'analyse et de la géométrie pures, pour établir les autres théories de la *Mécanique des corps solides*, dont il me reste à entretenir les élèves.

Je vais d'abord traiter, en le considérant sous le point de vue le plus général, le mouvement d'un point matériel sur lequel je n'ai résolu jusqu'à présent que des problèmes assujettis à des conditions particulières. Je commencerai par supposer que ce point se meut *librement*, c'est-à-dire que la courbe qu'il décrit dans l'espace résulte uniquement des actions des forces d'intensités et directions quelconques,

auxquelles il est soumis, et je passerai ensuite aux cas du mouvement de ce point sur des courbes et des surfaces, soit données par l'état de la question, soit déterminées de manière à satisfaire à des conditions données.

817. La position du mobile a été, jusqu'à présent, assignée, à chaque instant, par sa distance à un point fixe de la ligne de son mouvement, et c'est le parti le plus convenable à prendre lorsque le mouvement est rectiligne; mais lorsque le mobile décrit, dans l'espace, une courbe ou *trajectoire* qui, en général, est censée être à double courbure, il est beaucoup plus commode de rapporter sa position instantanée à trois plans coordonnés, perpendiculaires entr'eux, dont les intersections donnent les axes des x, des y et des z ayant leur origine commune au point commun d'intersection des trois plans.

Je supposerai ordinairement que ces plans coordonnés sont fixes dans l'espace, et cependant, pour faciliter l'analyse de quelques questions, il m'arrivera d'employer des plans coordonnés de positions variables et dépendantes du mouvement du mobile.

Je substituerai aussi, par fois, les coordonnées polaires aux coordonnées rectangulaires, lorsque des raisons de simplification de calcul et de clarté, rendront cette substitution utile.

Ces préliminaires posés, soit un point matériel sollicité par des forces quelconques, et ayant un mouvement actuel dans l'espace; à un instant quelconque de ce mouvement on compte un certain nombre d'unités de temps que je désigne par t; à ce même instant les distances respectives du mobile aux plans fixes yz, xz et xy sont x, y et z, ce qui détermine sa position dans l'espace, et je représente par s la distance au bout du temps t, mesurée sur la courbe parcourue, du mobile à

x, y et z par dx, dy et dz. Les différentielles dx, dy, dz et ds, se trouvent ainsi liées à la différentielle dt et dépendantes du mouvement du mobile; mais si, lorsque ce mobile se trouve à l'extrémité de l'arc s, on veut, par des considérations purement géométriques et sans égard à son mouvement, comparer la position du point qu'il occupe dans l'espace, avec celle d'un autre point pris à une distance infiniment petite, soit sur la courbe décrite, soit hors de cette courbe, il est nécessaire de distinguer les longueurs élémentaires, relatives à cette circonstance de celles qui sont dépendantes du mouvement. En conséquence, dans ce second cas, la distance du mobile au point de position arbitraire, qui en est infiniment voisin, sera désignée par δs et les projections orthogonales de δs sur les axes des x, y et z, seront représentées, respectivement, par δx, δy et δz.

819. Les premiers phénomènes à considérer dans le mouvement actuel et instantané du point matériel mobile se rapportent à ceux du mouvement uniforme et rectiligne dont il a été question art. 685 et suivants. Puisque l'arc ds est parcouru pendant l'instant dt la vîtesse à cet instant sera, art. 691, égale à $\frac{ds}{dt}$; et comme les cosinus des angles respectifs formés par l'arc élémentaire ds et par les axes des x, y et z ont pour valeurs $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, les composantes de la vîtesse $\frac{ds}{dt}$ prises parallèlement à chacun de ces axes seront, art. 752, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; je donnerai bientôt des valeurs générales de ces diverses quantités dans lesquelles entreront les puissances sollicitantes.

La vîtesse $\frac{ds}{dt}$, qui a lieu à un instant déterminé, deviendrait constante si les puissances auxquelles le mobile est soumis cessaient d'agir sur lui à ce même instant; il se mouvrait, alors, d'un mouvement uniforme suivant la direction de la tangente menée à l'extrémité de l'arc de courbe s, art. 715 et 716. La ligne droite ainsi parcourue aurait pour équation, en désignant par a, b, c, respectivement, les coordonnées parallèles aux x, y et z du point où le mouvement a cessé d'être varié,

$$\left.\begin{aligned}(y-b)\,dx &= (x-a)\,dy\\ (z-c)\,dx &= (x-a)\,dz\\ (z-c)\,dy &= (y-b)\,dz\end{aligned}\right\}$$

L'une quelconque de ces trois équations est donnée par les deux autres.

Mais, par l'effet de la continuation de l'action des puissances, la vîtesse et la direction du mouvement changeront pendant l'instant qui suivra celui auquel se rapportent les équations précédentes, et il s'agit de déterminer ces changements.

820. Je suppose, pour fixer les idées, qu'aubout du temps t le point matériel mobile se meut, dans la région des x, y, z positives, d'un mouvement tel que, pendant l'instant dt, ses coordonnées x, y et z prennent des accroissements positifs, les angles qui ont pour cosinus $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ étant, dans ce cas, art. 25, chacun plus petit qu'un angle droit. Ce mobile est sollicité par des forces P', P'', etc. dont les actions soumises à la *loi de continuité*, se trouvent, d'ailleurs, dans le cas expliqué à l'art. 719. La masse du mobile est prise pour unité et les produits $P'dt$, $P''dt$, etc. doivent représenter, dans l'analyse, les vîtesses élémentaires que chacune des forces pourroit lui donner en vertu de son action instantanée; les angles respectifs formés par les directions de P', P'', etc. et par les axes des x, y et z sont désignés par les lettres α, β, γ lesquelles doivent porter les mêmes accents que les forces auxquelles elles se rapportent; je fais de plus pour abréger

$$(1) \ldots \{\Sigma(P\cos.\alpha) = X;\ \Sigma(P\cos.\beta) = Y;\ \Sigma(P\cos.\gamma) = Z;\}$$

(voyez pour le signe Σ la note de l'art. 75) X, Y et Z étant, comme à l'art. 63, les sommes des composantes des forces sollicitantes, prises parallèlement aux x, y et z, et je suppose encore, toujours pour fixer les idées, que chacune de ces sommes est positive, et que la force qu'elle représente a, par conséquent, une tendance à éloigner le mobile du plan coordonné perpendiculaire à l'axe auquel cette force se rapporte.

[redacted]

Cet état du mobile est identique avec celui où il se trouverait si on lui imprimait parallèlement aux x, y et z les vîtesses respectives $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ et qu'en même temps il fut soumis aux actions des puissances X, Y et Z; or la force X tend à augmenter la vîtesse $\frac{dx}{dt}$ de la quantité Xdt et en ayant égard, d'une part à l'*indépendance* des composantes rectangulaires (art. 57), et de l'autre à l'observation de l'art. 719 sur le mode d'action des forces dont il s'agit ici, on voit que cette force X doit avoir complétement son effet, c'est-à-dire, que l'augmentation élémentaire, réelle, de la vîtesse $\frac{dx}{dt}$ doit être Xdt, ce qui donne $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = Xdt$; le même raisonnement s'applique aux vîteses $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ et aux forces Y et Z et on a ainsi les trois équations fondamentales

$$(2).\left\{d\left(\frac{dx}{dt}\right) = Xdt\,;\; d\left(\frac{dy}{dt}\right) = Ydt\,;\; d\left(\frac{dz}{dt}\right) = Zdt.\right\}$$

821. On peut arriver à ces équations par une autre marche de raisonnement que je vais exposer pour donner un premier exemple de l'application du principe des vîtesses virtuelles aux questions de mouvement, et du système de notation expliqué à l'art. 818 Les incréments de vîtesse $d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $d\left(\frac{dz}{dt}\right)$ ayant lieu en vertu des actions des puissances qui tendent à imprimer au mobile les vîtesses élémentaires Xdt, Ydt et Zdt, si on supposaitqu'à l'instant où ces puissances produisent leur effet d'autres puissances, qui leur seraient respectivement égales et dont chacune agirait dans un sens directement opposé au sens d'action de sa correspondante, fussent aussi appliquées au mobile, l'effet des premières puissances serait évidemment détruit, ce qui revient à dire qu'on aurait l'équilibre entre six quantités de mouvement élémentaires obtenues en multipliant la masse du mobile par chacune des vîtesses $d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $d\left(\frac{dy}{dt}\right)$,

$d\left(\frac{dz}{dt}\right)$, $-Xdt$, $-Ydt$, $-Zdt$. Or si on conçoit, dans l'espace, un point infiniment voisin du point mobile, ayant d'ailleurs une position entièrement arbitraire, et qu'on désigne par ds, dx, dy, dz, respectivement, la distance entre les deux points et les projections de cette distance sur les directions de X, Y et Z, ou sur les axes des x, y et z, conformément à la notation expliquée art. 818, on aura, d'après le principe des vîtesses virtuelles, art. 87 et 465, en observant que la masse du mobile est prise pour unité, l'équation d'équilibre

$$(A)\ldots dx\left\{d\left(\frac{dx}{dt}\right)-Xdt\right\}+dy\left\{d\left(\frac{dy}{dt}\right)-Ydt\right\}+dz\left\{d\left(\frac{dz}{dt}\right)-Zdt\right\}=0$$

mais, d'après la théorie sur laquelle ce principe est établi, la direction de ds et sa valeur absolue étant entièrement arbitraires, les incréments dx, dy et dz ne sont liés entr'eux par aucune loi, ensorte que l'équation précédente doit avoir lieu indépendamment de toutes relations et de toutes valeurs particulières de ces incréments ; il faut donc égaler à zéro, séparément, chacun des termes multipliés par dx, dy, et dz, ce qui donne les équations de l'article précédent.

Valeur générale de la vîtesse, déduite des équations précédentes. Observations sur la fonction qui donne cette valeur.

822. L'équation (A) de l'art. précédent, déduite du principe des vîtesses virtuelles, donne immédiatement la vîtesse du mobile en observant que, puisque dx, dy et dz sont entièrement arbitraires, et pour-

vîtesse au bout du temps t par v cette vîtesse a pour valeur $v=\frac{ds}{dt}$, on obtient l'équation

$$(2) \ldots\ldots v^2=C+2\int(Xdx+Ydy+Zdz)$$

C étant la constante arbitraire.

On serait parvenu au même résultat en multipliant par $2dx$, $2dy$ et $2dz$, respectivement, la 1e. la 2e. la 3e. des équations (2) de l'art. 820 faisant la somme des équations produits et intégrant dans l'hypothèse de dt constant.

823. La valeur générale de la vîtesse, donnée par l'équation (2) de l'article précédent, comporte un cas très-remarquable celui qui rend la fonction $Xdx+Ydy+Zdz$ intégrable par elle-même et indépendamment de toute relation particulière entre les variables x, y et z. Ce cas a toujours lieu lorsque les puissances P', P'', P''', etc. ont, sur leurs lignes de directions respectives, des *centres fixes* et sont fonctions des distances variables, que je désigne par p', p'', p''', etc. du mobile à ces *centres*. En effet soient R la résultante unique de toutes les forces P', P'', etc. δr la distance infiniment petite du mobile à un point, pris d'ailleurs arbitrairement dans l'espace, et $\delta p'$, $\delta p''$, etc. les projections orthogonales de cette distance sur les directions de P', P'', etc.; puisque R, résultante des forces P', P'', etc. pourrait leur faire équilibre si on lui donnait un sens d'action diamétralement opposé à celui qu'elle a, on a, par le principe des vîtesses virtuelles,

$$R\delta r=\Sigma(P\delta p);$$

mais les composantes X, Y, Z, remplacent exactement, quant à l'effet produit sur le mobile, les forces décomposées P', P'', etc. donc, art. 457 et 476, la somme des *moments* de X, Y et Z est égale à la somme des *moments* de P', P'', etc. c'est-à-dire qu'on a

$$(1) \ldots\ldots X\delta x+Y\delta y+Z\delta z=\Sigma(P\delta p);$$

équation dans laquelle on peut, ainsi que je l'ai observé à l'art. précédent, substituer aux projections δx, δy, δz, $\delta p'$, $\delta p''$, etc. de δs, les projections dx, dy, dz, dp', dp'', etc. de l'espace élémentaire ds décrit par le mobile pendant l'instant dt, ce qui donne

$$(2) \ldots\ldots Xdx+Ydy+Zdz=\Sigma(Pdp)$$

et si, comme je le suppose, P', P'', etc. sont fonctions de p', p'', etc. la quantité $\Sigma(Pdp)$ ou $P'dp' + P''dp'' +$ etc. sera intégrable par elle-même et la fonction $Xdx + Ydy + Zdz$ jouira, par conséquent, de la même propriété.

824. La vîtesse a un instant quelconque, dans le cas dont je viens de parler, est donnée, uniquement, par la position du mobile ou par les coordonnées du point où il se trouve à ce même instant, sans aucun égard à la forme de la courbe parcourue ou *trajectoire*; voici les expressions à substituer à X, Y et Z dans la valeur générale de cette vîtesse; soient P et p, respectivement, l'une quelconque des puissances P', P'', etc. et celle des distances p', p'', etc. dont P est supposée fonction, si on désigne par a, b, c les coordonnées de l'origine de p parallèles aux x, y et z on aura, f étant le signe de fonction,

$$(1) \; \ldots\ldots \; p^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

$$(2) \; \ldots \; P = f(p) = f\left\{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\right\}.$$

Les sommes des composantes des forces respectivement parallèles aux x, y et z seront, en observant que $\frac{x-a}{p}$, $\frac{y-b}{p}$, $\frac{z-c}{p}$ sont les cosinus des angles respectifs formés par la direction de P et par les axes des x, y et z,

$$(3) \ldots \begin{cases} X = \Sigma \left\{ (x-a) \, . \, \frac{f.\left\{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{1}{2}}\right\}}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{1}{2}}} \right\} \\ Y = \Sigma \left\{ (y-b) \, \frac{f\left\{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{1}{2}}\right\}}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{1}{2}}} \right\} \end{cases}$$

[redacted]

$$(4) \ldots\ldots C = U^2 - 2F(a', b', c');$$

d'où

$$(5) \ldots\ldots v^2 = U^2 - 2F(a', b', c') + 2F(x, y, z).$$

825. Observant que l'équation (1) de l'article précédent donne $\left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{x-a}{p}$; $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \frac{y-b}{p}$; $\left(\frac{dp}{dz}\right) = \frac{z-c}{p}$ et ayant égard à l'équation (2) du même article on verra que les équations (3) peuvent se mettre sous la forme suivante

$$X = \Sigma \left\{ \left(\frac{dp}{dx}\right) f(p) \right\};$$

$$Y = \Sigma \left\{ \left(\frac{dp}{dy}\right) f(p) \right\};$$

$$Z = \Sigma \left\{ \left(\frac{dp}{dz}\right) f(p) \right\};$$

faisant la somme de ces équations, après avoir multiplié la 1re. par dx, la 2e. par dy, la 3e. par dz, les coëfficients de chacune des quantités représentées par le symbole général $f(p)$, dans le 2e. membre de l'équation *somme*, seront les différentielles complètes des distances correspondantes, représentées par p, et on aura

$$Xdx + Ydy + Zdz = \Sigma \{ dp\, f(p) \}$$

ce qui fournit une seconde démonstration du théorême dont la première démonstration a été, art. 823, déduite du principe des vîtesses virtuelles.

826. Plusieurs des cas de mouvement rectiligne, traités dans la section précédente, se rapportent à celui dont il a été question art. 823. Le mobile, dans ces différents cas, n'est censé soumis qu'à l'action d'une seule puissance dirigée suivant l'axe des x qui est la ligne du mouvement; on a donc $Y = 0$ et $Z = 0$; et l'équation (2) de l'art. 822 devient

$$v^2 = C + 2\int X dx.$$

Le mobile étant un corps pesant qui parcourt une ligne verticale dans le vide, la puissance X est dirigée au centre de la terre, et fonction de la distance du mobile à ce centre; cette fonction peut être traitée

comme une quantité constante, lorsque la ligne parcourue est si petite en comparaison du rayon de la terre, et si éloignée de son centre que les plus grandes variations des distances du mobile à ce centre deviennent négligeables par rapport à ces distances. Cette condition introduite dans l'équation ci-dessus, donne $X = constante$, d'où on conclut l'équation (3) de l'art. 702, de laquelle on peut déduire toutes les formules du mouvement uniformément varié.

Lorsqu'on regarde la longueur de la ligne parcourue par le mobile comme comparable au rayon de la terre, on a, art. 729, au-dessus du niveau de la mer, $X = \frac{gr^2}{(a-x)^2}$, et art. 733, au-dessous de ce niveau, $X = \frac{g(r-x)}{r}$; ainsi, pour tous les cas particuliers, traités dans la 1re. section de cette 2e. partie du cours, qui rendent la puissance X fonction de la distance du mobile à un centre fixe, pris sur la direction de la force, la vîtesse est donnée par une expression qui ne renferme d'autre variable que la distance x du mobile à une origine donnée de position, expression qui se déduit immédiatement de l'équation (2) de l'article 822.

827. Il n'en est pas de même du mouvement vertical dans un milieu résistant comme le quarré de la vîtesse, dont les lois ont été exposées art. 739 et suivants; ce cas donne art. 740 et 741, $X = g\left(\pm 1 - \frac{v^2}{a^2}\right)$ (les signes supérieur et inférieur s'appliquant, respectivement, aux mouvements de descente et d'ascension) et la fonction Xdx n'est pas

De la force *tangentielle* et de la force *normale*. Expression de la vîtesse en fonction des composantes *tangentielles*.

828. Lorsque le mobile a parcouru, pendant l'élément de temps dt, un élément ds de sa trajectoire, la direction de son mouvement s'infléchit, et il parcourt, pendant l'instant suivant, un autre élément de cette courbe qui n'est pas dans la direction du premier. Ainsi, à un instant quelconque, tout l'effet des forces sollicitantes se réduit; 1°. à faire varier sa vîtesse dans le sens de la courbe; 2°. à faire varier la direction du mouvement; il suit de-là que si, au bout du temps t, on fait passer un plan, que j'appelle *plan SRN*, par l'élément de courbe que le mobile vient de parcourir, et par celui qu'il est prêt à parcourir, ce plan renfermera 1°. la résultante générale des forces sollicitantes que je désigne par R; 2°. les deux composantes rectangulaires de R, l'une, que je désigne par S, dirigée suivant l'élément de courbe que le mobile vient de parcourir, et l'autre que j'appelle N, perpendiculaire à cet élément de courbe. En effet, si on admettait l'existence d'une force agissant sur le mobile, sans être dirigée dans le plan *SRN*, cette force devrait avoir une composante perpendiculaire au même plan, qui tendrait à en écarter le mobile, et l'effet de cette composante ne pourrait être empêché par aucune des forces dont *SRN* renferme les directions; mais cette hypothèse est incompatible avec le mouvement réel du corps qui, par l'état de la question, doit parcourir un second élément de courbe dans le plan *SRN*; il faut donc que les forces perpendiculaires à ce plan, ou soient nulles, ou se détruisent entr'elles.

829. Les composantes S et N se nomment respectivement force *tangentielle* et force *normale*; il a déjà été question de la première aux art. 819 et 820, et il sera utile de donner ici les formules applicables à toutes les déterminations qui les concernent. On sait que la résultante R a pour valeur

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2};$$

et qu'en désignant par A, B et C les angles respectifs formés par sa direction et par les axes des x, y et z, on a

$$(2) \ldots \left\{\cos. A=\frac{X}{R};\ \cos. B=\frac{Y}{R};\ \cos. C=\frac{Z}{R};\right\}$$

la direction de la force tangentielle S étant identique avec celle de l'élément de courbe ds, les angles repectifs désignés par a, b, c, qu'elle forme avec les axes des x, y et z, se détermineront par les équations

$$(3) \ldots \left\{\cos. a = \frac{dx}{ds}\,;\ \cos. b = \frac{dy}{ds}\,;\ \cos. c = \frac{dz}{ds}\,;\right\}$$

d'où on conclut, par un théorême de trigonométrie très-connu, la valeur du cosinus de l'angle, que j'appelle Θ, formé par les directions de R et S, savoir

$$(4) \ldots\ldots \cos. \Theta = \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{Rds}\,;$$

et comme $S = R \cos. \Theta$ on a

$$(5) \ldots\ldots\ldots S = \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{ds}\,.$$

830. Passant à la force normale N, j'observe que sa direction à angle droit sur celle de la force S forme avec la direction de la force R un angle complément de Θ et dont le cosinus est, par conséquent, égal à sin. Θ; ainsi désignant par f, g et h les angles respectifs formés par N et par les axes des x, y et z j'ai les trois équations

$$(1) \ldots\ldots \left\{\begin{aligned} &\frac{X}{R}\cos. f + \frac{Y}{R}\cos. g + \frac{Z}{R}\cos. h = \sin. \Theta\,; \\ &\frac{dx}{ds}\cos. f + \frac{dy}{ds}\cos. g + \frac{dz}{ds}\cos. h = 0\,; \\ &\cos.^2 f + \cos.^2 g + \cos.^2 h = 1\,; \end{aligned}\right.$$

desquelles on déduit

[redacted]

831. Lorsque les forces P', P'', etc. seront fonctions des distances du mobile à des centres d'actions fixes, pris sur leurs directions respectives, et que, par conséquent, X, Y et Z seront fonctions des coordonnées du point mobile, les valeurs des angles A, B, C, Θ, f, g et h se déduiront de la position de ce mobile.

J'ajouterai que les angles f, g, h sont ceux que forme, avec les axes coordonnés, le *principal* rayon osculateur de la courbe à double courbure décrite par le mobile, celui qui se trouve compris dans le plan même de l'arc élémentaire dont il mesure la courbure et dont son origine occupe le centre ; je donnerai bientôt la valeur de ce rayon.

832. Désignant par θ', θ'', etc. les angles respectifs formés par les puissances P', P'', etc. et par l'élément de courbe ds, ou par la ligne de direction actuelle du mouvement, les composantes $P' \cos.\theta'$, $P'' \cos.\theta''$, etc. que j'appelle composantes *tangentielles*, auront, pour effet exclusif, celui de faire varier la vîtesse v, ou d'engendrer l'élément de vîtesse dv, cette vîtesse v ne pouvant être, en aucune manière, modifiée par les composantes normales $P' \sin.\theta'$, $P'' \sin.\theta''$, etc. dont la composition, en une force unique, donne la force normale N, exclusivement employée à infléchir la route du mobile ; on aura donc

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \ldots\ dv = dt\,\Sigma(P\cos.\theta);\\ (2)\ \ldots\ v = K + \int\{dt\,\Sigma(P\cos.\theta)\};\end{array}\right\}K \text{ est la constante arbitraire}$$

ou, en multipliant le premier membre de (1) par v et le 2e. par la valeur $\frac{ds}{dt}$ de v,

$$(3)\ \ldots\ldots\ v^2 = C + 2\int\{ds\,\Sigma(P\cos.\theta)\}$$

il est facile de reconnaître l'identité de cette seconde valeur avec celle que j'ai donnée art. 822 ; on a $\Sigma(P\cos.\theta) = S = \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{ds}$, d'où $ds\,\Sigma(P\cos.\theta) = Xdx + Ydy + Zdz$.

Considérations générales sur la *trajectoire* ou courbe décrite par le mobile. Valeur générale de son rayon de courbure. Équation du plan, de position variable, qui renferme l'arc décrit de ce rayon.

833. Je compléterai ce que j'avais à dire sur l'emploi des équations

générales du mouvement d'un point matériel, pour en déterminer tous les phénomènes, en donnant les équations générales de la trajectoire, et les moyens de déterminer les affections de cette courbe.

On a, d'abord, un procédé général et direct pour trouver l'équation de la trajectoire dans les différents cas particuliers, qui consiste dans l'intégration, lorsqu'elle est possible, de chacune des équations (2) de l'art. 820. Les intégrales donneront les relations entre les temps et les espaces parcourus parallèlement à chacun des axes coordonnés, et, en éliminant la variable t des 3 équations ainsi obtenues, on aura deux équations entre x, y et z qui seront celles de la trajectoire. Je suppose, comme aux art. 823 et 824, X, Y et Z fonctions des coordonnées de cette courbe ; si les expressions de ces quantités renfermaient la vîtese v, il faudrait à v substituer $\dfrac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{dt}$.

834. Pour avoir d'ailleurs sur cette détermination les résultats les plus généraux je pose les équations hypothétiques

$$(1) \ldots\ldots \{dy = pdx;\ dz = qdx;\}$$

desquelles on déduit

$$(2) \ldots \{ddy = pddx + dpdx;\ ddz = qddx + dqdx;\}$$

$$(3) \ldots\ldots ds = dx\sqrt{1+p^2+q^2};$$

$$(4) \ldots \frac{ds}{dt} = v = \frac{dx}{dt}\sqrt{1+p^2+q^2};$$

prenant dt pour différentielle constante, les équations de l'art. 820 deviennent, $ddx = Xdt^2$, $ddy = Ydt^2$, $ddz = Zdt^2$, et ces valeurs substituées dans (2) donnent

$$(7) \ldots \begin{cases} Y\,dx - X\,dy = \dfrac{v^2 dp}{1+p^2+q^2}\,; \\ Z\,dx - X\,dz = \dfrac{v^2 dq}{1+p^2+q^2}\,; \end{cases}$$

mettant pour dp et dq leurs valeurs, et ayant égard à (1) et à (3)

$$(8) \ldots \begin{cases} Y\,dx - X\,dy = \dfrac{v^2(dx\,ddy - dy\,ddx)}{ds^2}\,; \\ X\,dz - Z\,dx = \dfrac{v^2(dz\,ddx - dx\,ddz)}{ds^2}\,; \\ \text{et par combinaison de ces deux équations} \\ Z\,dy - Y\,dz = \dfrac{v^2(dy\,ddz - dz\,ddy)}{ds^2}\,; \end{cases}$$

Divisant la première de ces équations par l'une quelconque des deux autres, on a l'équation unique, dans laquelle la vîtesse n'entre plus,

$$(9) \ldots \left\{ \begin{aligned} & X(dz\,ddy - dy\,ddz) \\ + & Y(dx\,ddz - dz\,ddx) \\ + & Z(dy\,ddx - dx\,ddy) \end{aligned} \right\} = 0$$

La trajectoire sera immédiatement déterminée par ces équations lorsque les puissances seront fonctions des distances du mobile à des points fixes, pris sur leurs directions, puisqu'alors art. 824 les valeurs de v, X, Y et Z, précédemment déterminées, ne renfermeront d'autres variables que les coordonnées des points successivement parcourus par le mobile ; je dois ajouter que l'usage de ces équations est indépendant de la condition, ci-dessus imposée, d'avoir dt constant et qu'elles peuvent être mises sous les formes suivantes ; savoir, les équations (8)

$$(10) \ldots \begin{cases} ds^2\,(Y\,dx - X\,dy) = v^2\,dx^2.\,d\left(\dfrac{dy}{dx}\right); \\ ds^2\,(X\,dz - Z\,dx) = v^2\,dz^2.\,d\left(\dfrac{dx}{dz}\right); \\ ds^2\,(Z\,dy - Y\,dx) = v^2\,dy^2.\,d\left(\dfrac{dz}{dy}\right); \end{cases}$$

et l'équation (9) dégagée de la vîtesse

$$(11) \ldots Xdz^2 \cdot d\left(\frac{dy}{dz}\right) + Ydx^2 \cdot d\left(\frac{dz}{dx}\right) + Zdy^2 \cdot d\left(\frac{dx}{dy}\right) = 0.$$

835. La direction de la tangente à la trajectoire et celle de son rayon de courbure sont données par les équations (3) de l'art. 829 et par les équations (2) de l'art. 830, et il ne reste plus qu'à chercher la valeur du rayon de courbure. Pour cela, j'observe qu'à l'instant où le mobile venant de parcourir un élément de courbe ds est prêt à parcourir l'élément suivant ds', il est animé, dans le sens de l'élément ds, de la vîtesse $v + dv$, et, dans le sens du rayon de courbure, de la vîtesse élémentaire Ndt ou $Rdt \sin. \Theta$, d'où on conclut, par les formules de la composition du mouvement, que l'angle, formé par ds et ds', a son sinus $= \dfrac{Rdt \sin. \Theta}{\sqrt{(v+dv)^2 + R^2\, dt^2 \sin.^2 \Theta}} = \dfrac{Rdt \sin. \theta}{v}$; or ce sinus, qui est celui de l'angle appelé *angle de contact*, a aussi pour valeur $\dfrac{ds}{r}$, en désignant, par r, le rayon de courbure cherché; on a donc

$$(1) \ldots \ldots \ldots \ldots r = \frac{vds}{Rdt \sin. \theta};$$

et, en observant que $\dfrac{ds}{dt} = v$,

$$(2) \ldots \ldots \ldots \ldots r = \frac{v^2}{R \sin. \theta} = \frac{v^2}{N};$$

je reviendrai sur cette valeur remarquable dans la suite du cours.

836. Si on fait passer par le point, où le mobile se trouve à un instant quelconque, trois axes sur lesquels se comptent, à partir du même point, les coordonnées ξ, η et ζ respectivement parallèles aux x, y et z, l'équation du plan qui renferme l'élément de courbe ds et le rayon de courbure r, sera, d'après les formules de la géométrie analytique,

$$(1) \ldots \xi(dzddy - dyddz) + \eta(dxddz - dzddx) + \zeta(dyddx - dxddy) = 0,$$

qui peut se mettre sous la forme

$$(2) \ldots \xi dz^2 \cdot d\left(\frac{dy}{dz}\right) + \eta dx^2 \cdot d\left(\frac{dz}{dx}\right) + \zeta dy^2 \cdot d\left(\frac{dx}{dy}\right) = 0,$$

observant

observant que l'une ou l'autre de ces équations établit entre ξ, η et ζ les mêmes relations énoncées par l'équation (9) de l'art. 834, entre X, Y et Z, on conclut de leur rapprochement

$$\xi : \eta : \zeta :: X : Y : Z$$

d'où,

$$(3) \ldots \{\xi Z = \zeta X;\ \xi Y = \eta X;\ \eta Z = \zeta Y\}.$$

Ces équations sont celles de la ligne de direction de la résultante générale R, qu'on pouvait déduire immédiatement des équations (2) de l'art. 828, mais en les combinant par les méthodes de la géométrie analytique, avec celles de la ligne de direction du mouvement actuel, ou de la force tangentielle S, qui sont

$$\frac{\eta}{\zeta} = \frac{dy}{dx};\ \frac{\zeta}{\xi} = \frac{dz}{dx};$$

on a l'équation suivante du plan renfermant les directions du mouvement actuel, de la résultante générale, et du rayon de courbure

$$(Y dx - X dy)\zeta + (X dz - Z dx)\eta + (Z dy - Y dz)\xi = 0$$

qui ne contient plus que des termes du 1[er]. ordre avec les sommes des composantes rectangulaires des puissances. Pour rapporter les positions des différents points de ce plan à l'origine fixe des x, y et z, on désignera les coordonnées, comptées de cette origine fixe, et parallèles aux x, y et z, par x', y' et z', et on substituera, dans l'équation précédente, $x' - x$, $y' - y$, et $z' - z$, à ξ, η et ζ, respectivement, les seules variables étant x', y', z' et toutes les autres quantités, qui se rapportent au point occupé par le mobile, devant être considérées comme constantes dans l'équation entre ces variables.

Propriétés générales du mouvement libre d'un point matériel, sollicité par des puissances quelconques. Relations entre les *aires* et les *moments*. Cas qui rend les *aires* proportionnelles aux temps. Propriétés particulières qui en dépendent. Principe de la *moindre action* vérifié dans le mouvement d'un point matériel dû à des forces centrales.

837. En supposant dt constant dans les équations générales (2) de l'art. 829, on a

$$\frac{ddx}{dt} = X dt;\quad \frac{ddy}{dt} = Y dt;\quad \frac{ddz}{dt} = Z dt;$$

multipliant ces équations par des facteurs, savoir : 1°. la 1re. par y et la 2e. par x ; 2°. la 1re. par z et la 3e. par x ; 3°. la 2e. par z et la 3e. par y ; retranchant ensuite l'une de l'autre les équations produits de chaque couple ainsi combiné, les premiers membres des équations obtenues de cette manière seront susceptibles d'une première intégration, et on aura

$$\left.\begin{array}{l} y\,dx - x\,dy = dt\,[a_{,} + \int\{(yX - xY)\,dt\}] \\ x\,dz - z\,dx = dt\,[a_{,,} + \int\{(xZ - zX)\,dt\}] \\ y\,dz - z\,dy = dt\,[a_{,,,} + \int\{(yZ - zY)\,dt\}] \end{array}\right\}$$

($a_{,}, a_{,,}, a_{,,,}$ sont les constantes arbitraires introduites par l'intégration.)

838. Les surfaces élémentaires, dont les premiers membres de ces équations expriment les valeurs, méritent une attention particulière. Je suppose, comme à l'art. 820, pour fixer les idées relativement aux signes des quantités, que le mobile, pendant l'instant dt, parcourt un élément de courbe ds, situé dans la région des x, y, z positives, et que, d'après la direction de ds et le sens du mouvement, les incréments dx, dy, dz sont aussi positifs. Imaginant ensuite deux rayons vecteurs menés de l'origine des x, y, z aux extrémités de l'arc élémentaire ds, traçant les deux droites AX et AY à angle droit l'une sur l'autre, prenant YAX pour le plan des xy, faisant $AP = x$,
Fig. 2 $PM = y$, $PP' = Mm = dx$, $mM' = dy$, le triangle AMM' sera la projection orthogonale, sur le plan xy, du triangle formé par l'élément de courbe ds, projeté en MM', et par les rayons vecteurs menés de l'origine A à ses extrémités. Or on a *triangle* AMM' = *triangle* AMm + *triangle* MmM' − *triangle* $AM'm$ = $\frac{1}{2}(y\,dx + dy\,dx - x\,dy) = \frac{1}{2}(y\,dx - x\,dy)$. Le premier membre de la première équation est donc l'expression du double de la projection orthogonale, sur le plan xy, de l'aire élémentaire engendrée par le mobile, pendant l'instant dt, autour de l'origine des x, y, z ; et on trouvera, en suivant la même marche de raisonnement, que les premiers membres des deux autres équations, c'est-à-dire les expressions

[redacted]

unité, $yXdt - xYdt$ sera le moment, par rapport à l'axe des z, de la quantité du mouvement élémentaire imprimée au mobile, pendant l'instant dt, en vertu de l'action des puissances; pareillement $xZdt - zXdt$ et $yZdt - zYdt$ sont les moments respectifs de cette quantité de mouvement élémentaire par rapport aux axes des y et des x.

D'un autre côté l'expression $y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}$ est la valeur du moment, par rapport à l'axe des z, de la quantité de mouvement que le mobile a acquise, au bout du temps t, les expressions $x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt}$ et $y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}$ étant, respectivement, les moments, par rapport aux axes des y et des x, de la même quantité de mouvement.

Enfin $yXdt - xYdt$, $xZdt - zXdt$, $yZdt - zYdt$ sont les projections sur les plans coordonnés de l'aire élémentaire que le mobile décrirait autour de l'origine si, au point de sa trajectoire qui a x, y et z pour coordonnées, son mouvement avait lieu suivant la ligne de direction de la résultante générale des forces, avec la vîtesse $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$.

On retrouve dans ces rapprochements, les relations intimes qui existent entre les *moments* et les aires expliquées et démontrées art. 200 et suivants; on y voit aussi comment le *moment* de la quantité de mouvement acquise par le mobile, au bout du temps t, se compose de la cumulation des *moments* des quantités de mouvement élémentaires engendrées pendant chaque instant dt.

840. Un cas très-remarquable du mouvement d'un point matériel est celui dans lequel la direction de la résultante générale des forces passe constamment par un point fixe. Prenant ce point fixe pour origine des coordonnées x, y et z, et donnant d'ailleurs aux plans coordonnés des positions entièrement arbitraires, on voit que, quelques soient ces positions, les valeurs des moments dont les expressions sont sous le signe $\int$, dans les deuxièmes membres des équations de l'art. 837, seront nulles, puisque ces moments, par rapport à chacun des trois axes coordonnés, doivent être égaux à ceux de la résultante générale par rapport aux mêmes axes, et que ces derniers moments sont nécessairement nuls puisque la résultante passe par le point commun d'intersection des trois axes.

Les équations de l'art. 837 deviennent donc, dans le cas dont il s'agit

$$y dx - x dy = a_{,} dt;$$
$$x dz - z dx = a_{,,} dt;$$
$$y dz - z dy = a_{,,,} dt;$$

d'où il suit 1°. que les valeurs $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$ des moments, par rapport aux axes des z, y et x, de la quantité de mouvement initiale imprimée au mobile sont les valeurs constantes de ces moments pendant toute la durée du mouvement; 2°. que les projections orthogonales, sur les plans coordonnés des aires élémentaires décrites, successivement, par le mobile, pendant chaque élément de temps dt autour de l'origine, sont proportionnelles à dt ou égales entr'elles, sur chaque plan, lorsque dt est constant; d'où il suit que les projections orthogonales, sur les mêmes plans coordonnés, de l'aire finie décrite, pendant le temps t, autour de l'origine, est proportionnelle à ce temps.

841. Multipliant les 1re. 2e. 3e. équations de l'article précédent, respectivement, par $-z$, y et x et faisant la somme des trois équations produits, les 1ers. membres de ces équations se détruisent et on a, en divisant par dt la somme des seconds membres,

$$a_{,} z = a_{,,} y + a_{,,,} x;$$

d'où on conclut que, dans le cas auquel se rapportent ces équations, la trajectoire est une courbe plane décrite dans un plan qui passe par l'origine des coordonnées x, y, z où se trouve placé le point fixe sur lequel la résultante générale des forces est constamment dirigée.

Cette propriété s'étend, évidemment, au cas où la direction de la résultante générale est, pendant tout le cours du mouvement, parallèle [redacted]

à laquelle j'ai assujetti la posision des plans coordonnés, étant celle de faire passer ces plans par le centre d'action fixe de la résultante générale, je puis, après avoir démontré que le mobile se meut dans un plan qui passe par ce centre, prendre ce plan pour celui des x, y sur lequel les projections des aires seront, alors, les aires elles-mêmes.

Lorsque la résultante générale est nulle, et que le mouvemenr du mobile n'a lieu qu'en vertu d'une impulsion initiale, les aires décrites autour d'un point quelconque de l'espace sont proportionnelles au temps, proposition manifeste par elle-même, vu l'uniformité du mouvement qui a lieu dans ce cas, et qu'on lie à ce qui précède en considérant que la trajectoire, qui est alors une ligne droite, est contenue dans tous les plans dont elle est l'intersection commune. La *conservation des aires* que j'ai fait remarquer art. 769 se rapporte au cas dont je parle ; la ligne a pourrait avoir une direction et une longueur quelconques.

843. Les diverses propriétés démontrées dans les trois articles précédents sont déduites, comme conséquences, de la supposition de l'existence d'un centre d'action fixe sur la direction de la résultante générale ; mais en prenant comme propriété hypothétique celle qui rend proportionnelles au temps les projections sur les plans coordonnés des aires décrites autour de l'origine des x, y, z, on en aurait conclu toutes les autres. En effet cette propriété hypothétique donne immédiatement les équations de l'art. 840, par lesquelles on reconnaît que le mobile se meut dans un plan qui renferme l'origine des x, y, z; combinant ensuite avec les équations de l'art. 837 (qui doivent convenir indistinctement à tous les cas de mouvement) celles dont je viens de parler, lesquelles font alors la fonction d'équations de condition, on déduit de cette combinaison

$$yX - xY = 0\,;\quad xZ - zX = 0\,;\quad yZ - zY = 0\,;$$

équations qui énoncent l'égalité à zéro des sommes des moments des composantes par rapport aux trois axes coordonnés ; or cette circonstance suppose l'égalité à zéro des moments respectifs de la résultante générale par rapport à chacun de ces mêmes axes, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que la ligne de direction de cette résultante est constamment dirigée sur l'origine commun des x, y et z.

844. Je terminerai ce que j'avais à dire sur les propriétés générales du mouvement d'un point matériel par la vérification, dans ce mouvement, du principe appelé de la *moindre action.*

Je suppose, comme à l'art. 823 que la fonction $Xdx + Ydy + Zdz$ est intégrable par elle-même ; et faisant $\int(Xdx + Ydy + Zdz) = Q$, j'ai art. 822 les expressions suivantes du quarré de la vîtesse

$$v^2 = C + 2Q\,;\; v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\,;\; v^2 = \frac{ds}{dt}\,v\,;$$

desquelles on conclut

$$\frac{2vds}{dt} = C + 2Q + \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}.$$

Prenant les variations des deux membres et observant que, dans la variation de Q, les coëfficients différentiels X, Y et Z, indépendants des valeurs absolues des incréments de x, y et z, sont, par conséquent, les mêmes pour dx, dy, dz et pour $\delta x, \delta y$ et δz, on a, après avoir substitué, dans l'hypothèse de dt constant, à X, Y et Z leurs valeurs $\frac{ddx}{dt^2}$, $\frac{ddy}{dt^2}$, $\frac{ddz}{dt^2}$, toutes réductions faites,

$$\delta\,(vds) = \frac{d(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z)}{dt}\,;$$

intégrant et transposant, dans le premier membre, les signes δ et $\int$, on a

$$\delta\int(vds) = constante + \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{dt}\,;$$

la trajectoire et la courbe variée étant supposées avoir une origine commune, on a, à cette première limite de l'intégrale, $\delta x = 0, \delta y = 0, \delta z = 0$,

la motive plus, a été employée dans l'origine, pour désigner un principe moins général auquel est lié celui que j'ai appliqué, art. 768, à la détermination des lois du choc des corps doués d'une élasticité quelconque; *Maupertuis* en avait aussi déduit les lois de la *réflexion* et de la *réfraction* de la lumière; mais Euler, envisageant ensuite ce principe ou cette propriété, sous un point de vuë beaucoup plus étendu, démontra le premier, dans une dissertation imprimée en 1744 à la suite de son traité qui a pour titre *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, que, dans les trajectoires décrites en vertu de forces centrales, l'intégrale du produit de la vîtesse par l'élément de la courbe est toujours un *maximum* ou un *minimum*, ce qui est l'énoncé de l'équation (*a*) de l'article précédent.

L'illustre auteur de la *Mécanique analytique* a étendu cette propriété, qui, d'abord, ne s'appliquait qu'au mouvement d'un corps isolé, au mouvement d'un système de corps agissant les uns sur les autres d'une manière quelconque, et il a démontré que, dans tout système pareil, la somme des produits obtenus en multipliant chaque masse par l'intégrale du produit de la vîtesse de cette masse et de l'élément de la courbe qu'elle décrit, est constamment un *maximum* ou un *minimum*. Je donnerai, quand j'en serai au mouvement des systêmes étendus, la démonstration de cette dernière proposition qui est l'énoncé du principe dans toute sa généralité.

Mouvement des *projectiles* dans le vide, ou mouvement curviligne d'un point matériel pesant qui a reçu une impulsion initiale dans une direction formant un angle quelconque avec la verticale.

846. La théorie que je vais exposer est une application faite par Galilée de ses découvértes, sur le mouvement et sur les lois de sa composition, aux phénomènes résultants de la combinaison d'un mouvement uniforme et d'un mouvement uniformément varié; j'ai déjà dit, article 667, que ce grand philosophe avait posé les bases de la dynamique (*). Voici l'énoncé du problême.

(*) On trouve, dans plusieurs ouvrages, le détail des grandes découvertes de Galilée qui font époque dans l'histoire de l'esprit humain; mais je ne sache pas que personne ait parlé d'une de ses expériences les plus remarquables,

Un point matériel pesant est lancé dans le vide avec une vîtesse initiale U, qu'on appelle *vîtesse de projection*, dans une direction formant avec l'horizon un angle θ, qui est nommé *angle de projection*, et il s'agit de déterminer tous les phénomènes de son mouvement.

Le premier objet de détermination doit porter sur la *double* ou *simple courbure* de la *trajectoire*. Si on fait passer un plan vertical par la ligne de direction initiale du mobile, le premier élément de la trajectoire, à partir du point de départ, sera décrit en vertu de la force de *projection* et de la force de la pesanteur, toutes deux dirigées dans le plan dont je viens de parler ; ce premier élément sera donc dans ce même plan ; le second élément de courbe y sera aussi parce que la direction du mouvement, à l'extrémité du premier élément, et celle de la pesanteur, qui modifie ce mouvement, sont encore dans le plan dont il s'agit, et le même raisonnemeut s'applique à tous les éléments consécutifs de la *trajectoire*. Le point matériel ne sortira donc pas du plan vertical mené par sa ligne de direction initiale ; il n'éprouvera,

---

ayant pour objet un phénomène qui a fixé, depuis plusieurs années, l'attention des savants, et dont les lois fournissent la matière d'un des problêmes de Dynamique les plus intéressants et les plus difficiles qui aient encore occupé les géomètres. Je veux parler des vibrations des *lames élastiques* sur lesquelles M. Chladni a publié un ouvrage allemand en 1802, et un ouvrage français, beaucoup plus complet, en 1809. On sait que M. Chladni, pour rendre sensibles les vibrations partielles de ces lames, les couvre de poussière, et que, suivant la manière dont il produit le son qu'elles rendent, la couche de poussière se divise spontanément en plusieurs compartiments séparés les uns des autres par des courbes ou *axes d'équilibre*, dont les formes très-régulières peuvent être variées à l'infini.

dans son mouvement, l'action d'aucune force perpendiculaire à ce plan; la trajectoire est une courbe plane.

847. Cette conclusion se déduit très-facilement des équations générales du mouvement de l'art. 820; supposant que le plan xy est horizontal (ce qui rend l'axe des z et les plans des xz et yz verticaux), et que le mobile, partant de l'origine des x, y, z, reçoit l'impulsion initiale à laquelle est due la vîtesse U, dans une direction formant l'angle θ avec le plan xy, et telle que ce mobile soit poussé au-dessus du plan horizontal des xy dans la région des x, y, z positives, on aura, en continuant de désigner par g la force accélératrice de la pesanteur,

$$X = 0\,;\quad Y = 0\,;\quad Z = -g\,;$$

et les équations de l'article cité deviennent, en prenant dt pour différentielle constante,

$$\frac{ddx}{dt^2} = 0\,;\quad \frac{ddy}{dt^2} = 0\,;\quad \frac{ddz}{dt^2} = -g\,;$$

les deux premières donnent $\dfrac{dx}{dy} =$ *constante*, ainsi la projection de la trajectoire, sur le plan horizontal, est une ligne droite laquelle doit passer par l'origine des coordonnées, puisque cette origine étant placée au point de départ du mobile, on doit avoir, dans l'intégrale générale $x = Ay + B$, la constante $B = 0$. La *trajectoire* est donc contenue dans le plan vertical passant par l'origine des coordonnées et par la ligne de direction initiale.

848. D'après ce résultat je puis, pour la commodité du calcul, supposer que le plan vertical renfermant la trajectoire est celui des xz, au moyen de quoi je suis dispensé d'avoir égard à l'équation $ddy = 0$; les deux équations $\dfrac{ddx}{dt^2} = 0$, $\dfrac{ddz}{dt^2} = -g$, me donnent par une première intégration

$$\frac{dx}{dt} = B\,;\quad \frac{dz}{dt} = -gt + B'\,;$$

et par une seconde intégration

$$x = Bt + C\,;\quad z = -\tfrac{1}{2}gt^2 + B't + C'\,;$$

B, C, B', C', sont les constantes arbitraires introduites par l'intégration.

on voit, par la 1re. équation, que la vîtesse horizontale est constante,

ou qu'à un instant quelconque du mouvement elle est la même qu'au 1er. instant; or sa valeur initiale est $U \cos.\theta$, d'où $B = U \cos.\theta$; supposant ensuite que l'on compte *zéro temps* au moment où le mobile est lancé sous l'angle de projection θ, on a les valeurs simultanées $t = 0$, $x = 0$, $z = 0$, d'où $C = 0$, $C' = 0$. Enfin la valeur initiale de la vîtesse verticale $\frac{dz}{dt}$ étant $U \sin.\theta$, on a au 1er. instant $t = 0$ et $\frac{dz}{dt} = U \sin.\theta$, d'où $B' = U \sin.\theta$.

Substituant ces valeurs dans les équations précédentes désignant, par V et W respectivement, les vîtesses horizontale et verticale au bout du temps t, on a

$$(1) \ldots\ldots \{V = U\cos.\theta\,;\ W = U\sin.\theta - gt\,;\}$$

$$(2) \ldots\ldots \{x = tU\cos.\theta\,;\ z = tU\sin.\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.\}$$

849. Les équations précédentes suffisent pour déterminer toutes les circonstances du mouvement, puisqu'elles donnent les relations entre le temps, les coordonnées qui fixent la position du point matériel mobile, ses vîtesses horizontale et verticale, et sa vîtesse dans le sens de la courbe qui a pour valeur $v = \sqrt{V^2 + W^2} = (U^2 - 2Ugt\sin.\theta + g^2t^2)^{\frac{1}{2}}$. Éliminant t de cette équation par le moyen de la 2e. équation (2) on a

$$v^2 = U^2 - 2gz,$$

valeur identique avec celle qu'on tirerait de l'équation générale de l'art. 822 en y faisant $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$, et qui fait voir que la vîtesse du mobile, à la hauteur z au-dessus du point de départ, est la même que si le mobile se fût élevé verticalement à cette hauteur z, après avoir été lancé de bas en haut avec la vitesse U imprimée dans

distance horizontale $2H \sin.\theta \cos.\theta$, ou $H \sin.(2\theta)$, du point de départ, et le sommet de la parabole étant à une hauteur verticale $H \sin.^2\theta$ au-dessus de l'horizontale menée par ce point de départ; le paramètre, déduit de ces deux valeurs, est égal à $4H \cos.^2\theta$.

851. Puisque l'axe de la parabole est vertical il doit partager en deux parties égales les sécantes horizontales de la courbe, d'où il suit que cette courbe rencontre l'horizontale, passant par le point de départ, à une distance $2H \sin.(2\theta)$ de ce point, et que la plus grande ordonnée verticale positive, qui a pour valeur $H \sin.^2\theta$, est au milieu de cette distance.

La distance $2H \sin.(2\theta)$ et la hauteur $H \sin.^2\theta$ s'appellent respectivement *amplitude du jet* et *hauteur du jet;* le sommet de la parabole, ou extrémité supérieure de la hauteur $H \sin.^2\theta$, est le *point culminant.*

852. Voici une propriété curieuse déduite des formules précédentes. Pour une vîtesse de projection donnée, c'est-à-dire pour une valeur donnée de H, il y a toujours deux *angles de projection* θ qui procurent la même *amplitude de jet* $2H \sin.(2\theta)$, et, π étant la demi-circonférence dont le rayon $= 1$, la demi-somme de ces deux angles est égale à $\frac{1}{4}\pi$, ainsi les extrémités supérieures des arcs qui les mesurent (leur origine commune étant sur l'horizontale menée par le point de départ) sont placées de part et d'autre et à égale distance du point-milieu du quart de cercle. En effet soit $\theta = \frac{1}{4}\pi \pm \omega$, la distance $2H \sin.(2\theta)$ devient $2H \sin.\{2(\frac{1}{4}\pi \pm \omega)\}$ et, comme on a $\sin.(\frac{1}{2}\pi + 2\omega) = \sin.(\frac{1}{2}\pi - 2\omega)$ ou $\sin.\{2(\frac{1}{4}\pi + \omega)\} = \sin.\{2(\frac{1}{4}\pi - \omega)\}$, la même amplitude s'obtiendra sous chacun des *angles de projection* $\frac{1}{4}\pi - \omega$ et $\frac{1}{4}\pi + \omega$, pour une valeur déterminée de H ou de la *vîtesse de projection.*

853. L'amplitude $2H \sin.(\frac{1}{2}\pi \pm 2\omega)$ diminue à mesure que ω augmente, H étant constante, et sa plus grande valeur a lieu lorsque $\omega = 0$, ou lorsque l'*angle de projection* $\theta = \frac{1}{4}\pi$; ce maximum d'amplitude se déduit aussi, immédiatement, de l'expression $2H \sin.(2\theta)$ dont le maximum a lieu lorsque $2\theta = \frac{1}{2}\pi$.

854. Faisant $H \sin.(2\theta) = \xi$ et $H \sin.^2\theta = \eta$, les coordonnées horizontale et verticale du *point culminant* seront ξ et η; lorsque l'amplitude du jet 2ξ sera donnée avec l'angle de projection on trouvera la vîtesse initiale nécessaire pour que le mobile atteigne l'extrémité de la distance

2ξ, par l'équation $H = \frac{\xi}{\sin.(2\theta)}$; si l'amplitude et la force d'impulsion initiale sont données, l'angle de projection se calculera par l'équation $\sin.(2\theta) = \frac{\xi}{H}$; il faudra, dans ce dernier cas, pour que le problême soit possible, qu'on ait $\frac{\xi}{H} < 1$.

Pareillement les équations $H = \frac{\eta}{\sin.^2\theta}$ et $\sin.\theta = \sqrt{\frac{\eta}{H}}$ feront connaître l'inconnue H, θ étant donné, ou l'inconnue θ, H étant donnée, lorsqu'on voudra lancer le mobile à une hauteur η assignée d'avance ; et, si θ est l'inconnue, le problême ne sera possible qu'autant qu'on aura $\frac{\eta}{H} < 1$.

855. Tout ce qui précède se rapporte au cas d'une impulsion initiale dirigée de manière que le mobile s'élève au-dessus de l'horizontale passant par le point de départ ; lorsque la direction initiale est inclinée au-dessous de cette horizontale il faut, dans toutes les formules précédentes, changer les signes de sin. θ et tang. θ ; ainsi l'équation de la trajectoire devient

$$z = -\left\{x \operatorname{tang}.\theta + \tfrac{1}{4}\,\frac{x^2}{H\cos.^2\theta}\right\};$$

l'axe de la parabole est une verticale située en arrière du point de départ à une distance $H\sin.(2\theta)$ de ce point, et le sommet de cette parabole est à une hauteur $H\sin.^2\theta$ au-dessus de l'axe des x.

856. Je terminerai cette théorie de la *balistique* dans le vide par la solution de quelques problêmes liés à l'histoire de cette théorie.

Si on élimine H entre les équations de l'art. 854 qui donnent les [redacted]

jection variable, la position du point de départ demeurant toujours invariable, on obtiendra l'équation de la courbe sur laquelle se trouvent tous les *points culminants* des *trajectoires* en éliminant θ des équations $\xi = 2H \sin.\theta \cos.\theta$ et $\eta = H \sin.^2 \theta$ et on aura

$$\xi = 2\sqrt{\eta(H-\eta)};$$

élevez, au point de départ, une verticale $= H$, et sur cette verticale, comme petit axe, décrivez une ellipse dont le grand axe $= 2H$, cette ellipse sera le *lieu géométrique* cherché.

858. On a vu, art. 856, que toutes les trajectoires décrites, sous un même *angle de projection*, en vertu d'impulsions initiales quelconques, ont pour tangente commune une droite passant par le point de départ; dans le cas contraire, celui des *trajectoires* décrites en vertu d'une même impulsion initiale sous différents *angles de projections*, la détermination de la courbe tangente à toutes les trajectoires est une application de la théorie des *solutions particulières des équations différentielles*. Il faut pour trouver cette courbe, différentier l'équation générale de la trajectoire, art. 850, par rapport à l'angle de projection θ et éliminer ensuite θ entre l'équation primitive et l'équation différentiée.

Pour faire commodément le calcul, on mettra l'équation de la trajectoire sous la forme suivante

$$x \sin.(2\theta) = z \cos.(2\theta) + z + \tfrac{1}{2}\,\frac{x^2}{H};$$

et différentiant par rapport à θ on aura

$$x \cos.(2\theta) = -z \sin.(2\theta)$$

d'où, $\sin.(2\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}$; $\cos.(2\theta) = \dfrac{-z}{\sqrt{x^2+z^2}}$;

valeurs qui substituées dans l'équation primitive donne

$$x^2 = 4H(H-z)$$

La courbe tangente à toutes les *trajectoires* est une parabole dont l'axe vertical passe par le point de départ, qui est le foyer de la parabole, le sommet étant placé à une hauteur H au-dessus de ce même point, et le paramètre étant égal à $4H$.

Mouvement curviligne des projectiles pesants dans un milieu résistant. Formules générales indépendantes de toute hypothèse sur la loi de la résistance.

859. La théorie du mouvement parabolique des projectiles pesants

dans le vide, publiée pour la première fois, par Galilée, en 1638, a été, pendant plus d'un siècle, regardée comme applicable au mouvement des corps lancés par les bouches à feu, sans égard à la résistance de l'atmosphère dont on croyait pouvoir négliger l'influence, quoique *Newton* se fut occupé du problême de la trajectoire dans un milieu résistant, dont *Jean Bernouilli* donna ensuite une solution en considérant la résistance du milieu comme proportionnelle à une puissance quelconque de la vîtesse ; c'est d'après l'hypothèse d'une résistance nulle, ou plutôt d'une résistance compatible avec une trajectoire fort-peu différente de la parabole, que sont rédigés l'ouvrage anglais de *Robert Anderson*, intitulé *Art of gunnery*, et publié en 1674, *L'art de jeter les bombes* de *Blondel*, publié en 1683, le mémoire de *Maupertuis* sur la *balistique*, qu'on trouve dans le volume de l'Académie des Sciences de Paris de 1731, le *Bombardier français* de *Bélidor*, publié en 1734 etc. *Blondel* et *Bélidor* ont même essayé de réfuter les objections faites contre la supposition du mouvement parabolique dans un milieu résistant, et Bélidor prétend avoir fait des expériences qui détruisent ces objections, mais la doctrine des auteurs que je viens de citer fut généralement abandonnée lorsque *Benjamin Robins* eût mis au jour son livre intitulé *A new theory of Gunnery*, imprimé en 1742, et contenant une nouvelle théorie de la *balistique*, appuyée sur de très-belles expériences qu'il avait commencées en 1740. Ce livre a été commenté par Euler, et Mr. Lombard en a donné, en 1783, une édition française, à laquelle il a joint le commentaire d'Euler et des notes de sa composition.

Pour faire sentir, par un seul des résultats consignés dans l'ouvrage dont je viens de parler, combien il est important, dans la pratique de

est moins rapide, ensorte que pour de petites vîtesses initiales et des angles de projections peu considérables, les phénomènes du mouvement se calculent, avec une exactitude suffisante, par les formules données depuis l'article 846.

860. Je vais d'abord présenter l'analyse du problême de la trajectoire dans un milieu résistant, d'une manière générale et indépendante de toute hypothèse sur la loi de la résistance du milieu; je supposerai ensuite, comme je l'ai déjà fait art. 739 et suivants, que cette résistance est proportionnelle au quarré de la vîtesse; j'exposerai les raisons qui motivent cette hypothèse, et je ferai connaître les limites entre lesquelles elle est admissible, lorsque j'en serai à la partie du cours où je dois traiter de la résistance des fluides.

Le mobile est une sphère pesante, homogène, d'un rayon fini ou infiniment petit, qui après avoir reçu une impulsion dirigée par son centre de gravité ou de figure, se meut dans un fluide stagnant et homogène.

Le temps étant désigné par t, soit $\rho\,dt$ la quantité de mouvement élémentaire que la résistance du milieu fait perdre au mobile pendant un instant quelconque dt, ρ fera la fonction d'une force assujettie, art. 739, à la condition particulière d'avoir toujours un sens d'action directement opposé au mouvement actuel du mobile, ensorte que la ligne, suivant laquelle ρ produira son effet pendant l'instant dt, sera la tangente à la trajectoire menée au point de cette courbe où le mobile se trouvera au même instant.

Soit m la masse du corps, faisant $\frac{\rho}{m} = r$, la quantité r sera la *force retardatrice* due à la résistance du milieu, comparable à la quantité g par laquelle j'ai représenté, jusqu'à présent, la *force* due à la pesanteur, laquelle est *accélératrice* ou *retardatrice* suivant le sens de mouvement du mobile pesant, en observant néanmoins que r varie d'un instant à l'autre, et que g est constant.

861. La position du mobile, au bout du temps t, est, comme à l'art. 847, déterminée par trois coordonnées rectangulaires x, y et z, prises parallèlement à des axes fixes; le plan des xy sera, comme à l'article cité, supposé horizontal, et le point de départ sera censé être l'origine des x, y, z. Or, d'après l'état de la question, la vîtesse du mobile, au bout du temps t, prise dans le sens de la trajectoire et que je désigne par

v, est modifiée 1°. pour la pesanteur qui, dans l'hypothèse où le mouvement du corps l'élève au-dessus du plan xy, retranche de v la quantité $\frac{dz}{ds}\,gdt$; 2°. par la résistance du milieu qui diminue v de rdt, ensorte qu'on a, dans le sens du mouvement, $dv = -\left(r + \frac{dz}{ds}g\right)dt$, équation de laquelle on déduit l'expression de la *force tangentielle* S (art. 828 et 829), savoir :

$$(1) \ldots\ldots S = \frac{dv}{dt} = -\left(r + \frac{dz}{ds}\,g\right);$$

la force normale N, dont l'unique effet est d'infléchir la route du mobile, ayant pour valeur

$$(2) \ldots\ldots\ldots N = g\,\frac{\sqrt{ds^2 - dz^2}}{ds}.$$

862. Le plan vertical qui renferme l'élément de courbe ds, actuellement parcouru, est celui dans lequel s'exercent les actions des forces r et g, ou de la force r et des composantes $\frac{dz}{ds}\,g$ et N, employées soit à faire varier le mouvement soit à changer sa direction ; l'élément de courbe ds', que le mobile est prêt à parcourir, sera donc aussi dans ce plan ; mais ce mobile, en parcourant le 2e. élément de courbe ds', sera animé de la vîtesse v' et soumis à l'action des puissances r' et g, ou r', $\frac{dz'}{ds'}\,g$ et N', lesquelles agiront encore dans le plan dont je viens de parler, ce même plan renfermera donc le 3e. élément de courbe ds'' et ainsi de suite ; et comme on peut faire ce raisonnement en com-

863. On retrouverait cette même propriété en posant, comme je l'ai fait art. 847, les trois équations générales du mouvement, qui donnent les valeurs des composantes $d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $d\left(\frac{dz}{dt}\right)$; l'élimination de rdt entre les deux premières, qui ne contiennent pas g, fournirait la relation $\frac{dy}{dx}=$ *constante*. Je puis donc, comme à l'article cité, supposer que le mouvement a lieu dans le plan xz; supposant, de plus que le sens du mouvement actuel est tel que dx et dz sont des incréments positifs, et, faisant dans les 1.re et 3.e équations de l'art. 820, respectivement, $X=-\frac{dx}{ds}r$ et $Z=-\left(g+\frac{dz}{ds}r\right)$, j'ai les équations générales du mouvement

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right)=-r\frac{dx}{ds}dt;$$

$$d\left(\frac{dz}{dt}\right)=-\left(g+r\frac{dz}{ds}\right)dt.$$

864. Effectuant la différentiation des 1.ers membres, dans l'hypothèse de dx constant, on a

$$(1)\ \ldots\left\{\begin{aligned}&\frac{ddt}{dt^2}=\frac{rdt}{ds};\\&\frac{ddz\,dt-ddt\,dz}{dt^3}=-\left(g+\frac{rdz}{ds}\right)dt.\end{aligned}\right.$$

On éliminera ddt entre ces deux équations, en multipliant la 1.re par dz, et ajoutant l'équation produit à la 2.e; ce qui donnera

---

Robins et les remarques d'*Euler* et de *Lombard* sur les explications données par l'auteur anglais, explications et remarques que les élèves seront en état de comprendre et d'apprécier, lorsqu'ils auront étudié la théorie du mouvement des corps solides; mais ces faits ne nuisent en rien à la rigueur du raisonnement consigné dans l'art. 862, parceque ce raisonnement suppose, art. 860, que le mobile est un corps sphérique, homogène, d'un diamère fini ou infiniment petit, qui reçoit une impulsion initiale passant par son centre de gravité et de figure, et qui se meut dans un fluide stagnant et homogène; c'est plus de conditions qu'il n'en faut pour rendre la trajectoire une courbe plane.

$$(2)\ldots\left\{\begin{array}{l} ddz = -gdt^2; \\ dq\,dx = -gdt^2; \end{array}\right.$$

La deuxième équation ci-à-côté n'est autre chose que la première, dans laquelle on a fait $dz = qdx$.

Pour avoir une équation entre la résistance r et les coordonnées de la trajectoire, indépendante du temps, je différentie la deuxième équation (2) et j'ai

$$(3)\ldots\ldots\ldots\ ddq\,dx = -2gdtddt.$$

ensuite, au moyen de la valeur $dt^2 = -\frac{dq\,dx}{g}$, j'élimine dt de la 1.ere équation (1) et de l'équation (3); j'obtiens ainsi deux équations qui ne contiennent plus que ddt, et, éliminant cette différentielle seconde, j'arrive à l'équation unique

$$(4)\ldots\ldots\ldots\ \frac{r}{g} = -\frac{ds}{dx}\cdot\frac{ddq}{2dq^2};$$

multipliant la deuxième équation (2) par $\frac{ds^2}{dt^2\,dq\,dx}$ on a

$$\frac{ds^2}{dt^2} = -\frac{gds^2}{dq\,dx},\ \text{ou, parceque } v = \frac{ds}{dt},$$

$$(5)\ldots\ldots\ v^2 = -\frac{gds^2}{dq\,dx} = -\frac{gds^2}{ddz};$$

expression de la vîtesse, à un point quelconque de la trajectoire, qui ne contient plus la résistance.

Analyse particulière du problême de la trajectoire dans le cas où la résistance du milieu est proportionnelle au quarré de la vîtesse. Équations différentielles de la courbe, ses asymptotes, sa forme générale.

865. Tels sont les principaux résultats auxquels on peut arriver par

[redacted]

v^2 par une constante $\frac{1}{2}A$ dont l'expérience seule peut faire connaître la valeur ; j'aurai ainsi

(1) . . . . $r = \frac{1}{2}Av^2$;

cette valeur de r, introduite dans l'équation (4) de l'article précédent, donne

(2) . . . . $v^2 = -\frac{g}{A} \cdot \frac{ds}{dx} \cdot \frac{ddq}{dq^2}$;

et en égalant le 2.e membre de cette équation à celui de l'équation (5) de l'article cité

(3) . . . . $ds = \frac{ddq}{Adq}$;

d'où on tire par l'intégration, dx étant la différentielle constante,

(4) . . . $\frac{dq}{dx} = Ce^{As}$, C est la constante arbitraire ; $e = 2{,}71828$ est la base du système des logarithmes népériens.

On déduit de la 2.e équation de l'art. précédent $\frac{dq}{dx} = -\frac{gdt^2}{dx^2}$, d'où

(5) . . . . $Ce^{As} = -\frac{gdt^2}{dx^2}$,

$\frac{dx}{dt}$ est la valeur de la vîtesse horizontale ; pour déterminer la constante C je suppose que l'impulsion initiale imprimée au mobile, à l'origine de s, lui ait communiqué une vîtesse U, dans une direction faisant l'angle θ avec l'horizontale, ou avec l'axe des x ; j'ai donc les valeurs initiales $s = 0$ et $\frac{dx}{dt} = U \cos.\theta$,

d'où $\frac{dt^2}{dx^2} = \frac{1}{U^2 \cos.^2\theta}$; $C = -\frac{g}{U^2 \cos.^2\theta}$; et (4) devient

(6) . . . . . . $\frac{dq}{dx} = \frac{-g}{U^2 \cos.^2\theta} \cdot e^{As}$.

Soit H la hauteur à laquelle est due la vîtesse U, on a $U^2 = 2gH$ et

(7) . . . . $-e^{As} = 2H \cos.^2\theta \cdot \frac{dq}{dx}$.

Je multiplie le 1.er membre de cette équation par ds, le 2.e par la valeur $dx\sqrt{1+q^2}$ de ds, et j'ai l'équation séparée

$$(8) \ldots\ldots -ds\, e^{As} = 2H\cos.^2\theta \cdot dq\sqrt{1+q^2};$$

pour intégrer cette équation je fais $\sqrt{1+q^2} = \chi - q$

d'où $dq\sqrt{1+q^2} = \frac{1}{4}\chi\, d\chi + \frac{1}{2}\,\frac{d\chi}{\chi} + \frac{1}{4}\,\frac{d\chi}{\chi^3}$;

et, cette valeur étant introduite dant le 2e. membre de (8), on a, par l'intégration,

$$C - \frac{e^{As}}{AH\cos.^2\theta} = \log.\chi + \tfrac{1}{4}\,\frac{(\chi^2-1)(\chi^2+1)}{\chi^2};$$

or $\chi = q + \sqrt{1+q^2}$ et $\frac{(\chi^2-1)(\chi^2+1)}{4\chi^2} = q\sqrt{1+q^2}$, subs-tituant ces valeurs dans l'équation précédente

$$(9) \ldots q\sqrt{1+q^2} + \log.\{q+\sqrt{1+q^2}\} = C' - \frac{e^{As}}{AH\cos.^2\theta},$$

déterminant, ensuite, la constante par la condition que $q = \text{tang.}\,\theta$, lorsque $s = 0$, et faisant

$$(10) \ldots\ldots \frac{\sin.\,\theta}{\cos.^2\theta} + \log.\,\text{tang.}\left(\frac{\frac{1}{2}\pi+\theta}{2}\right) = f;$$

(π est la demi-circonférence dont le rayon $= 1$) on a

$$(11) \ldots\ldots C' = \frac{1}{AH\cos.^2\theta} + f;$$

l'équation (9) devient

$$(12) \ldots e^{As} = 1 + AH\cos.^2\theta\{f - q\sqrt{1+q^2} - \log.[q+\sqrt{1+q^2}]\}.$$

866. Il est facile maintenant d'avoir deux équations desquelles, si leur [redacted]

$$(2) \ldots dz = \frac{q\,dq}{\frac{1}{2}A\{q\sqrt{1+q^2}+\log.(q+\sqrt{1+q^2})-C'\}};$$

si ces équations étaient intégrables on en conclurait, par l'élimination de q, une équation unique entre x et z, qui serait l'équation de la trajectoire ; mais cette intégration, si elle n'est pas impossible, échappe du moins à toutes les méthodes dont les analystes sont actuellement en possession. Je vais, en conséquence, chercher à tirer parti des équations différentielles pour déterminer la forme et les propriétés générales de la trajectoire, calculer, par approximation, ses coordonnées et la construire par points.

867. Le meilleur moyen de se faire une idée de la forme générale de la trajectoire est celui de la comparer avec la courbe décrite dans un milieu non-résistant; pour cela je fais $A=0$ dans l'équation (8) de l'art. (865) et j'ai, en désignant par s', l'arc parabolique qui a la même origine que s, dont la tangente, menée à son extrémité, est parallèle à la tangente menée à l'extrémité de s, et qui est décrit, dans le vide, en vertu de la même impulsion et de la même direction initiales.

$$(1) \ldots\ldots -ds' = 2H\cos.^2\theta \cdot dq\sqrt{1+q^2}.$$

Appliquant à l'intégration de cette équation les procédés de calcul indiqués à l'article cité, on a

$$(2) \ldots s' = H\cos.^2\theta\{f-q\sqrt{1+q^2}-\log.[q+\sqrt{1+q^2}]\};$$

et cette équation comparée à l'équation (12) de l'art. 865 donne la relation $e^{As}=As'+1$, entre les arcs s et s' correspondants à une même valeur extrême de q ou de $\frac{dz}{dx}$, relation de laquelle on déduit

$$(3) \ldots\ldots \pm As = \log.(1 \pm As');$$

les signes supérieurs et inférieurs étant, respectivement, applicables à la partie de la courbe effectivement parcourue par le mobile, et à sa continuation de l'autre côté du point de départ.

868. Considérant d'abord cette seconde partie, ou continuation de la courbe sur laquelle s et s' sont négatifs, si on y suppose $s'=\frac{1}{A}$, on a $-s=\frac{\log.0}{A}=\infty$, d'où je conclus qu'il existe un arc fini de la partie négative de la trajectoire parabolique, tel que la tangente

menée à l'extrémité de cet arc, n'a sa correspondante, ou sa parallèle, sur la partie négative de l'autre trajectoire, qu'à l'extrémité d'un arc de longueur infinie.

On conclut de cette propriété que la partie de la trajectoire réelle, correspondante aux x et z négatives, a une asymptote inclinée à l'horizon, et formant, avec l'axe des x, un angle plus grand que θ, lequel angle se détermine en substituant, dans l'équation (2) de l'article précédent, $\frac{1}{A}$ à s' et calculant la valeur de q qui résulte de cette substitution.

869. Voici une remarque sur la longueur $\frac{1}{A}$ de l'arc parabolique dont la tangente extrême est parallèle à l'asymptote de la trajectoire que je ne dois pas omettre. Soit $r = g$ on aura, art. 865 équation (1), $v^2 = \frac{1}{A} \cdot 2g$; donc, lorsque $r = g$, ou lorsque le produit de la masse du mobile par la force retardatrice r est égal au produit de cette masse par la force accélératrice g de la pesanteur, $\frac{1}{A}$ est la hauteur due à la vîtesse qui a lieu dans ce cas, c'est-à-dire à la vîtesse qui rend la résistance du milieu égale au poids du mobile.

870. Considérons maintenant la partie de la courbe effectivement parcourue par le mobile, celle sur laquelle se comptent les s positives. Ce mobile étant supposé lancé dans une direction initiale telle qu'il s'élève, d'abord, au-dessus de l'horizontale passant par son point de départ, arrive, au bout d'un certain temps, au point culminant de sa trajectoire, celui où la tangente à cette courbe est horizontale et où on a $q = 0$.

[redacted]

pidement que le premier dans la branche descendante. L'arc s', qui appartient à la trajectoire parabolique, a une tangente verticale située à une distance infinie de la verticale passant par le point de départ ; la direction de l'élément ds de l'arc s de la trajectoire réelle s'approche donc de plus en plus d'être verticale, ou ce qui revient au même, q s'approche d'être infini à mesure que s augmente, et ne le devient rigoureusement que lorsque s est infinie, c'est-à-dire à une distance infinie, mesurée dans le sens de la courbe, de l'horizontale passant par le point de départ ; mais comme, d'après l'équation ci-dessus citée, l'inclinaison de ds ou la valeur de q croit, sur la branche descendante, dans une proportion qu'on pourrait dire être incomparablement plus grande que celle des accroissements de s, il y a lieu de soupçonner que cette branche ne s'éloigne pas à l'infini de la verticale passant par le point de départ, comme la branche parabolique, et, par conséquent, que l'arc s a, du côté positif, une asymptote verticale ; voici comment on changera ce soupçon en certitude.

Je désigne par χ une partie positive et déterminée de s, dont l'origine soit au point de départ, et l'autre extrémité à un des points de s où l'angle formé par la verticale est très-petit et qu'on peut supposer placé, sur la branche descendante, au-dessous de l'horizontale passant par le point de départ, ou par l'origine commune de s, x et z. Faisant $s-\chi=\sigma$, on a $s=\chi+\sigma$ et $ds=d\sigma$; désignant, de plus, par a et $-c$ les coordonnées du point dont il s'agit, respectivement parallèles aux x et aux z, et posant les équations $x=a+\xi$; $-z=-(c+\zeta)$; on a $dx=d\xi$;

$$-dz=-d\zeta ;\ q=\frac{-dz}{dx}=\frac{-d\zeta}{d\xi} ;\ dq=-d\left(\frac{dz}{dx}\right)=-d\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right) ;$$

enfin les lettres $B, C, E, G, G', G'', K, K'$ et L représentant des constantes, l'équation (8) de l'art. 865 devient, en observant que la lettre q peut y être conservée

$$-d\sigma e^{A(\chi+\sigma)}=2H\cos.^2\theta\, dq\sqrt{1+q^2}.$$

Or, en ne considérant cette équation que relativement aux valeurs correspondantes de s et q dans la partie positive de σ, on peut, eu égard aux grandes valeurs de q dans cette partie, négliger l'unité par rapport à q^2 ce qui réduit le radical $\sqrt{1+q^2}$ à $-q$ (les valeurs de q et dq étant négatives sur toute la branche descendante), et l'équation

précédente devient $d\sigma e^{A(\chi+\sigma)} = Bq\,dq$, (en faisant $B = -2H\cos.^2\theta$) ayant, pour intégrale, $e^{A(\chi+\sigma)} = Cq^2 + E$. Introduisant, maintenant, dans l'équation (7) de l'art. 865, les valeurs ci-dessus données aux variables du problême, et, éliminant $e^{A(\chi+\sigma)}$ entre cette équation et celle qu'on vient d'obtenir par l'intégration, on a $\frac{Bdq}{d\xi} = Cq^2 + E$, d'où

$$d\xi = \frac{G\,dq}{q^2 + L^2}\,;$$

équation de la quelle on déduit $\xi = G'\left\{\text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{q}{L}\right) + K\right\}$ ou $\xi = G''\left\{\log.\left(\frac{q+L}{q-L}\right) + \log. K'\right\}$, suivant que L^2 est positif ou négatif; il ne serait pas difficile de reconnaître quel est le signe de L^2, mais cette détermination est inutile à l'objet unique de l'analyse précédente qui est de prouver qu'une valeur infinie de q répond à une valeur finie de ξ ou de $x = a + \xi$ et que, par conséquent, la branche descendante de la trajectoire a une asymptote verticale; ce résultat se déduit également de l'une et l'autre intégrale.

871. Il est aisé, d'après ce qui précède, de se faire une idée de la forme générale de la trajectoire dans un milieu résistant. A étant le point de départ, AX une horizontale et AZ une verticale passant par ce point, si $AO'EH$ représente la parabole qui serait décrite dans un milieu non résistant, avec une vîtesse initiale U et sous un angle de projection $= \theta$, $AOCG$ pourra représenter la courbe décrite dans le milieu résistant; AO est la branche ascendante qui s'abaisse graduel- [redacted]

Fig. 3

et coupant l'axe horizontal AX à une distance finie AS de l'origine A, est une seconde asymptote de la trajectoire réelle.

On voit que la courbe $AOCG$ a quelque ressemblance avec une hyperbole tracée entre les asymptotes QR et QT, ce qui a donné à Newton l'idée de chercher à déterminer la densité du milieu qui pouvait rendre la trajectoire une hyperbole, problême facile à résoudre par les formules des art. 861 et suivants ; celles que j'en ai déduites, depuis l'art. 865, supposent la densité constante et donnent une courbe sensiblement différente de l'hyperbole, surtout lorsque l'angle de projection n'est pas très-petit. Il est évident, d'après tout ce qui précède, que, si une droite divisait l'angle RQT en deux parties égales, les branches de la courbe $AOCG$, qui se trouveraient de part et d'autre de cette droite, ne seraient ni égales ni semblables.

Calcul, par parties, des coordonnées de la trajectoire et construction de cette courbe par points.

872. Les équations de l'art. 866, desquelles on déduirait, si elles étaient intégrables, la relation entre les coordonnées de la courbe, se refusant à toutes les méthodes rigoureuses connues, il faut, pour construire la courbe, avoir recours à quelque méthode d'approximation ; en voici une dont les calculs sont faciles.

J'appelle ϕ l'angle formé par l'horizon et par la tangente menée à l'extrémité de l'arc s, et j'ai

$$q\sqrt{1+q^2} = \frac{\text{tang.}\,\phi}{\cos.\,\phi};\; q+\sqrt{1+q^2} = \text{tang.}\left(\frac{\frac{1}{2}\pi+\phi}{2}\right).$$

L'équation (12) de l'art. 865 devient, en y substituant ces valeurs, et faisant $AH\cos.^2\theta = n$,

$$s = \frac{1}{A}\log.\left\{1 + n\left[f - \frac{\text{tang.}\,\phi}{\cos.\,\phi} - \log.\,\text{tang.}\left(\frac{\frac{1}{2}\pi+\phi}{2}\right)\right]\right\}.$$

Si on veut calculer les valeurs de s sans avoir besoin de se servir de tables de logarithmes hyperboliques ou népériens, on fera

$$\mu = 2{,}302585$$

et on aura

$$s = \frac{\mu}{A}\log.\left\{1 + n\left[f - \frac{\text{tang.}\,\phi}{\cos.\,\phi} - \mu\log.\,\text{tang.}\left(\frac{\frac{1}{2}\pi+\phi}{2}\right)\right]\right\}$$

formule dans laquelle le signe *log.* indique un logarithme pris dans les tables vulgaires qui donnent log. $10 = 1$.

On calculera ainsi une table des valeurs de s correspondantes à une suite de valeurs données de ϕ qu'il est convenable de prendre en progression arithmétique, le premier terme étant $\phi = \theta$; plus la différence de cette progression sera petite et plus l'opération sera exacte.

Représentons par ϕ et ϕ' deux termes consécutifs de cette suite, par s et s' les arcs de courbes correspondants, et soient $\phi' - \phi = \Delta\phi$ et $s' - s = \Delta s$, on pourra, l'angle $\Delta\phi$ étant petit, considérer Δs comme un arc de cercle dont les tangentes extrêmes forment les angles ϕ et ϕ' avec l'horizon. Le rayon de cet arc et sa corde auront, respectivement, pour valeurs $\frac{\Delta s}{\Delta\phi}$ et $\frac{\Delta s}{\Delta\phi} \cdot 2 \sin. (\frac{1}{2}\Delta\phi)$, et l'angle formé par l'horizontale et par cette corde sera $= \frac{1}{2}(\phi + \phi')$.

Les longueurs des projections orthogonales de cette corde seront, savoir :

sur l'axe des x . . . $\frac{2\Delta s}{\Delta\phi} \sin. (\frac{1}{2}\Delta\phi) \cos. \left(\frac{\phi+\phi'}{2}\right)$;

sur l'axe des z . . . $\frac{2\Delta s}{\Delta\phi} \sin. (\frac{1}{2}\Delta\phi) \sin. \left(\frac{\phi+\phi'}{2}\right)$;

et les coordonnées x et z, correspondantes à un nombre quelconque d'arcs consécutifs $\Delta\phi$ compté à partir de l'origine, auront, pour valeurs, les sommes des projections des arcs, savoir :

$$(2) \cdots \left\{ x = \Sigma \left\{ \frac{2\Delta s}{\Delta\phi} \sin. (\tfrac{1}{2}\Delta\phi) \cos. \left(\frac{\phi+\phi'}{2}\right) \right\}; \right.$$

[redacted]

$\frac{dx}{dt}$ est la vîtesse horizontale égale au produit de la vîtesse v, dans le sens de la courbe, par le cosinus de l'angle ϕ que l'élément de courbe parcouru forme avec l'horizon, c'est-à-dire que $\frac{dx^2}{dt^2} = v^2 \cos.^2 \phi$; soit h la hauteur due à la vîtesse v, on a $v^2 \cos.^2 \phi = 2gh \cos.^2 \phi$ et cette valeur introduite dans l'équation précédente donne

$$(2) \ldots\ldots\ldots h = \frac{H \cos.^2 \theta}{e^{As} \cos.^2 \phi}$$

ϕ est l'angle dont q est la tangente, on a, par conséquent, $\cos.^2 \phi = \frac{1}{1+q^2}$; substituant cette valeur et celle de e^{As}, donnée par l'équation (12) de l'art. 865, on a

$$(3) \ldots h = \frac{H \cos.^2 \theta (1+q^2)}{1 + AH \cos.^2 \theta \{ f - q\sqrt{1+q^2} - \log. (q + \sqrt{1+q^2}) \}}.$$

874. L'équation précédente donne, à l'origine, $h = H$, ainsi que cela doit être, H étant, par l'état de la question, la valeur initiale de h; au point culminant, où $q = 0$, $h = \frac{H \cos.^2 \theta}{1 + AHf \cos.^2 \theta}$. cette dernière valeur de h diminue encore au-delà de ce point culminant, jusqu'à ce qu'elle ait atteint un minimum de valeur; elle augmente ensuite, mais ses accroissements ultérieurs ne peuvent pas excéder une limite qu'il est bon d'assigner. Pour cela je rapporte l'équation (3) de l'art. précédent, à un point de la branche descendante de la trajectoire très-éloigné du point culminant, et j'observe qu'à ce point q est négatif, ce qui change $-q\sqrt{1+q^2}$ en $q\sqrt{1+q^2}$ et log. $(q + \sqrt{1+q^2})$ en log. $(-q + \sqrt{1+q^2})$; de plus la valeur de la tangente trigonométrique q étant extrêmement grande, puisqu'au point de la trajectoire dont il s'agit l'angle ϕ est presque droit, les expressions $1 + q^2$ et $q\sqrt{1+q^2}$ ne diffèrent l'une de l'autre que par une quantité négligeable par rapport à chacune d'elles, et log. $(-q + \sqrt{1+q^2})$ est le logarithme négatif d'une fraction positive peu différente de zéro; ce logarithme peut cependant être négligé par rapport à $q\sqrt{1+q^2}$, qui est d'un ordre supérieur, et, eu égard à ces diverses observations, l'équation ci-dessus citée devient

$$h = \frac{1}{A};$$

ainsi le mouvement dans la branche descendante tend continuellement à devenir uniforme avec la vîtesse $\sqrt{\frac{2g}{A}}$ et le mobile ne tarde pas à prendre, sensiblement, cette vîtesse constante, lorsqu'il a passé le point où v est un minimum. Ce résultat est identique avec celui auquel je suis parvenu, art. 743, pour le cas du mouvement vertical dans un milieu résistant, la quantité a de l'art. cité exprimant exactement la même chose que $\sqrt{\frac{2g}{A}}$ puisque $\frac{g}{a^2}$ et $\frac{1}{2}A$ ont été employés, art. 740 et 865, pour représenter la *force retardatrice* due à la résistance sous l'unité de vîtesse.

J'ai fait voir, art. 869, que $\frac{1}{A}$ était la hauteur due à la vîtesse qui rend la résistance du milieu égale au poids du mobile, ce qui lie encore cette expression à une propriété remarquable du mouvement.

875. Pour avoir une équation qui, si elle était intégrée, donnerait l'expression générale du temps, j'élimine Ce^{As} entre les équations (4) et (5) de l'art. 865, et prenant la valeur de dt^2 j'ai

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad dt^2 = -\frac{dq\,dx}{g};$$

substituant ensuite dans cette valeur celle de dx, donnée par l'équation (1) de l'art. 866, et extrayant la racine quarrée

$$(2) \ldots \quad dt = \frac{-dq}{\left\{\frac{1}{2}Ag\left[C' - q\sqrt{1+q^2} - \log.\left(q + \sqrt{1+q^2}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Le signe de dt est positif depuis le premier instant et pendant toute la durée du mouvement; et comme q, d'une part, diminue sur la [redacted]

données de la courbe, n'étant point intégrables, je crois devoir, en faveur des élèves qui se destinent à l'arme de l'artillerie, et vu l'importance de la matière, ajouter à la théorie exposée depuis l'art. 865, et indépendamment des procédés de calculs approximatifs expliqués art. 872, de nouveaux détails propres à faciliter l'application des formules à la pratique de l'artillerie. Ces détails et une partie de l'analyse précédente sont tirés d'un excellent mémoire de M. Le Gendre, sur la balistique, qui a remporté un prix proposé, en 1782, par l'Académie Royale de Prusse.

Je désigne par λ cette quantité $\frac{1}{A}$ qu'on a vu être la hauteur due à la vitesse qui rendrait la résistance du milieu égale au poids du mobile, et introduisant cette quantité λ dans l'équation (3) de l'art. 865 j'ai

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda ddq = ds\, dq.$$

j'observe qu'on peut prendre pour unité une ligne arbitraire et par conséquant λ; ensuite, pour parvenir à intégrer l'équation précédente, je supposerai λ égal à une quantité variable, mais qui dans ses plus grandes variations diffère peu de l'unité ; je pose pour cela

$$(2) \ldots \lambda = \frac{\sqrt{1+\text{tang.}^2 \phi}}{1+\varepsilon\, \text{tang.}^2 \phi}.$$

{ λ doit être considérée comme égale au produit de l'*unité linéaire* par la fonction trigonométrique ci-à côté, qui est de dimension nulle.

Je vois d'abord que cette expression sera $=1$ au sommet où $\phi = 0$, et que je puis la rendre $=1$ à un autre point quelconque, en déterminant ε convenablement. Il est à propos de faire ensorte que cette condition ait lieu au point de départ, pour cela on substituera θ à ϕ et on posera l'équation

$$\frac{\sqrt{1+\text{tang.}^2 \theta}}{1+\varepsilon\, \text{tang.}^2 \theta} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{\sin.^2 \theta + \cos.^2 \theta}}{\frac{\cos.\theta(\cos.^2\theta + \varepsilon \sin.^2\theta)}{\cos.^2\theta}} = 1\,;$$

d'où on déduira

$$\varepsilon = \frac{\cos.\theta - \cos.^2\theta}{1-\cos.^2\theta} = \frac{\cos.\theta(1-\cos.\theta)}{(1+\cos.\theta)(1-\cos.\theta)} \text{ . et enfin}$$

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \varepsilon = \frac{\cos.\theta}{1+\cos.\theta}\,;$$

au moyen de cette détermination de ε le coëfficient variable $\frac{\sqrt{1+\text{tang.}^2 \phi}}{1+\varepsilon\,\text{tang.}^2 \phi}$ sera $=1$ à trois points, savoir : 1°. le point de départ, 2°. le sommet,

3°. le point de la branche descendante où l'inclinaison de la tangente sur l'horizon est la même qu'à l'origine (observez que le signe de ϕ ne change ni la valeur ni le signe de l'expression ci-dessus). Dans les points intermédiaires λ différera de l'unité, et, pour apprécier les anomalies qui en résulteront, cherchons la plus petite valeur de $\frac{1}{\lambda}$ ou de $\frac{1+\varepsilon q^2}{\sqrt{1+q^2}}$, ε étant la variable ; la condition $d\left(\frac{1}{\lambda}\right)=0$ donnera $q^2=\frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon}$; cette valeur substituée dans l'équation (2) donne, toutes réductions faites, en ayant égard à l'équation (3), $\lambda=\sqrt{1-\text{tang.}^4\frac{1}{2}\theta}$; d'où on conclut

$$\text{Pour } \theta=\frac{\pi}{6} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \lambda=1-\frac{1}{400};$$

$$\theta=\frac{\pi}{4} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \lambda=1-\frac{1}{67},$$

$$\theta=\frac{\pi}{3} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \lambda=1-\frac{1}{18};$$

ainsi, dans le cas plus défavorable, l'hypothèse de $\frac{\sqrt{1+\text{tang.}^2\phi}}{1+\varepsilon\,\text{tang.}^2\phi}=1$, en faisant $\varepsilon=\frac{\cos.\theta}{1+\cos.\theta}$, comporte une approximation suffisante pour le plus grand nombre des applications qu'on aura à faire des formules ci-après.

Cette valeur $\frac{\sqrt{1+q^2}}{1+\varepsilon q^2}$ de λ substituée dans l'équation (1) donne

$$\frac{\sqrt{1+q^2}}{ds}\,.\,ddq=dq\,(1+\varepsilon q^2);$$

ou, en observant que $ds=dx\sqrt{1+q^2}$,

[redacted]

$$B - \frac{1}{2H\cos.^2\theta} = \text{tang.}\,\theta + \tfrac{1}{3}\,\varepsilon\ \text{tang.}^3\,\theta$$

ou $B = \text{tang.}\,\theta + \frac{1}{3}\,\varepsilon\ \text{tang.}^3\theta + \frac{1}{2H\cos.^2\theta}\ ..(6)$

on déduit de l'équation (5)

$$dx = \frac{dq}{q + \frac{1}{3}\varepsilon q^3 - B}$$

Il faut, dans l'évaluation numérique de H et de B, avoir égard à l'équation hypothétique $\lambda = 1$.

que l'on peut mettre sous la forme

$$(7)\ \ldots\ldots\ \tfrac{1}{3}\,\varepsilon\, dx = \frac{-\,dq}{\frac{3}{\varepsilon}B - \frac{3}{\varepsilon}\,q - q^3}\ ;$$

le second membre est une fraction rationnelle et, pour avoir au dénominateur des facteurs rationnels, on fera

$$(c-q)(q^2+qc+c^2+\tfrac{3}{\varepsilon}) = \tfrac{3}{\varepsilon}B - \tfrac{3}{\varepsilon}\,q - q^3.$$

La lettre c désigne une constante inconnue.

effectuant la multiplication indiquée dans le 1.er membre et égalant à $\frac{3}{\varepsilon}\,B$ la partie du produit qui ne contient pas q on aura

$$(8)\ \ldots\ldots\ldots\ \tfrac{\varepsilon}{3}\,c^3 + c - B = 0\,,$$

équation du 3.e degré qui donne la valeur de c, laquelle peut ainsi être regardée comme connue dans l'équation

$$(9)\ \ldots\ \tfrac{1}{3}\,\varepsilon\, dx = \frac{-\,dq}{(c-q)(q^2+cq+c^2+\frac{3}{\varepsilon})}\ ;$$

qui est l'équation (7) dans laquelle on a substitué, au dénominateur du 2.e membre, sa valeur hypothétique $(c-q)\,(q^2+qc+c^2+\frac{3}{\varepsilon})$ et qui a pour intégrale, complétée par la condition que $x=0$ correspond à $q = \text{tang.}\,\theta$, en faisant $\sqrt{(\frac{3}{4}c^2+\frac{3}{\varepsilon})} = m$,

$$(10)..(1+c^2\varepsilon)x = \left\{\begin{array}{l} \log.\left(\dfrac{c-q}{c-\text{tang.}\,\theta}\right) - \frac{1}{2}\log.\left\{\dfrac{(q+\frac{1}{2}c)^2+m^2}{(\text{tang.}\,\theta+\frac{1}{2}c)^2+m^2}\right\} \\ -\dfrac{\frac{3}{2}c}{m}\ \text{arc}\left[\text{tang.} = \left(\dfrac{q+\frac{1}{2}c}{m}\right)\right] \\ +\dfrac{\frac{3}{2}c}{m}\ \text{arc.}\left[\text{tang.} = \left(\dfrac{\text{tang.}\,\theta+\frac{1}{2}c}{m}\right)\right]. \end{array}\right.$$

L'équation (9) multipliée par $(c-q)$ ou par $c - \frac{dz}{dx}$ devient

$$(11) \ldots\ldots \tfrac{1}{3}\varepsilon\,(cdx - dz) = \frac{-dq}{q^2+cq+c^2+\frac{3}{\varepsilon}}\,;$$

et a pour intégrale

$$(12) \ldots z - cx = \frac{3}{\varepsilon m}\,\text{arc.}\left[\text{tang} = \left(\frac{q+\frac{1}{2}c}{m}\right)\right] - \frac{3}{\varepsilon m}\,\text{arc.}\left[\text{tang.} = \left(\frac{\text{tang.}\,\theta+\frac{1}{2}c}{m}\right)\right].$$

877. Pour faciliter le calcul de ces formules on cherchera deux angles tels que

$$\text{tang.}\,\Theta = \frac{\text{tang.}\,\theta+\frac{1}{2}c}{m}\,;\ \text{tang.}\,Q = \frac{q+\frac{1}{2}c}{m}\,;$$

en observant que sur la branche descendante, où q est négatif, tang. Q peut l'être aussi. Alors l'angle Q sera négatif et non obtus ; car la diminution de l'angle Q se faisant successivement jusqu'au point où $q = -\frac{1}{2}c$, lorsque q devient plus grand, Q augmente aussi par degrés.

Ces angles trouvés on aura

$$(1) \ldots (1+c^2\varepsilon)x = \log.\left(\frac{c-q}{c-\text{tang.}\,\theta}\right) + \log.\left(\frac{\cos.\,Q}{\cos.\,\Theta}\right) + \frac{3c}{2m}\,\Theta - Q$$

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots z = cx - \frac{3}{\varepsilon m}\,(\Theta - Q)$$

en prenant un nouvel angle χ tel que m tang. $\chi = \frac{3}{2}c$, on peut remplacer (1) par

$$(3) \ldots (1+c^2\varepsilon)x = \log.\left\{\frac{\sin.(\chi - Q)}{\sin.(\chi - \Theta)}\right\} + \tfrac{3}{2}\cdot\frac{c}{m}\,(\Theta - Q)$$

mais (1) est préférable lorsque c diffère peu de tang. θ.

878. Nous sommes convenus, en introduisant dans le calcul la fonc-

[redacted]

quantité constante. On peut donc lui donner ou la valeur $\frac{\cos.\theta}{1+\cos.\theta}$ ou telle autre valeur propre à satisfaire à des conditions particulières.

La remarque que je viens de faire conduit à une équation particulière de la branche descendante, qui pourra être très-utile ; on a déjà dû remarquer que les équations (10) et (12) de l'art. 876, ne pouvaient donner la valeur de l'amplitude totale que par une espèce de tâtonnement, mais lorsque par ces équations, ou par celles de l'art. précédent, on aura la position du sommet, en prenant ce sommet pour origine, on calculera séparément la branche descendante et on trouvera aisément la position du point où elle rencontre l'horizontale passant par le point de départ.

Désignant par H' la hauteur due à la vîtesse du mobile au point culminant dont la valeur a été donnée, art. 874, on a, en restituant la valeur de f,

$$(1) \;.\;.\; H' = \frac{H\cos.^2\theta}{1+\frac{H\cos.^2\theta}{\lambda}\left\{\frac{\sin.\theta}{\cos.^2\theta}+\log.\,\text{tang.}\,(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\theta)\right\}}.$$

Transportons, maintenant, l'origine de x et z au point culminant, dont on détermine les coordonnées particulières en faisant $q=0$ dans les équations de l'art. précédent ; comptons les x sur la ligne horizontale menée par ce point, et les z de haut en bas ; la vîtesse, à cette nouvelle origine, sera due à H' et sa direction sera horizontale, ce qui rend l'angle de projection égal à zéro ; la valeur de B, art. 876, deviendra $B=\frac{1}{2H'}$ et l'équation (8) de cet article se changera en

$$(2) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{\varepsilon}{3}c^3+c-\frac{1}{2H'}=0.$$

On fera toujours $m=\sqrt{\frac{3}{4}c^2+\frac{3}{\varepsilon}}$ et $\lambda=\frac{\sqrt{1+q^2}}{1+\varepsilon q^2}$; cette dernière hypothèse donne $\lambda=1$ au point de départ, où $q=0$, et on est maître de déterminer ε de manière à avoir encore $\lambda=1$ à un autre point où la tangente à la courbe aurait une inclinaison donnée ; je suppose que cette inclinaison est telle qu'on ait $q=1$, ou que la tangente à la courbe fasse un demi-angle droit avec l'horizon, cette supposition donnera

$\frac{\sqrt{2}}{1+\varepsilon} = 1$ (observez que le signe de q n'a ici aucune influence parceque la valeur de λ ne contient que q^2) d'où

(2) . . . . . . $\varepsilon = -1 + \sqrt{2} = 0{,}4142136$.

Cette valeur de ε étant substituée dans l'équation (2) et les valeurs de c et m, qui résultent de cette substitution, étant introduites dans les équations (10) et (12) de l'art. 876, ou (1) et (2) de l'art. précédent, les origines des coordonnées x et z de ces équations se trouveront transportées au sommet et donneront très-aisément la position de tous les points de la branche descendante.

Je désigne les équations (1) et (2) de l'article précédent, lorsque l'origine des x et z est placée au point de départ du mobile, respectivement, par $M=0$, $N=0$, et ces mêmes équations, lorsque l'origine, par les substitutions dont je viens de parler, est transportée au point culminant, par $M'=0$ et $N'=0$; pour faire usage de ces dernières équations on déterminera d'abord, la position de la nouvelle origine en calculant, par les équations $M=0$ et $N=0$, les coordonnées horizontale et verticale du point culminant que j'appelle x' et z' et qui sont, comme je l'ai déjà dit, les valeurs de x et z correspondantes à la valeur $q=0$; x' et z' étant ainsi obtenues, si on veut connaître l'amplitude totale, on fera $z=z'$ dans $N'=0$, la valeur correspondante de x, que je désigne par x'' sera la distance horizontale du sommet au point où le mobile rencontre, pour la seconde fois, l'horizontale passant par le point de départ, et on aura l'amplitude totale $= x' + x''$. (Voyez pour plus de détail le mémoire de M. Le Gendre, ci-dessus cité, et les additions qu'il y a faites dans ses *exercices de calcul intégral* impri-

[redacted]

substituant cette valeur dans [illegible]
$2H\cos.^2\theta$ [illegible]

(1) . . . $-e^{A}=2AH$ [illegible]

on a, pour déterminer la constante [illegible]
$q=\tan g.\theta$, ce qui donne [illegible]

constante $=$ [illegible]

(2) . . . $e^{As}=1+2AH\cos.$ [illegible]

l'hypothèse faite sur la petitesse de [illegible] la partie de la courbe [illegible] par le point de départ, et même une certaine longueur de la branche descendante au-dessous de cette horizontale [illegible] quantité, $Q-q$ le sera [illegible] d'assigner, et on pourra, sans grande erreur, négliger les puissances de $Q-q$, à partir de la 2.e, ce qui réduira l'équation précédente à

(3) . . . . . . $e^{As}=1+2AH\cos.^2\theta(Q-q)$.

On a, par l'équation (7) de l'art. 865, $-e^{As}=2H\cos.^2\theta\frac{dq}{dx}$, éliminant e^{As} entre cette équation et la précédente, et faisant $H\cos.^2\theta=H''$, on a l'équation séparée

(4) . . . . $dx=\frac{-2H''dq}{1+2AH''(Q-q)}$;

de laquelle on déduit par l'intégration, après avoir multiplié les deux membres par A,

(5) . . . . $Ax=\log.\{1+2AH''(Q-q)\}$,

la constante arbitraire est nulle puisqu'on [illegible] tanées $x=0$ et $q=Q$.

On déduit de cette équation

(6) . . . . $q=Q-\frac{e^{Ax}-1}{2AH''}$.

substituant pour q sa valeur $\frac{dy}{dx}$

[illegible] $2AH''dy=$ [illegible]

et intégrant

$$2AH''z = (1 + 2AH''Q)x - \frac{e^{Ax}}{A} + C.$$

on a, en même temps, $x = 0$ et $z = 0$, d'où $C = \frac{1}{A}$ et

$$(8) \ldots\ldots z = \frac{A(1 + 2AH''Q)x - (e^{Ax} - 1)}{2A^2H''}.$$

880. Telle est la forme que peut prendre l'équation de la trajectoire lorsque l'angle de projection est petit ; on remarquera qu'une partie de la valeur de z se compose de l'ordonnée $= Qx = x \operatorname{tang.} \theta$, à la droite que le mobile parcourrait dans le vide, en vertu de l'impulsion initiale, s'il n'était pas animé de la pesanteur ; le surplus de la valeur de z étant la quantité soustractive $\frac{-(e^{Ax} - Ax - 1)}{2A^2H''}$ qui mesure l'abaissement de chacun des points de la trajectoire au-dessous du point correspondant à la même valeur de x de la droite dont je viens de parler.

Le calcul des valeurs de z, d'après des valeurs données de x, et le tracé de la courbe sont d'ailleurs faciles ; on fera passer, par l'origine ou point de départ, une droite faisant avec l'horizontale un angle dont la tangente $= \frac{1 + 2AH''Q}{2A^2H''}$, et, imaginant cette droite coupée par une verticale dont la distance au point de départ soit x, on déterminera un point de la courbe en portant sur cette verticale, au-dessous de son point d'intersection avec la droite inclinée dont je viens de parler, un nombre d'unités de longueur égal au nombre dont Ax est le logarithme *népérien* diminué de l'unité et divisé par $2A^2H''$; on pourra se servir

[redacted]

étendue et détaillée à laquelle les bornes de ce cours ne me permettent pas de me livrer; je me restreindrai à donner ici, en faveur des élèves qui voudraient s'exercer à l'application numérique des formules démontrées depuis l'art. 865, quelques bases de calcul absolu.

Voici, relativement à la résistance de l'air, une évaluation du coëfficient $\frac{1}{2} A$ du quarré de la vîtesse, dans l'expression de r (art. 865) déduite de ces deux propositions de Newton, savoir; « 1.°, la résistance qu'éprouve une surface plane, mue dans le sens d'une droite « qui lui est perpendiculaire, est égale au poids d'une colonne d'air « ayant cette surface pour base, et, pour hauteur, la hauteur due à la « vîtesse. 2.° La résistance qu'éprouve une sphère est la moitié de celle « qu'éprouverait son grand cercle. »

Soient k la densité du fluide traversé par le mobile, D le diamètre de ce mobile, dont la forme est supposée sphérique, K sa densité, v sa vîtesse et par conséquent $\frac{v^2}{2g}$ la hauteur due à cette vîtesse, π la demi-circonférence dont le rayon $= 1$, le poids de la colonne du fluide, ayant pour base une surface plane égale à celle d'un grand cercle de la sphère et pour hauteur $\frac{v^2}{2g}$, sera $= gk \cdot \frac{1}{4} \pi D^2 \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{4} k \cdot \pi D^2 \cdot \frac{v^2}{2}$; la moitié de cette quantité divisée par la masse du mobile, ou par $\frac{1}{6} \pi K D^3$, donne la *force retardatrice* due à la résistance, laquelle force a, ainsi, pour expression $\frac{3}{8} \cdot \frac{k}{K} \cdot \frac{v^2}{D}$; telle est la valeur absolue de r dans l'équation (1) de l'art. 865, ce qui donne $\frac{1}{2} A = \frac{3k}{8DK}$, ou

$$A = \frac{3k}{4DK}; \ \lambda = \frac{4DK}{3k}.$$

$\frac{1}{A}$, ou λ, est la quantité qu'on a supposée, art. 876, égale au produit de l'unité linéaire par la fonction, de dimension nulle, $\frac{\sqrt{1+q^2}}{1+\varepsilon q^2}$, dans laquelle ε se détermine de manière que cette fonction elle-même soit, dans ses plus grandes variations, peu différente de 1. L'expression $\frac{4}{3} \frac{DK}{k}$, ou, plus généralement, $\frac{\omega DK}{k}$ doit donc être prise pour

unité dans les calculs numériques établis d'après les formules des articles 876, 877 et 878, c'est-à-dire que, d'une part, les expressions numériques de toutes les quantités linéaires constantes qui entrent, comme données, dans ces formules, énocent seulement les rapports de ces lignes avec la quantité linéaire $\frac{\omega K}{k} D$, et que, d'une autre part, les nombres déduits de ces mêmes formules, et représentant les inconnues x, z, etc. ne sont, pareillement, que les rapports de x, z etc. avec la même quantité $\frac{\omega K}{k} D$; et si on veut avoir x, z etc. en unités ordinaires, il faut multiplier les derniers rapports dont je viens de parler par la valeur de $\frac{\omega K}{k} D$, en mesurant la ligne D avec les mêmes unités; $\frac{\omega K}{k}$ est toujours un nombre abstrait.

Le rapport de la densité du fer de fonte à la densité moyenne de l'air étant celui de 6047 : 1, on a, pour les boulets de canon, $\frac{K}{k} = 6047$ d'où $\lambda = \frac{4 \times 6047 \cdot D}{3} = 8063\, D$ et $A = \frac{1}{\lambda} = \frac{0{,}00012402}{D}$.

882. Il est essentiel d'observer que cette évaluation de λ, dont l'exactitude est assez satisfaisante dans le cas des petites vîtesses, s'écarte de la vérité lorsqu'il s'agit des vîtesses dont sont animés les projectiles lancés par les bouches à feu; les vîtesses initiales de ces projectiles sont, d'après les expériences de Robins, du Chevalier D'arcy, du Comte de Rumford, de Hutton etc. de 400 à 500 mètres (*) en prenant pour unité de temps

(*) Dans le cas de la proposition V du chapitre 2 de l'ouvrage de Robins, [redacted]

l'ancienne seconde sexagésimale; les élèves qui voudront faire quelques applications des formules, comme simples exercices de calcul, pourront donner au coëfficient de $\frac{K}{k}D$, dans l'expression de λ, des valeurs arbitraires, comprises entre celle qui a été trouvée ci-dessus et sa moitié, mais, lorsqu'il s'agira d'applications effectives à la pratique de l'artillerie, il faudra, en posant l'équation générale $\lambda = \frac{\omega DK}{k}$, donner au coëfficient ω la valeur convenable à chaque cas particulier. Malheureusement les données expérimentales, que nous avons sur cette matière, laissent encore beaucoup d'incertitudes, qu'on pourra diminuer, mais qui, selon toute apparence, ne seront jamais complétement levées. Il faut considérer que, dans les mouvements très-rapides, la pression de l'air, sur la partie postérieure du mobile, est considérablement diminuée et devient même nulle lorsque le mobile a une vîtesse de plus de 416^m, c'est-à-dire une vîtesse supérieure à celle dont les molécules d'air sont animées lorsqu'elles affluent dans un espace vide, ainsi qu'on le verra dans la suite du cours; cette circonstance doit faire varier sensiblement l'effet de la pression de l'atmosphère sur la partie antérieure du mobile. On peut observer, encore, que certains projectiles, tels que les bombes, s'élèvent à des hauteurs assez considérables pour que la densité de l'air ne puisse pas être regardée comme constante dans l'étendue entière de leur trajectoire etc. etc. Je ne m'étendrai pas d'avantage, ici, sur cette matière qui sera discutée ailleurs, avec les détails convenables.

883. Les trajectoires décrites dans le vide étant des paraboles appolloniennes sont, comme on le sait, des courbes semblables, et je ferai remarquer quelques propriétés analogues, dont jouissent les trajectoires décrites dans des milieux résistants qui sont, d'ailleurs, comme on a pu le voir par ce qui précède, très-différentes des paraboles. Lorsque des mobiles sphériques, de même matière, se meuvent dans un même milieu, les équations représentées, art. 878, par $M=0$, $N=0$, $M'=0$, $N'=0$, ne contiennent d'autres constantes d'après lesquelles les trajectoires puissent différer les unes des autres, que λ, H et θ; ensorte que pour un même angle de projection θ, et pour un même rapport entre la hauteur λ due à la vîtesse qui rend la résistance égale au poids du mobile, et la hauteur H due à la vîtesse de projection, les courbes sont semblables; mais

d'après ce qui est dit, art. 881, lorsqu'on a calculé les nombres représentant x, z, x', z', par les équations ci-dessus, il faut multiplier ces nombres par la valeur effective de la quantité λ qui, dans le calcul, a été supposée $= 1$, afin d'obtenir les valeurs linéaires rapportées aux unités usuelles ; et comme $\lambda = \frac{\omega DK}{k}$ est proportionnelle au diamètre du mobile, les dimensions absolues des trajectoires semblables, dont je viens de parler, et, par conséquent, les hauteurs des jets et leurs amplitudes sont proportionnelles au même diamètre.

Noms des principaux Astronomes qui se sont occupés du Systême du Monde. Lois de Kepler.

884. Hipparque, le plus grand Astronome et l'un des plus beaux génies de l'antiquité, parait avoir, le premier, employé pour *soumettre au calcul* les mouvements célestes, des lois hypothétiques qui ne servaient, avant lui, qu'à fournir quelques explications, plus ou moins vagues, de ces mouvements. Il était né à Nicée en Bithynie ; il vécut dans le second siècle avant notre ère.

884. Ptolemée, né à Ptolemaide en Égypte, et qui fleurissait à Alexandrie pendant la 1.re moitié du 2.e siècle de notre ère, a laissé un grand et important ouvrage sur l'Astronomie, intitulé *Composition mathématique*, et qu'on appelle aussi *Almageste*, d'après les Arabes (*).

La terre, dans le systême de ces Astronomes et suivant l'opinion presque unanime de l'antiquité est immobile au centre du monde ; les autres planètes et le soleil tournent autour d'elle, et on a imaginé, pour expliquer les phénomènes apparents et les rendre compatibles avec le mouve-

de celui de la nature, n'en a pas moins été généralement enseigné et, on pourrait dire, maintenu religieusement dans l'opinion, pendant 14 siècles depuis Ptolemée. Copernic, né à Thorn en 1473, établit, le premier, sur de solides preuves, dans son livre *De Revolutionibus orbium celestium*, mis au jour en 1543, la véritable composition du système du monde; mais il conserva les mouvements circulaires.

Kepler, né à Viel, en 1571, fit de l'astronomie, par la découverte de ses fameuses *lois*, une science absolument géométrique; il déduisit ces *lois* de l'observation et les publia, en 1609, dans l'ouvrage intitulé *Astronomia nova* etc.

Galilée, né à Pise, en 1564, appliquant le télescope aux observations célestes, au moment où cet admirable instrument venait d'être inventé, acheta, aux dépens de son repos, la gloire d'enrichir l'Astronomie nouvelle des plus brillantes découvertes.

Il était réservé à Newton de remonter jusqu'au principe physique d'où découlent les lois de Kepler; la première édition de l'immortel ouvrage des *principes* parut à Londres, en 1687, cent douze ans avant la publication de la *Mécanique céleste*.

885. Les lois de Kepler, qui ne supposent que l'action d'une force centrale unique, fûrent les premières conséquences déduites du principe de la *gravitation universelle*, et elles ne laisseraient rien à désirer, pour l'explication des phénomènes, dans une hypothèse de correspondances isolées entre un centre de forces immobile et des points matériels circulant autour de lui sans actions réciproques les uns sur les autres. C'est dans cet état de simplicité que je vais d'abord considérer les choses; je démontrerai, dans la suite du cours, les principes d'après lesquels on peut avoir égard aux actions réciproques.

Voici les lois de Kepler :

« 1.° Les aires, que décrivent, autour du centre du Soleil, les rayons « vecteurs des centres de gravité des planètes, sont proportionnelles « aux temps pendant lesquels elles sont décrites.

« 2.° Les *orbites* des planètes sont des ellipses, et le centre du soleil « occupe un des foyers de chacune de ces ellipses.

« 3.° Les quarrés des temps des révolutions totales des planètes sont, « entr'eux, comme les cubes des grands axes de leurs orbites.

Équation polaire des courbes du deuxième ordre, pour servir de préparation à la théorie du mouvement des planètes.

Fig. 4 et 5. 886. Soient AB et DE le grand et le petit axe d'une ellipse ou d'une hyperbole dont les foyers sont en S et S'; menant les deux rayons vecteurs SM et $S'M$, et abaissant la perpendiculaire PM sur AB, prolongée s'il est nécessaire, je fais

$$AB = 2a\,;\ DE = 2b\,;\ SC = k\,;\ \frac{SC}{CA} = \frac{k}{a} = \varepsilon\,;$$
$$SM = r\,;\ \text{angle}\ MSA = \phi.$$

La propriété fondamentale de l'une et l'autre courbe donne $AB = S'M \pm SM = \pm SM + \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{PS'}^2}$, et on a $AB = 2a$, $PM = r \sin.\phi$, $PS' = 2k \pm r \cos.\phi$; substituant ces valeurs, réduisant et tirant la valeur de r,

$$(1)\ \ldots\ r = \frac{\pm(a^2 - k^2)}{a + k\cos.\phi}.$$ (Les signes supérieur et inférieur se rapportent, respectivement, à l'ellipse et à l'hyperbole.)

On peut, dans cette équation, remplacer k par sa valeur $a\varepsilon$, ce qui donne

$$(2)\ \ldots\ r = \frac{\pm a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos.\phi}.$$ (Même observation que ci-dessus relativement au double signe. On a dans l'ellipse $\varepsilon < 1$, et dans l'hyperbole $\varepsilon > 1$.)

Si, dans cette dernière équation, on fait $\phi = \frac{1}{2}\pi$, d'où $\cos.\phi = 0$, le rayon vecteur r deviendra une perpendiculaire au grand axe aboutissant d'une part à la courbe et de l'autre au foyer, c'est-à-dire deviendra le demi-paramètre ayant pour valeur $\pm a(1-\varepsilon^2)$; si, de plus, on désigne le paramètre entier par $2p$, l'équation polaire, applicable tant à l'ellipse qu'à l'hyperbole, sera

[redacted]

(4) . . . . $r = \frac{p}{1 + \cos.\phi}$.

On introduira dans les équations précédentes le petit axe $2b$ au moyen de la valeur connue $p = \frac{b^2}{a}$ de laquelle on déduit

(5) . . . $b^2 = ap = \pm a^2(1 - \varepsilon^2)$. { Même observation que ci-dessus relativement au double signe.

Les distances de l'origine S à chacun des sommets A et B ont, pour valeurs, $SA = \pm(a - k)$ et $SB = (a + k)$, ou, en introduisant la valeur $a\varepsilon$ de k,

(6) . . . . $\begin{cases} SA = \pm a(1 - \varepsilon); \\ SB = a(1 + \varepsilon); \end{cases}$

ces valeurs sont, pour l'ellipse, celles du plus petit et du plus grand rayon vecteur; leur demi-somme a est, par rapport au foyer S, ce qu'on appelle la *distance moyenne*.

Les *lois de Kepler* étant supposées connues par l'observation des mouvements célestes, déduire, de ces lois, l'expression de la force qui agit sur chaque planète.

887. La 1.re et la 2.e loi de Kepler suffisent pour la solution du problème qu'il s'agit de résoudre en ce moment. Puisque, par la 1.re loi, les aires, décrites autour du centre du soleil par le rayon vecteur du centre d'une planète, sont proportionnelles au temps, la direction de la résultante de toutes les forces ou de la force unique qui sollicite cet astre (on peut considérer la planète comme un point matériel occupant la place de son centre de gravité) doit, art. 843, passer par le point autour duquel les aires ont la propriété sus-énoncée. On a donc, en nommant r le rayon vecteur mené du centre du soleil au centre de la planète, $d\omega$ l'angle décrit par ce rayon pendant l'instant dt, et observant que la surface du triangle élémentaire, engendré pendant cet instant dt, a pour valeur $\frac{1}{2}\,r.\,rd\omega$, l'équation

(1) . . . $r^2 d\omega = C dt$. { C est une constante arbitraire.

On a de plus, en désignant par F la *force accélératrice* de la planète, due à la puissance inconnue qui agit sur elle, et qui, dirigée suivant le rayon r, tend à diminuer ce rayon, l'équation générale de l'art. 822, où les termes,

sous le signe $\int$ peuvent, art. 476, être remplacés, dans le cas actuel, par le *moment* unique (art. 457) $-Fdr$; ce qui donne, en appelant v la vîtesse dans le sens de la courbe parcourue,

$$(2) \ldots v^2 = U^2 - 2\int F dr; \quad \{ U^2 \text{ est une constante arbitraire.}$$

ou, comme l'élément de courbe, parcouru pendant l'instant dt, a pour valeur $\sqrt{dr^2 + r^2 d\omega^2}$ et qu'ainsi $v^2 = \dfrac{dr^2 + r^2 d\omega^2}{dt^2}$,

$$(3) \ldots\ldots\ldots \frac{dr^2 + r^2 d\omega^2}{dt^2} = U^2 - 2\int F dr.$$

Éliminant dt entre les équations (1) et (3) et prenant la valeur de $\int F dr$, on a

$$(4) \ldots\ldots\ldots \int F dr = \tfrac{1}{2}\left(U^2 - \frac{C^2}{r^2} - \frac{C^2 dr^2}{r^4 d\omega^2}\right);$$

d'où on tire par la différentiation

$$(5) \ldots F dr = C^2\left[\frac{dr}{r^3} - \tfrac{1}{2} d\left(\frac{dr^2}{r^4 d\omega^2}\right)\right].$$

Telle est la valeur de la puissance F résultant de la combinaison de la première loi de Kepler avec la valeur de la vîtesse, art. 822, indistinctement applicable à un mouvement quelconque. Cette équation (5) serait celle de la courbe si F était donnée en fonction de r, mais c'est F qu'on veut avoir et la courbe est connue par la seconde loi de Kepler, son équation polaire étant, art. 886 équation (2),

$$(6) \ldots r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos.(\omega - \Omega)}; \quad \left\{ \begin{array}{l}\text{L'ellipse } ADBEA \text{ est suppo-}\\ \text{sée être l'orbite de la planète.}\end{array}\right.$$

(8) . . . . . . $dr(1 + \varepsilon \cos.\phi) - r\varepsilon d\phi \sin.\phi = 0$.

Remplaçant, dans cette dernière équation, $1 + \varepsilon \cos.\phi$, qui équivaut à $1 + \varepsilon \cos.(\varpi - \Omega)$, par sa valeur $\frac{a(1-\varepsilon^2)}{r}$ tirée de (6), on en déduira, après la substitution,

$$\sin.^2\phi = \frac{dr^2}{r^4 d\phi^2} \cdot \frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2}{\varepsilon^2};$$

l'équation (7) donnera

$$\cos.^2\phi = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{2a(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon^2 r} + \frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2}{r^2\varepsilon^2};$$

ajoutant ces deux équations, observant que $\sin.^2\phi + \cos.^2\phi = 1$, différentiant l'équation somme et prenant la valeur de $\frac{dr}{a(1-\varepsilon^2)r^2}$ on a

$$(9) \quad \ldots \quad \frac{dr}{a(1-\varepsilon^2)r^2} = \frac{dr}{r^3} - \tfrac{1}{2} \cdot d \cdot \left(\frac{dr^2}{r^4 d\phi^2}\right);$$

enfin comparant cette dernière équation avec l'équation (5), et ayant égard à la valeur $\phi = \varpi - \Omega$ qui donne $d\phi = d\varpi$, on a ultérieurement

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F = \frac{C^2}{a(1-\varepsilon^2)} \cdot \frac{1}{r^2};$$

ainsi la force F qui, émanant du centre du soleil, agit sur la planète, est réciproquement proportionnelle au quarré de la distance r entre les centres des deux astres.

Solution du problême inverse de celui qu'on vient de résoudre, dans lequel on se propose de déterminer l'orbite, lorsque la loi de l'action de la force centrale est donnée.

888. Le résultat, énoncé par l'équation (10) de l'article précédent, est un des plus remarquables auxquels on soit jamais parvenu dans les sciences physico-mathématiques ; je dois ajouter qu'il n'y en a pas de mieux constaté; quelques phénomènes, qui avaient d'abord paru s'écarter de la loi découverte par Newton, sont rentrés sous cette loi à mesure que la perfection de l'analyse a permis de les soumettre au calcul ; mais les données fournies par Kepler ne se rapportent qu'à des orbites elliptiques, et on a quelques raisons de penser que certains corps, soumis à

la même force qui régit notre système, pourraient s'écarter indéfiniment du soleil, c'est-à-dire se mouvoir dans des orbites non fermées; il est donc également important et curieux de connaître toutes les courbes d'orbites compatibles avec la loi de l'attraction en raison inverse du quarré des distances; et on arrivera à cette connaissance en prenant cette loi, pour donnée, et cherchant à en conclure la courbe décrite; l'équation finale donnera, nécessairement, vu la généralité de l'analyse, toutes les solutions possibles du problême.

Je vais exposer un moyen simple et direct d'arriver à cette équation, mais il est nécessaire, avant d'entrer en matière, de rapporter à des idées bien nettes et précises le point de vue sous lequel j'envisage l'état de la question, qui a déjà été établi, en peu de mots, à l'art. 885. Je suppose le soleil absolument immobile dans l'espace, exerçant une action sur les planètes, qui sont assimilées à des points matériels, et n'en éprouvant aucune de leur part; je fais aussi abstraction des actions qui s'exercent de planète à planète. Les mêmes simplifications seraient employées s'il s'agissait du mouvement d'un satellite autour de sa planète. Cet état hypothétique des choses donne déjà une grande aproximation dans les déterminations des mouvements, vu l'extrême petitesse des masses des planètes par rapport à celle du soleil, sur-tout lorsque l'on ne considère pas ces mouvements pendant une longue durée; et on en a la preuve dans les résultats obtenus par Kepler qui a déduit ses lois de l'observation malgré les causes anomales qui dérangent le mouvement elliptique, mais dont l'influence n'a d'effets bien sensibles qu'après un certain laps de temps. On peut ainsi se dispenser, quand il ne s'agit que d'établir les premières notions, d'avoir égard à l'état réel du système dans lequel le [redacted]

Enfin, dans l'état de simplicité auquel je ramène ce système, la force désignée par F, art. 887, et que je fais émaner du *centre fixe* du soleil, est une *force accélératrice*, qui est proportionnelle à la *force motrice*, (art. 723 et 808) et la représente dans les équations qui ne se rapportent qu'au mouvement d'une seule masse.

889. Passant maintenant à la question particulière que j'ai en vue, je désigne par h la valeur de F à l'unité de distance; j'ai ainsi $F = \frac{h}{r^2}$ et $Fdr = \frac{hdr}{r^2}$, d'où $\int (Fdr) = -\frac{h}{r}$; introduisant cette valeur dans l'équation (4) de l'art. 887 et dégageant $d\omega$, on trouve

$$(1) \ldots\ldots d\omega = \frac{Cdr}{r^2\left(U^2 + \frac{2h}{r} - \frac{C^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Je pose l'équation hypothétique

$$(2) \ldots\ldots \lambda = \frac{\frac{C}{r} - \frac{h}{C}}{\left(U^2 + \frac{h^2}{C^2}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

la valeur de $\frac{-d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$ tirée de cette équation est exactement identique avec la valeur de $d\omega$ fournie par (1), et comme $\frac{-d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$ est la différentielle de l'arc dont le cosinus $= \lambda$, on a $d\omega = d\{arc(\cos. = \lambda)\}$, d'où on déduit, par l'intégration, $\omega = \text{arc.}\ (\cos. = \lambda) + \Omega$, et $\lambda = \cos.\ (\omega - \Omega)$, en désignant, par Ω, la constante arbitraire; l'équation (2) se change donc en

$$\frac{C}{r} - \frac{h}{C} = \left(U^2 + \frac{h^2}{C^2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{cosin.}\ (\omega - \Omega);$$

et on en déduit

$$(3) \ldots\ldots r = \frac{C^2}{h\left\{1 + \left(\frac{U^2C^2}{h^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \text{cosin.}\ (\omega - \Omega)\right\}}.$$

Posant les équations hypothétiques

$$(4) \ldots\ldots\ldots \frac{C^2}{h} = p\ ; \frac{U^2C^2}{h^2} + 1 = \varepsilon^2$$

l'équation (3) deviendra

$$(5) \ldots\ldots r = \frac{p}{1 + e \cos.(\omega - \Omega)}.$$

on voit, par ce résultat, et par la théorie démontrée art. 886, que la loi de la raison inverse du quarré des distances peut avoir lieu non-seulement dans une orbite elliptique, mais dans une orbite qui serait une section conique quelconque ; j'examinerai bientôt les circonstances particulières qui déterminent le mouvement dans l'une de ces courbes plutôt que dans l'autre.

Ω est, comme à l'article 887, l'angle constant formé par le grand axe de la section conique et par une ligne fixe menée dans le plan de cette courbe ; ω est l'angle formé par cette même ligne fixe et par le rayon vecteur r, et $\omega - \Omega$ l'angle formé par le rayon vecteur et par l'axe.

Détermination des rapports entre les actions respectives du soleil sur différentes planètes, lorsqu'on connaît les rapports des distances entre le centre d'action et les centres des astres sur lesquels cette action s'exerce. Conséquences de cette détermination relatives à l'universalité de la loi d'attraction entre les corps. Le mouvement des graves, près la surface de la Terre, peut fournir des mesures absolues pour toutes les forces qui s'exercent dans le système planétaire.

890. Les deux premières lois de Kepler suffisent pour la détermination des rapports qui existent entre les intensités d'action du soleil sur chaque planète, en particulier, lorsque la distance entre les centres des deux astres varie ; il reste encore, pour compléter les recherches relatives aux propriétés fondamentales des forces centrales qui régissent notre [redacted]

(1) . . . . *Aire décrite pendant le temps* $t = \frac{1}{2} Ct$.

Soit T le temps de la révolution entière de la planète dans son orbite elliptique, la surface de l'ellipse ayant pour valeur $\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}$, on aura $\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{1}{2} CT$ d'où

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad C = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}}{T};$$

d'une autre part on a, équation (10) de l'art. 887 et art. 889, les valeurs $F = \frac{C^2}{a(1-\varepsilon^2)r^2} = \frac{h}{r^2}$ desquelles on déduit

$$(3) \ldots\ldots \quad h = \frac{C^2}{a(1-\varepsilon^2)} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2};$$

or, par la 3.e loi de Kepler, le rapport $\frac{a^3}{T^2}$ est le même pour toutes les planètes, la quantité h, ou la *force accélératrice* à l'unité de distance, est donc une quantité constante dans le système planétaire, d'où il suit que, quelques soient les rapports entre les masses des planètes, la *force accélératrice* F sera la même, pour chacune d'elle, à une même distance r du soleil; la *force motrice* sera, par conséquent, proportionnelle à la masse, et tous ces astres étant supposés partir, au même instant et sans vîtesses initiales, de différents points d'une surface sphérique commune, qui aurait, pour centre, le centre du soleil, se mouvraient dans le sens des rayons de cette sphère, de manière qu'ils se trouveraient toujours ensemble sur la surface d'une même sphère concentrique à la surface de départ, et arriveraient au même instant à la surface du soleil.

891. Les masses des planètes et leurs actions sur le soleil produisent de très-petites anomalies dans ces résultats, dont je donnerai bientôt l'évaluation, et qui ont dû échapper aux observations de Képler; on n'en est pas moins en droit de conclure des grandes et belles vérités de fait précédemment exposées, que la force attractive d'un des corps ou points matériels de l'univers, désigné par A, s'exerce indéfiniment dans toute l'étendue de l'espace, que son action, sur un autre point matériel B, c'est-à-dire la *force motrice* due à cette action est, toutes choses égales d'ailleurs, réciproquement proportionnelle au quarré de la distance entre A et B; enfin que l'effet de cette action n'est ni diminué ni modifié par ceux que le corps A produit sur tous les corps de la nature autres que B.

On en conclut encore que la force en vertu de laquelle les corps graves tendent à se mouvoir vers le centre de la terre, et celle qui retient les planètes dans leurs orbites autour du soleil, et les satellites autour de leurs planètes respectives, sont des forces de même nature et soumises aux mêmes lois. On a vu, art. 728 et suivants, que tous les corps graves, à même distance du centre de la terre, étaient animés de la même *force accélératrice*, quelques fussent leurs masses, et on peut maintenant affirmer que, si la vîtesse de la lune, dans le sens de son orbite, était tout-à-coup anéantie, elle prendrait (abstraction faite des actions étrangères à celle de sa planète) un mouvement dans le sens de la droite qui unit son centre à celui de la terre, tel que les relations entre les temps, les espaces parcourus et les vîtesses, seraient exprimés par les mêmes équations que j'ai employées dans les art. cités, où, en traitant du mouvement vertical des corps graves, dans le vide, j'ai introduit, dans l'analyse, les distances de ces corps au centre de la terre. On peut même vérifier cette assertion, dans le mouvement effectif de la lune, par la considération de la différence entre la sécante et le rayon d'un très-petit arc de son orbite, parcouru pendant un temps donné, différence qu'on peut, vu la petitesse de l'arc, regarder comme égale au sinus verse. J'expliquerai bientôt la théorie de cette vérification à laquelle certaines positions de la lune sont particulièrement propres; on dit que ce fut la première tentée par Newton, pour reconnaître l'universalité du principe de l'attraction; une mesure erronée de la terre le conduisit d'abord à un résultat peu favorable à son système, et il abandonna ses calculs jusqu'à ce que le degré du méridien, mesuré par *Picard* en 1671, lui eut fourni des données plus exactes.

[redacted]

respectives, on voit que la *force accélératrice* connue, dont les corps sont animés près de la surface de la terre, peut servir de terme de comparaison ou d'unité pour évaluer, en nombres absolus, les *forces accélératrices* dont les planètes, en vertu de la seule action du soleil, et chaque satellite, en vertu de la seule action de sa planète, sont animés dans le sens de leurs rayons vecteurs, lorsqu'on connaît les rapports entre les masses des corps attirants et la masse de la terre. Cette connaissance, réunie à celle de la grandeur de ces astres, donne aussi les lois des mouvements des graves près de leurs surfaces et réciproquement les rapports de leurs masses peuvent se déduire des phénomènes dûs à leurs forces attractives. Je donnerai bientôt les formules relatives à ces diverses déterminations.

893. Je terminerai ce chapitre en faisant remarquer une propriété qui se déduit de l'équation $h = \frac{C^2}{a(1-\varepsilon^2)}$ de l'art. 890; tirant, de cette équation la valeur de C, on a

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad C = \sqrt{ah(1-\varepsilon^2)};$$

la substitution de cette valeur, dans l'équation (1) de l'art. cité, donne

$$(2) \ldots \textit{Aire décrite pendant le temps } t = \tfrac{1}{2} t\sqrt{ah(1-\varepsilon^2)};$$

d'où on conclut, h étant une quantité constante dans le système planétaire, $a(1-\varepsilon^2)$ le demi-paramètre de l'orbite dont le demi-grand axe $= a$, et dont l'exentricité $= \varepsilon$, que « les aires décrites, pendant le même temps, « par les rayons vecteurs de différentes planètes, sont entr'elles comme « les puissances $\frac{1}{2}$ des paramètres des orbites respectives de ces planètes.»

Expression générale de la vitesse; son maximum et son minimum qui ont lieu respectivement au *périhélie* et à l'*aphélie*.

894. Je reprends l'équation (4) de l'art. 889 $\varepsilon^2 = \frac{U^2 C^2}{h^2} + 1$, j'en déduis $U^2 = -\frac{(1-\varepsilon^2)h^2}{C^2}$, et j'ai, en substituant la valeur de $C^2 = ah(1-\varepsilon^2)$ équation (3) de l'art. 890,

$$(1) \ldots\ldots\ldots \quad U^2 = -\frac{h}{a}.$$

Introduisant cette valeur et celle de $F = \frac{h}{r^2}$ dans l'équation (2) de l'art. 887 $v^2 = U^2 - 2\int F dr$, on a, en intégrant et réduisant,

$$(2) \ldots\ldots\ldots v^2 = \frac{h(2a-r)}{ar}.$$

Je désigne par K^2 le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ qui, d'après la 3.e loi de Kepler, est le même pour toutes les planètes, ce qui donne, art. 890, équation (3), $h = \frac{a^3}{T^2} \cdot 4\pi^2 = \frac{4\pi^2}{K^2}$ et change l'équation précédente en

$$(3) \ldots\ldots\ldots v = \frac{2\pi}{K}\sqrt{\frac{2a-r}{ar}}.$$

La vîtesse v se trouve exprimée en quantités toutes susceptibles d'être déterminées par l'observation.

895. On voit par l'équation précédente que si, d'après les circonstances initiales qui ont déterminé la courbure de l'orbite, et dont je parlerai bientôt, cet orbite est circulaire, le mouvement de la planète sera uniforme, car alors, la seule variable r, qui entre dans la valeur de v, se trouvera constante.

896. Cette expression de v a un maximum et un minimum, à deux points remarquables de l'orbite, qui se déduisent, à vue, de l'équation précédente; le maximum de v répond au minimum de r et a lieu, par conséquent, lorsque la planète est à celle des extrémités du grand axe, ou *ligne des absides*, qui est la moins éloignée du soleil; lorsque l'astre se trouve à ce point, on dit qu'il est à son *périhélie*; le minimum de v répond au maximum de r, et a lieu lorsque l'astre se trouve à l'autre extrémité de la *ligne des absides*, au point qu'on appelle son *aphélie*.

On a vu, art. 886 équations (6), que les distances du centre du soleil au *périhélie* et à l'*aphélie* étaient respectivement $a(1-\varepsilon)$ et $a(1+\varepsilon)$;

[redacted]

décrivent, autour du centre du soleil, ou du foyer de l'orbite, des cercles de différents rayons et ont, sur les circonférences de ces cercles, des vîtesses proportionnelles aux mêmes rayons; la vîtesse de celui de ces points qui se trouve à la distance ρ du centre, est égale à $\frac{d\phi}{dt}\rho$ ou $\frac{d\omega}{dt}\rho$, ϕ et ω étant, art. 886 et 887, les angles formés par le rayon vecteur et par des lignes fixes prises dans le plan de l'orbite, et comme on a, art. 887, équation (1), $\frac{d\omega}{dt} = \frac{C}{r^2}$ cette vîtesse a pour valeur $\frac{C\rho}{r^2}$; substituant pour C sa valeur $\frac{2\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}$, art. 890 équation (2), et désignant par A l'aire entière $\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}$ de l'ellipse, on a, définitivement, pour la vîtesse du point du rayon vecteur situé à la distance ρ du foyer, l'expression $\frac{2A\rho}{Tr^2}$.

Lorsque $\rho = 1$, cette expression devient $\frac{2A}{Tr^2}$ et la vîtesse du point, ainsi placé à l'unité de distance du foyer qu'occupe le centre du soleil, s'appelle *vîtesse angulaire*; les espaces parcourus par ce point sont les mesures immédiates des angles décrits par le rayon vecteur. Soit ϑ la *vîtesse angulaire*, on a l'équation

$$\vartheta = \frac{2A}{Tr^2}.$$ A est l'aire entière de l'orbite elliptique, et T le temps total employé par la planète à parcourir cette orbite.

898. Le produit de la vîtesse angulaire ϑ par le rayon vecteur r doit être égal à la vîtesse v, dans le sens de l'orbite, aux deux points où r est perpendiculaire à la courbe parcourue, c'est-à-dire, au périhélie et l'aphélie; et c'est encore aux mêmes points que se trouvent, respectivement, le maximum et le minimum de cette vîtesse angulaire.

899. Concevons un point qui parcoure, uniformément, un cercle ayant son centre au centre du soleil, son rayon égal à l'unité de longueur, et que, de plus, la révolution entière, sur ce cercle, s'achève dans un temps égal à celui que la planète employe pour parcourir la totalité de son orbite; la *vîtesse angulaire* absolue du point dont je parle sera égale à la vîtesse *angulaire moyenne* de la planète, et, en la désignant par ϑ', on aura

$$\vartheta' = \frac{2\pi}{T}$$

900. La vîtesse angulaire moyenne doit, d'après ce qui est dit, art. 898, être plus grande au périhélie, et plus petite à l'aphélie que la vîtesse angulaire effective; il y a donc sur chacune des deux demi-ellipses, séparées par le grand axe, un point où la seconde de ces vîtesses est égale à la première. Pour déterminer ce point, j'égale les valeurs de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$, données dans les deux articles précédents, et j'ai $r = \pm\sqrt{\frac{A}{\pi}}$, ou, en substituant la valeur de $A = \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}$, et désignant par R la valeur particulière de r dont il s'agit ici,

$$(1) \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; R = \pm\, a\,(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{4}}.$$

Il ne s'agit plus, pour avoir la position des points cherchés, que de déterminer l'angle formé par le rayon R et par une ligne de position connue dans le plan de l'orbite; faisant donc $r = R = a\,(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{4}}$ dans l'équation (2) de l'art. 886, et tirant la valeur de cos. ϕ, on a, pour calculer l'angle ϕ formé par R et par le grand axe de l'orbite, l'équation

$$(2) \; \ldots\ldots \; \cos.\phi = -\frac{1-(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{4}}}{\varepsilon}.$$

901. Si du rayon $R = a\,(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{4}}$ et du foyer de l'orbite, comme centre, on décrit un cercle dans le plan de l'orbite, l'aire de ce cercle et l'aire de l'orbite elliptique seront égales entr'elles; une planète qui, d'après les circonstances de son mouvement initial, parcourrait l'orbite circulaire, aurait donc dans le sens de cet orbite (art. 895 et 897) une vîtesse angulaire constante $\frac{2A}{TR^2} = \frac{2\pi}{T}$ (en substituant pour A sa valeur πR^2), et, comme, art. 899, $\frac{2\pi}{T}$ est la vîtesse angulaire moyenne dans

la détermination de l'instant auquel la planète passe par un point déterminé de son orbite, je vais définir les quantités que les Astronomes appellent *anomalies* et donner quelques formules relatives à ces quantités.

L'angle, formé par le rayon vecteur et par le grand axe, dont le sommet est au foyer de l'orbite ou au centre du soleil, s'appelle angle d'*anomalie vraie*; il est mesuré par l'arc que j'ai appelé ϕ (art. 886) qui a été ensuite représenté (art. 887 et 889) par $\omega - \Omega$, et on a, équation (3) de l'art. 886,

$$\cos.\phi = \frac{r-p}{\varepsilon r}. \quad \begin{cases} p = \text{le demi-paramètre;} \\ \varepsilon = \text{l'excentricité.} \end{cases}$$

903. Soit décrite une circonférence de cercle $AD'BE'A$ qui ait, pour centre, le centre C de l'orbite elliptique et, pour rayon, le demi-grand axe AC, et imaginons qu'un astre fictif décrive ce cercle dans un temps égal au temps employé par l'astre réel à décrire l'orbite elliptique entière; supposons, de plus, que ces deux astres partent ensemble, lorsqu'on compte *zéro temps*, du point *périhélie* et que l'astre fictif se meuve d'un mouvement uniforme qui lui fasse décrire autour du centre commun de l'ellipse et du cercle des angles égaux dans des temps égaux, avec une vîtesse angulaire qui, art. 899, a pour valeur $\frac{2\pi}{T}$, ou une vîtesse absolue, dans le sens de la circonférence, égale à $\frac{2a\pi}{T}$; au bout du temps t le rayon vecteur, mené du foyer de l'ellipse à l'astre réel, formera l'angle ϕ *d'anomalie vraie* avec le grand axe, et le rayon, mené du centre commun de l'ellipse et du cercle à l'astre fictif, fera avec le même grand axe un autre angle ϕ', qu'on appelle *anomalie moyenne*, et qui se calcule par l'équation Fig. 4.

$$(1) \ldots\ldots\ldots \phi' = \frac{2\pi}{T} t;$$

ou, en substituant pour T sa valeur $2\pi\sqrt{\frac{a^3}{h}}$, (art. 890) équation (3), et introduisant la quantité $K = \frac{T}{\sqrt{a^3}}$, art. 894,

$$(2) \ldots\ldots \phi' = t\sqrt{\frac{h}{a^3}} = \frac{2\pi t}{K a^{\frac{3}{2}}}.$$

904. La différence entre l'*anomalie vraie* et l'*anomalie moyenne*,

c'est-à-dire $\pm(\phi - \phi')$ est ce qu'on appelle l'*équation du centre*, qui est positive, zéro ou négative à diverses époques du mouvement.

905. Par l'extrémité M de $SM = r$ ou par le *lieu vrai* de la planète, dans l'orbite elliptique, je fais passer une perpendiculaire PMQ au grand axe, se terminant en Q au cercle d'*anomalie moyenne* $AD'BE'A$, et je trace le rayon CQ. L'angle QCA formé par ce rayon et par le grand axe, angle que je désigne par θ, est celui qu'on appelle angle d'*anomalie excentrique*.

On a $\cos.\, angle\ QCA = \frac{CP}{CQ} = \frac{CS+SP}{CA}$; observant que la distance SP du foyer au pied de la perpendiculaire, dont je viens de parler, est égale à $r \cos.\phi$ et qu'on a, de plus, art. 886, les valeurs $CA = a$, $CS = a\varepsilon$, l'équation précédente devient $\cos.\theta = \frac{r\cos.\phi + a\varepsilon}{a}$ et, en substituant, pour $\cos.\phi$, sa valeur $\frac{a(1-\varepsilon^2)-r}{r\varepsilon}$ déduite de l'équation (2) art. 886,

$$\cos.\theta = \frac{a-r}{a\varepsilon}.$$

Relations qui existent, soit entre le *temps* et l'*anomalie excentrique*, soit entre les diverses *anomalies*. Détermination du *lieu vrai* de la planète à un instant donné. *Problème de Kepler*.

906. Je multiplie, par le quarré r^2 du rayon vecteur, chacun des membres de l'équation (1) de l'art. 889, et substituant, dans l'équation produit, pour $r^2 d\omega$, sa valeur Cdt (équation (1) de l'art. 887) j'obtiens la valeur suivante de dt

La quantité $1-\left(\frac{a-r}{a\varepsilon}\right)^2$ est, d'après l'article précédent, égale à $1-\cos.^2\theta=\sin.^2\theta$; de plus, l'équation du même article donne $r=a(1-\varepsilon\cos.\theta)$, et $dr=a\varepsilon\sin.\theta\,d\theta$; ces valeurs, introduites dans l'équation (2), la changent en

(3) . . . . . . $dt\sqrt{ah}=a^2(1-\varepsilon\cos.\theta)d\theta$;

d'où on déduit par l'intégration,

$$t\sqrt{\frac{h}{a^3}}=\theta-\varepsilon\sin.\theta+\textit{constante}.$$

Si on a, en même temps, $t=0$ et $\theta=0$, la constante est nulle et l'expression du temps en fonction de l'*anomalie excentrique* se trouve donnée par l'équation

(4) . . . . . . $t\sqrt{\frac{h}{a^3}}=\theta-\varepsilon\sin.\theta$;

$t\sqrt{\frac{h}{a^3}}$ est (équation (2) de l'art. 903) la valeur de l'*anomalie moyenne* ϕ'; on a donc, entre cette anomalie et l'anomalie excentrique θ la relation

(5) . . . . $\phi'=\theta-\varepsilon\sin.\theta$;

l'équation $\cos.\theta=\frac{r\cos.\phi+a\varepsilon}{a}$, art. 905, donne $\cos.\phi=\frac{a(\cos.\theta-\varepsilon)}{r}$, ou, en substituant pour r sa valeur $a(1-\varepsilon\cos.\theta)$,

(6) . . . . $\cos.\phi=\frac{\cos.\theta-\varepsilon}{1-\varepsilon\cos.\theta}$.

On peut trouver une autre relation entre ϕ et θ en égalant les valeurs $r=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos.\phi}$ et $r=a(1-\varepsilon\cos.\theta)$, ce qui donne $\frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos.\phi}=1-\varepsilon\cos.\theta$, et $\cos.\theta=\frac{\varepsilon+\cos.\phi}{1+\varepsilon\cos.\phi}$. déduisant, de cette dernière équation, $1-\cos.\theta$, $1+\cos.\theta$ et divisant les valeurs trouvées l'une par l'autre, on a

(7) . . . . . $\frac{1-\cos.\theta}{1+\cos.\theta}=\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\cdot\frac{1-\cos.\phi}{1+\cos.\phi}$;

d'où on conclut, par les théorêmes connus de trigonométrie,

(8) . . . $\text{tang.}(\frac{1}{2}\phi)=\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\text{tang.}(\frac{1}{2}\theta)$ L'origine commune de ϕ et de θ est au périhélie.

Le rapport $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ est, art. 886, équations (6) celui de la distance aphélie à la distance périhélie.

907. Les angles ϕ, ϕ' et θ ayant leur origine commune à l'extrémité périhélie de l'axe, l'*équation du centre* est nulle lorsque l'astre passe à ce point de son orbite, et l'instant du périhélie continuant à être pris pour origine du temps t, on calcule aisément l'anomalie moyenne ϕ', au bout d'un temps donné, par l'équation (2) de l'art. 903

$$\phi'=t\sqrt{\frac{h}{a^3}}=\frac{2\pi t}{Ka^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour en déduire le *lieu vrai* de la planète dans son orbite, il faut déterminer ϕ, ce qu'on peut faire en déduisant d'abord θ de ϕ' par l'équation (5) de l'article précédent $\phi'=\theta-\varepsilon\sin.\theta$, et, ensuite, ϕ de θ au moyen d'une des équations (6) ou (8) du même article; mais l'équation $\phi'=\theta-\varepsilon\sin.\theta$ ne donne l'angle auxiliaire θ que par des procédés de tâtonnement, ou par des méthodes d'approximation, et le problême de déterminer ainsi ϕ lorqu'on connaît ϕ', ou de déduire l'*anomalie vraie* de l'*anomalie moyenne*, connu sous le nom de *problême de Képler* parceque ce grand Astronome est le premier qui s'en soit occupé, a été, aprés lui, l'objet des recherches de plusieurs analystes.

(Voyez la *Mécanique analytique*, édition de 1788, page 268, et la *Mécanique céleste*, 1.re partie, livre 2, n.os 21 et 22) (*).

Examen des circonstances d'après lesquelles l'orbite est une *ellipse*, une *para*-

[redacted]

887, que l'orbite était une courbe fermée, et, en cela, j'ai eu pour but de rendre les résultats de l'analyse applicables au mouvement réel des planètes dont l'existence et la marche nous sont connues ; mais j'ai fait voir, art. 889, que cette analyse embrasse des cas beaucoup plus généraux ; elle prouve qu'un corps mis en mouvement par une impulsion initiale, et sollicité par une puissance qui agit en raison inverse du quarré de la distance du mobile au centre d'action, peut décrire une section conique quelconque, et elle fournit le moyen de connaître, dans chaque cas particulier, la courbe décrite dont l'*espèce*, indépendante de la direction de la vîtesse initiale, se conclut de la valeur absolue de cette vîtesse, de l'intensité de la force centrale, et de la distance initiale du mobile au centre d'action ; je vais démontrer quelques théorêmes fondamentaux sur cette matière.

Je suis parvenu, art. 888 et 889, par la seule condition que la force centrale est réciproque au quarré des distances, à une équation de l'orbite de la forme,

Équation (2) *de l'art.* 886 . . . . . $r = \pm a \cdot \dfrac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon \cos. \phi}$

qui peut appartenir à toutes les sections coniques.

J'ai trouvé ensuite, art. 894, que la valeur générale de la vîtesse, dans le sens de l'orbite, également applicable à toutes les formes possibles de cette orbite, était

Équation (2) *de l'art.* 894 . . . $v = \sqrt{\dfrac{2h}{r} - \dfrac{h}{a}}$;

d'où on déduit, en désignant par U et par R des valeurs connues de v et de r qui ont lieu ensemble, soit au premier instant, soit à un autre instant donné du mouvement,

(1) . . . . $a = \dfrac{Rh}{2h - RU^2}$;

or, d'après l'équation (2) de l'art. 886, la section conique, à laquelle appartient le demi-grand axe a, sera une *ellipse*, une *parabole* ou une *hyperbole*, respectivement, selon que cette valeur de a sera positive, infinie ou négative ; on a ainsi les conditions

---

chaine publication du traité complet, sera reçue, avec la plus vive satisfaction, par l'Europe savante impatiente de posséder ce nouveau monument élevé à la plus belle des Sciences.

$$(2)\ldots\begin{cases}\textit{Cas de l'ellipse}\ldots\ U^2 < \dfrac{2h}{R}\\[2ex] \textit{Cas de la parabole.}\ U^2 = \dfrac{2h}{R}\\[2ex] \textit{Cas de l'hyperbole.}\ U^2 > \dfrac{2h}{R}\end{cases}$$

Observez que, dans le cas de $a=\infty$, la quantité $a(1-\varepsilon^2)$ n'en est pas moins finie et égale au demi-paramètre, puisque $1-\varepsilon^2$ diminue, à mesure que a augmente, de manière à devenir infiniment petit, lorsque a devient infiniment grand.

On voit, par ces résultats, 1.° que l'espèce de la section conique et la longueur de son grand axe sont, ainsi que j'en ai prévenu, indépendantes de la direction de la vîtesse initiale, et se trouvent données par la valeur absolue de cette vîtesse, la distance initiale du mobile au centre d'action et l'intensité de la force centrale ; 2.° que le terme $\frac{h}{a}$ qui entre dans la valeur générale de la vîtesse étant soustractif, nul ou additif, respectivement, dans les cas de l'ellipse, de la parabole ou de l'hyperbole, cette vîtesse, à des distances égales du centre d'action, est plus petite dans l'ellipse et plus grande dans l'hyperbole qu'elle ne l'est dans la parabole.

909. L'espèce de la section conique et son grand axe étant ainsi trouvés, il faut chercher la position de ce grand axe et les autres quantités nécessaires pour la détermination de la forme et des dimensions de l'orbite. Prenant pour donnée la position de la droite qui joint le mobile au centre d'action, au moment où les valeurs initiales U et R ont lieu, on pourrait conclure l'angle Ω (équation (5) de l'art. 889), qui fixe la position du grand axe par rapport au rayon vecteur primitif R, et l'excentricité ε, de deux valeurs de r correspondantes à deux valeurs de ω ; mais toutes les valeurs dont on a besoin se déduisent aussi de la seule connaissance de l'angle entre la direction de la vîtesse initiale U et le rayon vecteur correspondant R ; désignant cet angle par μ on a, au moment où la vîtesse donnée a lieu, $\frac{R^2 d\omega}{dt} = RU \sin.\mu$, (équation (1) de l'art. 887) d'où

$$(1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ C = RU\sin.\mu\,;$$

cette valeur et celle de a donnée par l'équation (1) de l'article précédent, étant substituées dans l'équation $h = \frac{C^2}{a(1-\varepsilon^2)}$ de l'art. 890, on a, en tirant la valeur de ε,

$$(2) \ldots\ldots \varepsilon = \left\{ 1 - \frac{RU^2(2h - RU^2)\sin.^2\mu}{h^2} \right\}^{\frac{1}{2}};$$

quantité qui est plus petite que l'unité, égale à l'unité, ou plus grande que l'unité, respectivement, suivant que la 1.re, 2.e, ou 3.e condition de l'article précédent a lieu. Ensuite Φ étant la valeur inconnue de l'angle primitif formé par le rayon vecteur initial R et par le grand axe, l'équation $\cos.\phi = \frac{a(1-\varepsilon^2)-r}{r\varepsilon}$ déduite de la valeur générale de r, équation (2) de l'art. 886, donne

$$(3) \ldots\ldots \cos.\Phi = \frac{a(1-\varepsilon^2)-R}{R\varepsilon};$$

a et ε ayant les valeurs déduites des équations (1) de l'article précédent et (2) du présent article.

On a ainsi tous les *éléments* de l'orbite qui, d'après ce que j'ai dit art. 846 et 862, doit être renfermé dans le plan passant par le rayon vecteur R et par la ligne de direction de la vîtesse initiale.

910. Tout ce qui précède suppose que la force centrale a un sens d'action tel qu'elle tend à rapprocher le mobile du point d'où elle émane; mais, son intensité continuant à être réciproquement proportionnelle au quarré de la distance, si on rendait cette force *répulsive*, d'*attractive* que je l'ai supposée, il faudrait changer le signe de h dans toute les formules données depuis l'art. 889, et la valeur de l'excentricité ε, donnée par l'équation (2) de l'article précédent, deviendrait plus grande que l'unité; ainsi l'orbite serait une hyperbole, et le mobile décrirait, alors, la branche de cette hyperbole opposée à celle qui environne le centre d'action.

Éclaircissements tirés de la considération du mouvement elliptique, sur quelques difficultés que présente la théorie du mouvement rectiligne d'un point matériel attiré, vers un centre fixe, en raison inverse des quarrés des distances.

911. J'ai donné, art. 732, la valeur du temps employé, par un point matériel, à parcourir la ligne droite qui le sépare d'un point fixe, vers lequel il est attiré en raison inverse des quarrés des distances, sa vîtesse initiale, à l'origine de la ligne parcourue, étant nulle. Si on désigne, par a, la longueur de cette ligne, par ρ, la distance du centre d'action à laquelle la force accélératrice émanant de ce centre $= g$, et, par π, la demi-circonférence dont le rayon $= 1$, le temps dont il s'agit a pour valeur

$\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a^3}{2g\rho^2}}$; et j'observe que $g\rho^2$, quatrième proportionnelle à $1, \rho^2$ et g, est le nombre représentant la force accélératrice à l'unité de distance du centre d'action, c'est-à-dire le nombre correspondant à celui que j'ai représenté par h depuis l'art. 889. De plus, dans le cas de l'art. 732, la vîtesse, infinie au point de contact, prend, ainsi que le temps, des valeurs imaginaires pour tous les points de la ligne du mouvement placés au-delà du centre d'action par rapport au point de départ. Ces dernières circonstances présentent des difficultés qui n'ont pas toujours été résolues d'une manière satisfaisante. Voici comment on les explique par la théorie du mouvement elliptique.

On a, art. 908 et 909 les équations

$$a = \frac{Rh}{2h - RU^2}, \text{ d'où } R = \frac{2ah}{aU^2 + h};$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{RU^2(2h - RU^2)\sin.^2\mu}{h^2}};$$

et, art. 890 équation (3),

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{h}} = 2\pi h\sqrt{\frac{R^3}{(2h - RU^2)^3}}.$$

Ces équations prouvent : 1.° que le temps T, employé à parcourir l'orbite totale, ne dépend, en aucune manière, de la forme de l'ellipse ou de son excentricité ε, mais uniquement de la distance initiale R du mobile au centre d'action, et de la vîtesse de projection U, sans égard à l'angle μ formé par la direction de cette vîtesse et par la ligne R, angle qui détermine l'excentricité : 2°. que la vîtesse initiale U étant supposée de plus en plus petite, la distance initiale R et l'excentricité [redacted]

que $g\rho^2$ représentait h), parceque cette dernière n'exprime que le temps employé à parcourir la distance initiale entre le mobile et le centre d'action, c'est-à-dire la distance de l'aphélie au périhélie, ou la moitié de l'ellipse réduite au dernier degré d'aplatissement ; et, puisque, d'après les lois du mouvement elliptique, qui doivent être conservées dans toutes les suppositions imaginables sur la valeur de l'excentricité, le mobile, arrivé au périhélie, retourne toujours à l'aphélie, on voit, par-là, pourquoi en introduisant, dans l'analyse, la condition de l'existence du mobile au-delà du périhélie par rapport à l'aphélie, on arrive nécessairement à des résultats impossibles ou imaginaires.

Observant, de plus, que l'équation (1) de l'art. 896 rend la vîtesse, au périhélie, d'autant plus grande que l'excentricité ε diffère moins de l'unité, de manière que cette vîtesse devient infinie lorsque $1-\varepsilon$ est infiniment petit, il sera évident que les phénomènes, dont il est question à l'art. 732, sont exactement ceux du mouvement qui a lieu dans une ellipse réduite au dernier degré d'aplatissement, et doivent leur être assimilés à tous égards ; le contenu du présent article offre donc complétement les rapprochements et les explications annoncées à l'art. cité.

Comment on a égard aux actions que les planètes exercent sur le soleil dans les expressions analytiques relatives à leurs mouvements. Petites anomalies qu'éprouve la troisième loi de Kepler. Formules pour calculer les rapports entre les masses des corps du système planétaire. Force de la pesanteur à la surface de chaque planète. Lois du mouvement de deux corps célestes dans l'hypothèse où ils n'auraient reçu aucune impulsion initiale. Immobilité, dans cette hypothèse, de leur centre de gravité commun.

912. J'ai dit, art. 891, que les masses des planètes produisaient, dans les conséquences déduites de la troisième loi de Kepler, de petites anomalies dont il est bon de donner l'évaluation. On a vu, précédemment, que l'attraction, en raison directe de la masse et inverse du quarré de la distance, était une propriété commune à toutes les molécules de matière que l'univers renferme ; il suit de là, comme je l'ai observé art. 888, qu'une planète exerce sur le soleil une action, en vertu de laquelle elle doit avoir une tendance à s'en rapprocher, indépendante de l'action qu'elle éprouve de sa part, et uniquement due à celle qu'elle exerce sur lui. D'après ce fait, et en conservant, pour mieux fixer les idées, l'hypothèse de l'immobilité absolue du soleil, il

est manifeste que si les masses des deux astres étaient égales entr'elles, la tendance, dont je viens de parler, aurait pour mesure l'attraction entière du soleil sur la planète, en vertu de laquelle elle est, art. 889, animée d'une force accélératrice $= \frac{h}{r^2}$; mais, eu égard à la loi des masses, art. 892, le rapport de la valeur véritable à cette valeur hypothétique est celui de la masse de la planète à celle du soleil, et, désignant ce rapport par ν, la partie de la force accélératrice de la planète, due à l'action qu'elle exerce sur le soleil, sera $\frac{\nu h}{r^2}$, et sa force accélératrice totale, sera $\frac{h}{r^2}(1+\nu)$; cette force équivaut à celle qui aurait lieu si, continuant de supposer la planète sans force attractive, on augmentait la masse du soleil d'une quantité égale à la masse de la planète.

913. Le rapport ν, qui varie d'une planète à l'autre, est égal à $\frac{1}{2546320}$ pour la planète Mars, celle que Kepler a principalement fait servir à la découverte de ses lois, et sa plus grande valeur, applicable à Jupiter, est de $\frac{1}{1067}$, il n'est donc pas étonnant, que l'observation ait donné à la quantité $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{h}$ une valeur sensiblement constante dans tout le système planétaire, vu son peu de différence avec la véritable valeur $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{h(1+\nu)}$ dans laquelle les différentes masses des planètes introduisent de légères variations.

914. Voici comment on peut conclure, des quantités connues par l'observation, les valeurs numériques de h et ν; soit m la masse de la terre, ρ son rayon moyen, g continuant à représenter la force accélératrice des graves à sa surface. Pour déduire de la force accélératrice imprimée à la distance ρ celle qui a lieu à l'unité de distance, il faut prendre la quatrième proportionnelle à 1, ρ^2 et g, ainsi la force accélératrice cherchée est égale à $g\rho^2$.

Cette quantité $g\rho^2$ est purement hypothétique comme la quantité h de l'art. 889, car, à une distance du centre de la terre ou de celui du soleil égale à l'unité linéaire qui mesure g et ρ, l'attraction ne suit pas, art. 728, la raison inverse du quarré des distances; mais, comme dans l'hypothèse de la sphéricité des astres de notre système, leur attraction à des distances de leurs centres plus grandes que leurs rayons, est la

la même, comme je le ferai voir dans la suite du cours, que si leur masse était toute rassemblée à leur centre, on peut, pour avoir un *module* de force attractive applicable aux corps situés au dehors de ces astres, supposer que la loi inverse du quarré des distances a lieu jusqu'à leurs centres, ce qui revient à les considérer, en conservant les masses, comme des points matériels occupant les lieux de ces centres.

Le produit de l'expression $g\rho^2$ par la masse attirée donne la *force motrice* de cette masse, et, par conséquent, $g\rho^2$ est la valeur numérique de la force motrice imprimée à l'unité de masse placée à l'unité de distance du centre de la terre, le point de vue, sous lequel on doit envisager cette valeur hypothétique étant conforme aux explications que je viens de donner. Divisant ensuite $g\rho^2$ par la masse m, on a, d'après la loi du rapport des masses, l'expression $\frac{g\rho^2}{m}$, qui donne la valeur numérique de la force motrice imprimée par l'unité de masse à une autre unité de masse placée à l'unité de distance, ou la valeur numérique de la force accélératrice que cette même unité de masse communique à un point matériel, de masse quelconque, également placé à l'unité de distance.

Le produit de $\frac{g\rho^2}{m}$ par une masse quelconque donne donc la force accélératrice communiquée par cette masse à un corps placé à l'unité de distance ; ainsi, M étant la masse du soleil, on aura, en conservant à la lettre h la signification qui lui a été donnée art. 889,

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots h = \frac{M}{m}\, g\rho^2.$$

On a de plus, d'après l'article précédent, T et a se rapportant à l'orbite de la terre,

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{h\left(1+\frac{m}{M}\right)};$$

et on déduit de ces deux équations

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m}{M} = \frac{g\rho^2 T^2}{4\pi^2 a^3 - g\rho^2 T^2};$$

$$(4) \ldots\ldots\ldots h = \frac{4\pi^2 a^3 - g\rho^2 T^2}{T^2};$$

ce qui détermine la valeur de v, applicable à la terre, et la valeur de h.

Maintenant pour avoir la valeur de ν, applicable à une planète quelconque, on emploiera l'équation de l'art. 913, $\frac{T'^2}{a'^3} = \frac{4\pi^2}{h(1+\nu)}$ (T' et a' sont la durée de la révolution totale et la distance moyenne de la planète dont il sagit), qui donne

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots \nu = \frac{4a'^3\pi^2}{hT'^2} - 1;$$

et on introduira, dans cette expression de ν, la valeur de h calculée par l'équation (ci-dessus).

Les rapports ν entre les masses des planètes et celle du soleil, ainsi évaluées par l'emploi des éléments dont j'ai parlé à l'art. 892, peuvent aussi se déterminer, par approximation, sans qu'on soit obligé d'introduire la quantité h dans le calcul qui devient, par conséquent, indépendant de g et ρ; mais cette méthode ne s'applique qu'aux planètes qui ont des satellites; voici en quoi elle consiste : soit m' la masse d'une planète et m'' celle de son satellite ; T'' et a'' étant le temps total de la révolution de ce satellite et sa distance moyenne rapportés à sa planète, dont l'action à l'unité de distance a, pour valeur, équation (1), $\frac{m'}{m} \cdot g\rho^2$, ou $\frac{m'}{M} \cdot h$, on a.

$$(6) \ldots\ldots\ldots \frac{T''^2}{a''^3} = \frac{4\pi^2}{h\frac{m'}{M}\left(1 + \frac{m''}{m'}\right)};$$

d'une autre part le mouvement de la planète autour du soleil donne

$$(7) \ldots\ldots\ldots \frac{T'^2}{a'^3} = \frac{4\pi^2}{h\left(1 + \frac{m'}{M}\right)};$$

$\frac{m'}{M}$ et, divisant (5) par l'équation $\frac{m}{M} = \frac{4\pi^2 a^3 - hT^2}{hT^2}$ déduite de (2), on aura

$$(9) \ldots\ldots \frac{m'}{m} = \frac{(4\pi^2 a'^3 - h\,T'^2)\,T^2}{(4\pi^2 a^3 - hT^2)\,T'^2}.$$

915. La force accélératrice des graves placés à la surface d'une planète quelconque, que je désigne par Φ, se déduit aisément de ce qui précède, lorsqu'aux données qui entrent dans les formules trouvées on réunit celle du rayon moyen de la planète. Soit ρ' ce rayon moyen, et m' la masse de la planète, la force accélératrice qu'elle imprime sera, d'après l'art. précédent, $\frac{m'}{m} \cdot g\rho^2$ à l'unité de distance, et on aura $\Phi = \frac{m'}{m} \cdot \frac{\rho^2}{\rho'^2} g$ à la distance ρ' du centre, c'est-à-dire à la surface. Le rapport $\frac{m'}{m}$ sera donné, soit par une table qu'on peut avoir calculée d'après l'équation (5) ou l'équation (8) de l'article précédent, laquelle, contenant les rapports entre les masses des planètes et celle du soleil, fait, par conséquent, connaître les rapports entre les masses des planètes, soit par l'équation (9) du même article.

916. J'ai dit précédemment que le soleil avait une tendance à se déplacer en vertu de l'action qu'une planète exerçait sur lui, et il est bon de donner quelques détails, sur ce sujet, avant de passer à d'autres matières. On a vu, art. 914, que le produit de la quantité $\frac{g\rho^2}{m}$ par la masse d'un corps quelconque donnait la valeur de la force accélératrice communiquée par cette masse à un corps éloigné d'elle à l'unité de distance ; faisant, pour abréger, $\frac{g\rho^2}{m} = q$, désignant par m' la masse d'une planète et par r son rayon vecteur mené du centre du soleil, $\frac{m'q}{r^2}$ sera l'expression de la force accélératrice que reçoit le soleil en vertu de l'action de la planète, et $\frac{Mq}{r^2}$ celle de la force accélératrice que reçoit la planète par l'action du soleil (M est la masse du soleil), la force motrice, imprimée à chacun des deux astres, étant $\frac{Mm'q}{r^2}$.

On a donc, en supposant que les deux astres commencent à agir l'un sur l'autre sans vîtesses initiales, et tendent à se rapprocher en se mouvant sur la droite qui joint leurs centres, v et w désignant respectivement la vîtesse du soleil et celle de la planète au bout du temps t,

$$(1) \ldots\ldots \left\{ \frac{dv}{dt} = \frac{mq}{r^2}\,; \quad \frac{dw}{dt} = \frac{Mq}{r^2}\,; \right\}$$

dt étant constant, on a, au bout du temps t,

$$\int(dv) : \int(dw) :: m : M\,;$$

d'où (2) .... $v = \frac{m}{M} w\,;$

les vîtesses sont, à chaque instant, réciproquement proportionnelles aux masses.

Nommant x et x', respectivement, les distances au bout du temps t des centres des masses M et m à leurs points respectifs de positions initiales, l'équation précédente se change en $\frac{dx}{dt} = \frac{m}{M} \cdot \frac{dx'}{dt}$, ou

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad xM - x'm = 0.$$

a étant la distance initiale entre les corps, on aura, au moment de leur réunion, $x + x' = a$, équation qui, combinée avec la précédente, donne $x = \frac{am}{m+M}$, $x' = \frac{aM}{m+M}$; d'où l'on conclut que les deux astres, s'ils étaient des points matériels, arriveraient, au même instant, au point de position initiale de leur centre de gravité commun, et on voit, par l'équation (3), ou par sa dérivée $M\frac{dx}{dt} = m\frac{dx'}{dt}$, que ce centre de gravité commun reste immobile pendant toute la durée

Considérations générales sur le mouvement d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur une courbe donnée. Expression générale de la vitesse. Cette vitesse est constante lorsque le mobile ne se meut qu'en vertu d'une impulsion initiale.

917. Le point matériel mobile peut être considéré comme une sphère, d'un diamètre infiniment petit, renfermé dans un tube dont il occupe toute la section transversale, et dans lequel il se meut sans frottement ; j'appelle *directrice* la ligne que suit son centre ; cette ligne est, en général, une courbe à double courbure ; les positions de tous ses points sont rapportées à trois axes fixes, perpendiculaires entr'eux, sur lesquels se mesurent les coordonnées x, y et z de ces différents points. La surface de la paroi intérieure du tube, est censée engendrée par un des grands cercles du mobile sphérique, se mouvant perpendiculairement à la *directrice*, avec la condition d'avoir toujours son centre sur cette courbe.

Chacune des puissances, qui sollicite le mobile, est dirigée sur son centre, et décomposée en trois forces respectivement parallèles aux x, y et z; la somme des composantes parallèles aux x est désignée par X, la lettre Y représentant les forces parallèles aux y, et la lettre Z les forces parallèles aux z.

918. Le mobile sollicité par les forces X, Y et Z, décrirait, s'il se mouvait *librement*, une certaine courbe dont on trouverait l'équation par les principes posés au commencement de cette section; mais comme la trajectoire est une courbe déterminée, il faut avoir égard à cette circonstance dans les équations du mouvement, ce qu'on peut faire en combinant avec les forces X, Y et Z, une force Γ, telle que les actions simultanées de X, Y, Z et Γ, feraient parcourir *librement* au mobile, la même courbe sur laquelle ce mobile, enfermé dans un tube, ou canal, de figure donnée, est obligé de se mouvoir.

On a, sur le champ, une idée de la fonction que remplit cette force Γ et de sa direction, en considérant qu'elle remplace la résistance du tube, et qu'elle doit par conséquent, à chaque instant, annuller la tendance qu'a le centre du mobile à s'écarter de la *directrice*; la direction de Γ doit donc être perpendiculaire à cette *directrice*; il est évident qu'une seule force normale et ayant d'ailleurs l'intensité

convenable, suffit pour remplir la condition dont il s'agit; dès-lors, on peut, en réunissant la force Γ aux forces X, Y et Z, et en suivant la même marche de raisonnement qu'à l'art. 820, poser les équations du mouvement comme si le mobile était libre.

Soient n', n'', n''' les angles respectivement formés par les axes des x, y et z et par la force Γ, les équations, dont je viens de parler, seront les suivantes

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = dt\,(X + \Gamma \cos. n')\,;$$

$$d\left(\frac{dy}{dt}\right) = dt\,(Y + \Gamma \cos. n'')\,;$$

$$d\left(\frac{dz}{dt}\right) = dt\,(Z + \Gamma \cos. n''').$$

919. Je multiplie les 1.re, 2.e et 3.e équations de l'art. précédent respectivement par dx, dy, dz, et, faisant la somme des équations produits dans l'hypothèse de dt constant, j'ai

$$(1)\ldots\quad \frac{dx.ddx + dy.ddy + dz.ddz}{dt^2} = \begin{cases} Xdx + Ydy + Zdz \\ + \Gamma(dx\cos.n' + dy\cos.n'' + dz\cos.n''') \end{cases}$$

L'élément de courbe ds sur lequel se trouve le mobile fait avec les axes des x, y et z, des angles respectifs qui ont pour cosinus $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; et, comme cet élément de courbe est, par hypothèse, perpendiculaire à la force Γ, on a, par les théorêmes connus de trigonométrie, $\frac{dx}{ds}\cos. n' + \frac{dy}{ds}\cos. n'' + \frac{dz}{ds}\cos. n''' = 0$

(3) . . . . . $v^2 = U^2 + 2\int(Xdx + Ydy + Zdz)$;

c'est l'équation (2) de l'article cité, v est la vîtesse au bout du temps t et U^2 la constante arbitraire.

920. Si le mobile n'étant soumis à l'action d'aucune puissance, ce qui donne $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, se meut en vertu d'une vîtesse initiale qui lui aura été imprimée tangentiellement à un point quelconque de la *directrice*, l'équation précédente devient

(1) . . . . $v = U$;

la vîtesse est constante, ainsi sa valeur initiale U se conserve la même pendant la durée du mouvement dans le tube; x étant la distance au bout du temps t, mesurée sur la directrice, du mobile à un point fixe de cette courbe, on a, dans l'hypothèse des valeurs simultanées $x = 0$ et $t = 0$,

(2) . . . . $x = Ut$;

ce résultat et tous ceux que j'aurai à conclure de la théorie exposée depuis l'art. 917 supposent que la courbure de la directrice est soumise à la loi de continuité.

921. Considérant l'équation (3) de l'art. 919, sous un point de vue plus général, on peut d'abord se donner pour condition que les forces dont se composent X, Y et Z sont fonctions des distances des points d'applications de ces forces à des points fixes pris sur leurs directions respectives; c'est le cas remarquable dont je me suis occupé, art. 823 et suivants, et qui rend, ainsi que je l'ai démontré aux articles cités, la fonction $Xdx + Ydy + Zdz$ intégrable indépendamment de toute relation particulière entre x, y et z.

On peut donc, dans le cas dont je viens de parler, supposer . . $\int(Xdx + Ydy + Zdz) = Q$, en désignant par Q une certaine fonction finie de x, y et z dont la composition n'a aucune liaison nécessaire avec celles des fonctions dépendantes de la courbure de la directrice, ce qui donne à la valeur de la vîtesse la forme

$v^2 = U^2 + 2Q$; $\left\{ \begin{array}{l} Q \text{ est une fonction finie de } x, y \text{ et } z \text{ indépendante} \\ \text{de toute relation entre les coordonnées de la } \textit{directrice}. \end{array} \right.$

et, comme la fonction Q est absolument indépendante de celle dont l'égalité à zéro détermine les positions respectives des points de la directrice, la forme de cette courbe n'influe en rien sur la valeur de v,

qui est donnée, uniquement, à un instant quelconque, par les valeurs des coordonnées du point mobile à cet instant, sans égard aux valeurs de ces coordonnées correspondantes aux positions que ce mobile a eues ou qu'il aura dans les instants précédents ou suivants, la seule condition à laquelle ces positions sont assujetties étant la *continuité* de la courbure de la directrice.

922. Ces remarques conduisent à une conséquence digne d'attention; si on imagine, entre deux points fixes de l'espace, une infinité de tubes de courbures quelconques *continues* dont chacun ait son origine à l'un de ces points et son extrémité à l'autre, un point matériel, soumis à des puissances données, et introduit dans un de ces tubes avec une vîtesse initiale déterminée dans le sens de sa directrice, aura, arrivé à l'autre extrémité de ce tube, une vîtesse qui sera la même quelque soit le tube parcouru.

Cette proposition peut être présentée sous un point de vue beaucoup plus étendu en terminant les tubes, non à deux points fixes communs, mais à deux surfaces courbes. Pour arriver, à cet égard, aux résultats les plus généraux que la question comporte, j'observe que, dans l'équation

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad v^2 = U^2 + 2Q,$$

on a déterminé la constante par la condition des deux valeurs simultanées $v = U$ et $Q = 0$; mais, en prenant une autre valeur $v = V'$ correspondante à $Q = Q'$, la constante serait égale à $V'^2 - 2Q'$ et on pourrait, à tous égards, remplacer l'équation $v^2 = U^2 + 2Q$ par la suivante

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad v^2 = V'^2 + 2(Q - Q');$$

pour deux autres valeurs particulières et simultanées de v et de Q, respectivement égales à V'' et Q'', on aurait l'équation, aussi générale

[redacted]

par les forces X, Y et Z, passe de la position où on a $Q - Q' = 0$ et où il est animé de la vîtesse V', à la position où on a $Q - Q'' = 0$, il a, dans cette dernière position, une vîtesse $V'' = \{V'^2 + 2(Q'' - Q')\}^{\frac{1}{2}}$; mais Q étant, par l'état de la question, une fonction variable de x, y et z, dire que les coordonnées qui fixent les positions, initiale et finale, du mobile, sont assujetties aux conditions respectives $Q - Q' = 0$, et $Q - Q'' = 0$, c'est dire que parti d'un point quelconque de la surface courbe, qui a pour équation $Q - Q' = 0$, il est arrivé à un point quelconque d'une autre surface courbe ayant pour équation $Q - Q'' = 0$; donc si plusieurs mobiles, dont chacun est sollicité par le même système de forces, partent de la surface courbe déterminée par l'équation $Q - Q' = 0$, avec une vîtesse commune V' et vont, en se mouvant dans des tubes de courbures quelconques *continues*, rencontrer une autre surface déterminée par l'équation $Q - Q'' = 0$, ils auront, aussi, en arrivant à cette seconde surface, une même vîtesse $V'' = \{V'^2 + 2(Q'' - Q')\}^{\frac{1}{2}}$. C'est le cas le plus général du théorême particulier de l'art. 781.

923. v étant la vîtesse du mobile à l'extrémité de l'arc s de la courbe parcourue, j'ai démontré, art. 844, la propriété remarquable du mouvement *libre* $\delta\int(vds) = 0$, qui tient au principe de la *moindre action*. Cette propriété a été déduite de l'expression générale de la vîtesse, et comme cette expression est la même dans le cas du mouvement *libre* et dans celui du mouvement qui a lieu sur une courbe déterminée, il semblerait, au premier coup d'œil, que l'équation $\delta\int vds = 0$, devrait également être satisfaite dans l'un et l'autre cas; mais on reconnaîtra aisément la différence de ces deux cas en faisant attention aux détails du calcul, indiqués à l'art. cité, d'après lesquels, en remplaçant les forces X, Y et Z par leurs valeurs déduites des équations de l'art. 918, on a

$$\delta(vds) = \begin{cases} \dfrac{d(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z)}{dt} \\ - Ndt\,(\delta x \cos. n' + \delta y \cos. n'' + \delta z \cos. n''')\,; \end{cases}$$

l'intégration étant faite entre des limites fixes, prises sur la courbe parcourue, la partie de $\int.\delta(vds)$ donnée par le terme $\dfrac{d(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)}{dt}$ se réduit à zéro, mais il n'en est pas de même de la partie correspon-

dante à l'autre terme du deuxième membre, dans lequel δx, δy et δz sont des variations absolument arbitraires. On peut observer que ce terme disparaitrait avant l'intégration; 1.° dans l'hypothèse particulière de $\delta x = dx$, $\delta y = dy$ et $\delta z = dz$, de laquelle on ne peut rien conclure sur la variation $\delta(vds)$, puisque, dans cette hypothèse, on ne compare la courbe parcourue qu'à elle-même; 2.° dans le cas de $N = 0$, qui est celui du mouvement *libre*.

Considérations générales sur la pression qu'exerce contre la paroi intérieure d'un tube, ou canal fixe, de courbure quelconque *continue*, un corps obligé de se mouvoir dans ce tube. Evaluation générale de la partie de cette pression due à la vîtesse du mobile. Définition de la *force centrifuge*. Cas où le mouvement est modifié, soit par le frottement, soit par la résistance d'un milieu.

924. La pression qu'exerce un corps contre la ligne ou la surface sur laquelle il est assujetti à se mouvoir, fournit matière à des questions également curieuses et importantes, soit dans la mécanique rationnelle, soit dans la mécanique appliquée; cette pression est due à deux causes qu'il est essentiel de bien distinguer; la première est la vîtesse du corps; on a vu, art. 715 et 719, qu'un corps, dans lequel des forces quelconques ont engendré une certaine vîtesse, doit, si ces forces cessent d'agir sur lui après la génération de cette vîtesse, la conserver constamment et se mouvoir en ligne droite à moins que quelque obstacle ne l'en empêche, ce corps exerce donc, en vertu de sa simple vîtesse, un effort contre la paroi intérieure d'un tube ou canal courbé, dans lequel il est forcé de se mouvoir, uniquement parceque ce tube contrarie sa tendance au mouvement rectiligne : ensuite si ce même corps, animé d'une vîtes-

soumis à l'action d'aucune puissance extérieure, conserve, sans altération, une vîtesse qui lui est imprimée, à un point quelconque de la directrice, tangentiellement à cette courbe. Il est aisé de voir, par un raisonnement analogue à celui de l'art. 835, où il s'agissait de la trajectoire libre, que le point matériel, animé d'une vîtesse U avec laquelle il parcourt l'élément de courbe ds rencontrant, à l'extrémité de ds, un autre arc élémentaire ds' qui fait, avec le prmier, un angle dont le sinus $= \frac{ds}{r}$ (le rayon *principal* de courbure, celui qui est renfermé dans le plan de deux éléments de courbe consécutifs, est désigné par r). Si, sur le plan qui renferme les deux arcs élémentaires consécutifs ds et ds' et le rayon r, on décompose U en $U\sqrt{\left(1-\frac{ds^2}{r^2}\right)}$ et $U.\frac{ds}{r}$, prises, respectivement, dans la direction de ds' et perpendiculairement à cette direction, le corps exercera sur ds' un effort normal, ou dirigé suivant le rayon de courbure r, et dû à la vîtesse élémentaire $\frac{Uds}{r}$ laquelle art. 712 et 804 est représentée, dans l'analyse, par la *force accélératrice* $\frac{U}{r} \cdot \frac{ds}{dt}$, ou par $\frac{U^2}{r}$, puisqu'on a $\frac{ds}{dt} = U$, valeur identique avec celle de la force normale déduite de l'équation (2) de l'art. 835 qui est applicable au mouvement libre.

L'autre composante $U\sqrt{\left(1-\frac{ds^2}{r^2}\right)}$ ne diffère de U que d'une quantité comparable au sinus verse d'un angle infiniment petit, ce qui reproduit le théorême de l'art. 920.

926. L'effort normal dont un corps est ainsi capable en vertu de sa simple vîtesse, et qui, pour une masse constante, est proportionnel à $\frac{U^2}{r}$, s'appelle *force centrifuge*. Voici un autre moyen d'arriver à l'expression de cette force, qui a l'avantage de faire connaître immédiatement sa direction dans l'espace, et qui offrira d'ailleurs aux élèves un exercice utile d'analyse et de mécanique.

Puisque le mobile animé de la vîtesse U et ayant, en vertu de cette vîtesse, une tendance à se mouvoir en ligne droite, presse la paroi du canal, cette paroi lui fait éprouver une réaction que l'on peut considérer

comme une puissance inconnue, tant en intensité qu'en direction, à laquelle ce corps est soumis ; je désigne cette puissance par N et j'appelle n', n'', n''', respectivement, les angles qu'elle forme avec les axes des x, y et z ; on a donc, art. 820,

$$X = N\cos. n' ;\quad Y = N\cos. n'' ;\quad Z = N\cos. n''' ;$$

$$(1)\ \ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{l} d\left(\dfrac{dx}{dt}\right) = Ndt\cos. n' ; \\ d\left(\dfrac{dy}{dt}\right) = Ndt\cos. n'' ; \\ d\left(\dfrac{dz}{dt}\right) = Ndt\cos. n'''. \end{array}\right.$$

Mais le mobile, animé de la vîtesse U, n'éprouve, par hypothèse, d'autre action que celle qui est due à la résistance de la paroi du tube et, d'après l'art. 920, cette résistance ne peut faire subir aucune modification à la vîtesse U, on a donc, ds étant l'élément de courbe parcouru pendant l'instant dt, $U = \dfrac{ds}{dt}$, d'où $dt = \dfrac{ds}{U}$. Substituant cette valeur dans les équations précédentes, prenant ds pour différentielle constante, et désignant le rayon *principal* de courbure par r, ces équations deviennent

$$\left\{\frac{U^2 ddx}{ds^2} = N\cos. n' ;\ \frac{U^2 ddy}{ds^2} = N\cos. n'' ;\ \frac{U^2 ddz}{ds^2} = N\cos. n''' ;\right\}$$

et on en conclut

plus, sa direction dans l'espace, et comme on sait, par la géométrie analytique, que, r étant le rayon de courbure *principal*, on a

$$\frac{1}{r} = \frac{\{(ddx)^2+(ddy)^2+(ddz)^2\}^{\frac{1}{2}}}{ds^2}$$ et que les valeurs de cos. n', cos. n'', cos. n''' sont celles des cosinus des angles respectifs formés par ce rayon et par les axes des x, y et z, le tout dans l'hypothèse de ds constante, on retrouve la valeur $N = \frac{U^2}{r}$ de l'art. précédent, et les autres équations (3) énoncent l'identité entre les directions de r et de N.

On peut observer qu'en regardant la valeur et la direction de N comme connues par l'art. précédent, l'analyse du présent article résoud fort-simplement, par des considérations de mécanique, les problèmes de Géométrie analytique relatifs aux déterminations de la valeur et de la position, dans l'espace, du rayon *principal* de courbure d'une courbe à double courbure.

De la pression totale qu'un corps fait éprouver à une courbe quelconque, sur laquelle il est obligé de se mouvoir, due tant à sa *force centrifuge* qu'à l'action des puissances auxquelles ce corps est soumis.

927. La pression qu'un corps exerce en vertu de sa *force centrifuge* n'est due, ainsi que je l'ai expliqué ci-dessus, qu'à la simple vîtesse; mais, lorsque le mobile est soumis à l'action d'une ou plusieurs puissances, la pression, dont je viens de parler, n'est qu'une partie de celle qu'éprouve la courbe sur laquelle ce mobile est forcé de se mouvoir, car la résultante unique des puissances sollicitantes peut toujours se décomposer en deux forces, l'une *tangentielle* qui, étant uniquement et exclusivement employée à faire varier la vîtesse, n'exerce aucune pression sur la trajectoire, l'autre normale qui (abstraction faite du frottement) n'a aucune influence sur la vîtesse, son effet unique et exclusif étant de presser la trajectoire. La pression totale est donc la résultante de cette dernière force et de la force centrifuge, forces qui agissent, toutes deux, dans le plan normal à la *directrice* à double courbure, mais qui n'ont pas les mêmes directions sur ce plan.

Je désigne par Γ la pression normale totale qu'il s'agit de déterminer, par R la résultante générale des puissances sollicitantes X, Y

et Z étant les composantes de R respectivement parallèles aux x, y et z ; par Θ l'angle que forme R avec l'élément de courbe ds sur lequel le mobile se trouve au moment ou la pression Γ a lieu, je fais $\Pi = R \sin. \Theta =$ la composante normale qui, sans influence sur la vîtesse, a, pour effet unique et exclusif, la pression de la trajectoire, et je désigne par f, g, h, respectivement, les angles formés par la direction de Π et par les axes des x, y et z.

On a $R = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$; l'équation (4) de l'art. 829 donne la valeur de cos. Θ et les équations (2) de l'art. 830 donnent celles des cosinus des angles f, g et h ; le contenu des art. cités se rapporte au mouvement libre, mais les déterminations dont je viens de parler n'en sont pas moins indistinctement applicables à la trajectoire *libre* et à la trajectoire *forcée ;* on a même, dans le deuxième cas, l'avantage de pouvoir déduire, immédiatement, des équations de la directrice, toutes les valeurs dépendantes de la position du mobile, et parmi ces valeurs se trouvent celles de X, Y et Z, lorsque dans l'hypothèse des art. 823 et 921 les forces sont fonctions des distances de leurs points d'application à des points fixes pris sur leurs directions.

Les expressions de Θ, f, g et h étant ainsi données par les équations des articles 829 et 830, et la valeur, constante ou variable, de R étant aussi supposée connue, les sommes des composantes, respectivement parallèles aux x, y et z des deux forces normales N et Π, sont, en conservant la signification donnée, art. 925 et 926, aux lettres r, n', n'', n''' et désignant la vîtesse par v, $\frac{v^2}{r}\cos. n' + \Pi \cos. f$; $\frac{v^2}{r}\cos. n'' + \Pi \cos. g$; $\frac{v^2}{r}\cos. n''' + \Pi \cos. h$ et ont pour valeurs respectives, déduites des équations des art. 829, 830 et 926, en observant que Π est la quantité désignée par N aux art. 829 et 830, et que ds est pris pour la différentielle constante,

$$\frac{v^2 ddx + X(dy^2+dz^2) - (Ydy + Zdz)dx}{ds^2};$$

$$\frac{v^2 ddy + Y(dx^2+dz^2) - (Xdx + Zdz)dy}{ds^2};$$

$$\frac{v^2 ddz + Z(dy^2+dx^2) - (Xdx + Ydy)dz}{ds^2}.$$

Soient $K_{,}$, $K_{,,}$, $K_{,,,}$, respectivement, la 1.re, la 2.e et la 3.e de ces composantes, $k_{,}$, $k_{,,}$, $k_{,,,}$ les angles respectifs formés par la pression normale totale Γ et par les x, y et z on a

$$(1)\ldots\begin{cases}\Gamma=\sqrt{K_{,}^2+K_{,,}^2+K_{,,,}^2}\,; \\ \cos. k_{,}=\dfrac{K_{,}}{\Gamma}\,;\quad \cos. k_{,,}=\dfrac{K_{,,}}{\Gamma}\,;\quad \cos. k_{,,,}=\dfrac{K_{,,,}}{\Gamma}\,.\end{cases}$$

La valeur de la force Γ peut, en observant que le cosinus de l'angle formé par ses deux composantes Π et N a pour valeur $\cos. f \cos. n' + \cos. g \cos. n'' + \cos. h \cos. n'''$, et, en désignant cet angle par λ, se mettre, art. 51, sous la forme

$$(2)\ \ldots\ldots\ \Gamma=\sqrt{\Pi^2+N^2+2\Pi N\cos.\lambda}.$$

928. Pour avoir égard au frottement qui peut avoir lieu aux points de contact successifs du mobile et de la paroi du canal dans lequel ce mobile est enfermé, il faut observer que ce frottement a lieu uniquement en vertu des forces normales Π et N, et qu'en appliquant, au cas dont il s'agit ici, les notions établies depuis l'art. 605 jusqu'à l'art. 621, les résistances qui en résultent peuvent, F désignant un coefficient constant, être considérées comme les effets d'une puissance $F\Gamma$ dirigée suivant la trajectoire et agissant en sens contraire du mouvement actuel du mobile.

La valeur et la direction de Γ sont données par les équations (1) de l'art. précédent, F est un coefficient connu par expérience, et on devra, tant dans la valeur de la vitesse v que dans les autres expressions analytiques dans lesquelles entrent les puissances, substituer aux composantes X, Y, Z les nouvelles composantes respectives $X-\dfrac{dx}{ds}F\Gamma$; $Y-\dfrac{dy}{ds}F\Gamma$; $Z-\dfrac{dz}{ds}F\Gamma$.

On peut encore traiter la question dans l'hypothèse de la résistance d'un milieu traversé par le mobile, résistance qui est, en général, une force retardatrice, tangentielle comme la précédente et agissant aussi comme elle dans un sens contraire à celui du mouvement actuel. Ainsi, ψ étant le signe de fonction, il faudra combiner, avec les forces desquelles résulte le mouvement, la force tangentielle $-\psi(v)$ qui doit son existence à ce même mouvement.

Je me borne à ces indications générales sur des cas qui rendent l'a-

nalyse fort-compliquée, lorsque les forces qui entrent dans la composition de X, Y et Z sont dirigées dans des plans différents, et qui, faisant dépendre une partie des causes auxquelles les variations de la vîtesse sont dues de cette vîtesse elle-même, ôtent les moyens de simplification fournis par l'hypothèse des art. 823 et 921, en ne permettant plus de regarder la valeur du quarré de la vîtesse comme composée d'un terme constant et de l'intégrale d'une fonction de la forme $\int(Pdp)$, dans laquelle P est fonction de p.

De la pression que fait éprouver à une courbe plane, sur laquelle il est obligé de se mouvoir, un point matériel sollicité par des forces quelconques, dirigées dans le plan de cette courbe, en ayant égard, tant aux actions des forces qu'à la vîtesse du mobile.

929. Je rapporte les positions des différents points de la trajectoire aux coordonnées rectangulaires x, y, l'axe des x et celui des y étant deux lignes de positions fixes, sur le plan de cette trajectoire, dont le point d'intersection est l'origine commune de x et de y; la distance du mobile à un point fixe de sa trajectoire, mesurée dans le sens de cette trajectoire, sera représentée par s.

Je décompose chacune des puissances qui agissent sur le mobile en deux composantes respectivement parallèles aux x et aux y, et je désigne par X la somme des composantes parallèles aux x et par Y la somme des composantes parallèles aux y.

J'appelle Γ la pression totale cherchée qu'éprouve la trajectoire au point où se trouve actuellement le mobile, au bout du temps t, N étant la *force centrifuge* qui représente la partie de la pression due à la vîtesse du mobile, et Π l'autre partie de la pression due à l'action des puissances.

Il est évident que les pressions N et Π ont lieu dans le plan de la trajectoire, puisque ce plan renferme la direction du mouvement et celles de toutes les forces sollicitantes; de plus N et Π doivent être normales à la trajectoire, car, si on supposait que l'une ou l'autre de ces pressions fit avec la tangente un autre angle que l'angle droit, on pourrair ramener son effet à celui de deux forces, l'une normale, entièrement employée à presser, l'autre tangentielle; mais comme l'effet de la dernière composante, pour presser, est nécessairement nul, cet effet doit être, entièrement, attribué à la première, et la seconde est nécessairement égale à zéro.

N

N et Π ont donc leurs directions sur la ligne du rayon de courbure, et la pression totale se compose de leur somme $N+\Pi$ c'est-à-dire qu'on a

$$\Gamma = N + \Pi.$$

930. Cette identité des lignes de direction de N et Π, qui permet de les composer par *somme*, est, principalement, ce qui rend l'analyse du cas actuel de la pression d'une courbe plane beaucoup plus simple que celui de la pression d'une courbe à double courbure traité depuis l'art. 924 jusqu'à l'art. 928. Dans ce cas général les pressions N et Π sont, à la vérité, dirigées dans un même plan normal, mais elles font un angle entr'elles dans ce plan et, de là, la complication inévitable des formules qui donnent la valeur et la direction de Γ.

Cependant on peut déduire très-aisément de ces mêmes formules la valeur de Γ dont on a besoin en ce moment, pour cela on supprimera des équations de l'art. 927 tout ce qui a rapport à la coordonnée z et à la force Z et on aura,

$$(1) \ldots \begin{cases} K' = \dfrac{v^2 ddx}{ds^2} + \dfrac{dy}{ds} \cdot \dfrac{Xdy - Ydx}{ds}; \\ K'' = \dfrac{v^2 ddy}{ds^2} - \dfrac{dx}{ds} \cdot \dfrac{Xdy - Ydx}{ds}. \end{cases}$$

J'observe que dans l'hypothèse de ds constant, r désignant le rayon de courbure, on a $ddx = \dfrac{dy\,ds}{r}$; $ddy = -\dfrac{dx\,ds}{r}$, ce qui change les valeurs précédentes en

$$(2) \ldots \begin{cases} K' = \dfrac{dy}{ds}\left(\dfrac{v^2}{r} + \dfrac{Xdy - Ydx}{ds}\right); \\ K'' = -\dfrac{dx}{ds}\left(\dfrac{v^2}{r} + \dfrac{Xdy - Ydx}{ds}\right); \end{cases}$$

d'où, en observant que $dy^2 + dx^2 = ds^2$,

$$(3) \ldots \Gamma = \sqrt{K_{,}^2 + K_{,,}^2} = \frac{v^2}{r} + \frac{Xdy - Ydx}{ds};$$

$$(4) \ldots \cos. k_{,} = \frac{K_{,}}{\Gamma} = \frac{dy}{ds}; \quad \cos. k_{,,} = \frac{K_{,,}}{\Gamma} = -\frac{dx}{ds}.$$

On voit que le terme $\dfrac{v^2}{r}$ répond à celui qui, dans les formules géné-

rales, représentait N ou la force centrifuge dépendant exclusivement de la vîtesse ; le terme $\frac{Xdy - Ydx}{ds}$ étant la valeur de Π ou de la partie de la pression due à l'action des forces.

931. Le problème que je viens de résoudre est lié à une théorie avec laquelle les élèves ne sauraient être trop familiers ; je crois devoir, par ce motif, en donner une solution immédiate, qui ne soit pas déduite, comme cas particulier, d'une solution plus générale. Je remarque d'abord que, si des deux quantités N et Π on ne voulait avoir que la force centrifuge N, due à la seule vîtesse, il suffirait d'appliquer, purement et simplement, à deux éléments consécutifs de la trajectoire plane, le même raisonnement qu'on a appliqué art. 925 à deux éléments consécutifs de la trajectoire à double courbure, puisque le résultat auquel je suis parvenu à l'art. cité est fondé sur ce que les deux éléments consécutifs de la trajectoire, la direction du mouvement du mobile qui les parcourt, et le rayon *principal* de courbure sont dans un même plan ; ainsi, dans la trajectoire plane comme dans la trajectoire à double courbure, on a

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots N = \frac{v^2}{r}.$$

Quant à l'identité de direction de N et Π suivant la ligne du rayon de courbure, je n'ai rien à ajouter à ce qui a été dit, art. 929, et j'ai en conséquence l'équation

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \Gamma = N + \Pi.$$

Je vais maintenant chercher, par des procédés immédiats, la valeur générale de Γ dans la trajectoire ; cette valeur se composera du terme $\frac{v^2}{r}$

Ensuite, si le mobile est obligé de suivre, sur ce plan, une courbe déterminée, je considère la réaction Γ de cette courbe contre le mobile, comme une force particulière qui, combinée avec les forces X et Y, réduit la question du mouvement *forcé* à celle du mouvement *libre*.

La force Γ, d'après ce qui précède, agit suivant la ligne du rayon de courbure, et pour fixer les idées, sur son sens d'action, on peut supposer que le mobile se meut sur la concavité de la courbe VMW, en Fig. 6.
allant de M en W et exerçant une pression normale dans le sens $N'MN$, de laquelle résulte, par conséquent, une réaction dans le sens NMN'; l'angle YAX étant celui des x et y positives, la réaction Γ tend à éloigner le mobile de l'axe AX et à le rapprocher de l'axe AY, c'est-à-dire à augmenter les y et à diminuer les x; ainsi le cosinus $-\frac{dy}{ds}$ de l'angle obtus $X'MN'$, formé par MN' et par l'axe des x doit avoir le signe négatif, le sinus $\frac{dx}{ds}$ du même angle qui est le cosinus de l'angle aigu $Y'MN'$ prenant le signe positif, toutes choses compatibles avec les valeurs positives de dx, dy, X et Y et supposant seulement la relation de X à Y telle que le mobile soit, à l'instant où on considère son mouvement, appliqué contre la concavité de VMW. Les cosinus $-\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dx}{ds}$ ont des signes contraires à ceux de cos. $k_{,}$ et cos. $k_{,,}$, équations (3) de l'art. 930, parcequ'ici j'emploie la réaction de la courbe contre le mobile, au lieu qu'à l'art. cité Γ représentait l'action contraire du mobile sur la courbe; mais cette différence de signes n'a aucune influence sur la valeur ultérieure de Γ.

D'après ces explications, et en suivant la marche de raisonnement de l'art. 918 on trouvera aisément que les équations du mouvement *forcé* sur la courbe VMW, ramenées au cas du mouvement *libre*, sont

$$(4)\cdots\left\{\begin{array}{l} d\left(\frac{dx}{dt}\right)=\left(X-\frac{dy}{ds}\Gamma\right)dt\,; \\ d\left(\frac{dy}{dt}\right)=\left(Y+\frac{dx}{ds}\Gamma\right)dt. \end{array}\right.$$

Pour en déduire la valeur de Γ je multiplie la 1.re par dy, la 2.e par dx et je retranche la dernière équation produit de la 1.re, ce qui donne, en observant que $dy^2+dx^2=ds^2$ et prenant la valeur de Γ,

$$\Gamma = \frac{\frac{dx}{dt}\cdot d\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{dy}{dt}\, d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{ds} + \frac{Xdy - Ydx}{ds};$$

on a $\frac{dx}{dt} d\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{dy}{dt} d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx^2}{dt^2}\, d\left(\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx^2}{dt^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)$;
d'où

$$\Gamma = \frac{\frac{dx^2}{dt^2}\cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds} + \frac{Xdy - Ydx}{ds};$$

substituant pour dt^2 sa valeur $\frac{ds^2}{v^2}$

$$\Gamma = \frac{dx^2\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^3} v^2 + \frac{Xdy - Ydx}{ds}.$$

Je n'ai supposé aucune différentielle constante et dans ce cas, $r = \frac{ds^3}{dx^2\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$; le terme $\frac{Xdy - Ydx}{ds}$ qui n'est formé que de quantités du 1.er ordre est indépendant de toute hypothèse sur le *module* de différentielle, on a donc

$$(5) \; \ldots\ldots \; \Gamma = \frac{v^2}{r} + \frac{Xdy - Ydx}{ds}$$

valeur identique avec celle de l'équation (3) de l'art. 930; $\frac{v^2}{r}$ est la *force centrifuge*, $\frac{Xdy - Ydx}{ds}$ est la partie de la pression normale

tion par d'autres moyens dont le plus direct et le plus simple consiste à attacher ce mobile à l'extrémité d'un fil qui, pendant le mouvement, ou s'enveloppe autour d'une ligne ou surface courbe, ou se développe après avoir été d'abord plié suivant une certaine courbure.

Bornant cette considération aux courbes planes, on conçoit aisément que si un fil attaché, par une de ses extrémités, à un point d'une pareille courbe et enveloppé sur une portion convexe de cette courbe, tient un corps attaché à son autre extrémité, en donnant à ce corps une impulsion, telle que le fil se développe successivement sur le plan de la courbe en restant toujours tendu, le mobile, considéré comme un point matériel, décrira une autre courbe déterminée. On peut se donner la courbe *développée*, en déduire la *développante*, et réciproquement. L'emploi de ce moyen dans les arts n'est pas sans exemple ; le fameux Huyghens s'en était servi pour obtenir des oscillations *isochrones* quelques fussent leurs amplitudes, d'après une théorie que j'exposerai bientôt.

933. Le fil est continuellement perpendiculaire à la courbe décrite et sa tension mesure la pression que le corps ferait éprouver à une courbe matérielle sur laquelle il serait obligé de se mouvoir ; cette tension mesure aussi l'intensité de la puissance normale à la trajectoire, qu'il faudrait continuellement appliquer au mobile, indépendamment de celles qui agissent déjà sur lui, pour lui faire décrire, *librement*, la même courbe sur laquelle il est obligé de se mouvoir, quand il est ou attaché à un fil ou enfermé dans un canal.

La valeur générale de la puissance normale dont je parle est celle de Γ donnée art. 927 ; mais, en se bornant à la considération des trajectoires planes, la force normale qu'il faut substituer à la tension d'un fil ou à la résistance de la paroi d'un canal, pour retenir un mobile sur une courbe, donnée à l'artice 931, équation (5), a pour expression

$$\frac{v^2}{r} + \frac{Xdy - Ydx}{ds}.$$

Les puissances qui sollicitent le mobile étant supposées fonctions des distances de leurs points communs d'application à des points fixes pris sur leurs directions respectives, la vîtesse v et les composantes X et Y auront des valeurs dépendantes de la position du mobile et l'expression $\frac{v^2}{r} + \frac{Xdy - Ydx}{ds}$ pourra toujours se transformer en une fonction

de x, y, et de leurs différentielles. Dès-lors on a une équation fondamentale pour la détermination des trajectoires planes, dans le cas du mouvement *libre*, en faisant

$$\frac{v^2}{r} + \frac{Xdy - Ydx}{ds} = 0$$

équation par laquelle on énonce que la force centrifuge $\frac{v^2}{r}$ fait continuellement équilibre à l'action normale $\frac{Xdy - Ydx}{ds}$ des forces, et qu'ainsi la trajectoire est parcourue *librement* sans qu'il soit nécessaire de retenir le mobile sur cette courbe par le moyen d'un fil ou d'un canal ou à l'aide d'une force particulière.

Digression sur la vérification du principe de la pesanteur universelle que le mouvement de la lune a fourni à Newton.

934. Les premiers Géomètres qui se sont occupés de la théorie newtoniene ont tiré beaucoup de parti de la considération de l'équilibre entre la force centrifuge et l'action de la force centrale prise normalement à la trajectoire ; son emploi le plus remarquable est assurément celui qu'en a fait Newton lui-même pour vérifier ses premières conjectures sur la loi de la gravitation universelle ; voici, à cet égard, les explications que j'ai promises art. 891. On est assuré, par des moyens indépendants de tout système d'astronomie physique, que la lune décrit autour du centre de la terre une courbe qui peut, dans des calculs de vérifications sommaires, être regardée comme circulaire. Il est bien naturel, lorsque ce *fait* est constaté, de penser que la lune, dont le mou-

(1) . . . . $\dfrac{U^2}{R} = G$;

G et R étant constants, U le sera aussi ; soit γ la *vîtesse angulaire* de la lune, on aura $U = R\gamma$, d'où

(2) . . . . $G = R\gamma^2$.

L'angle γ décrit par le centre de la lune pendant une seconde sexagésimale de temps, est, en parties du rayon des tables pris pour unité, $=0{,}0000026616$; désignant par ρ le rayon de la terre on a $R = 60{,}138.\rho$ d'où

$$G = 60{,}138\rho\gamma^2.$$

Telle est la valeur absolue de la vîtesse que communiquerait à un mobile, en exerçant, sur lui, une action constante pendant l'unité de temps, la puissance qui pousse le centre de la lune vers le centre de la terre, et ce résultat, fondé sur la théorie générale des forces centrifuges, est indépendant de toute hypothèse sur la loi à laquelle G peut être soumis ; il s'agit maintenant de vérifier si G a, par rapport à la pesanteur g, qui a lieu à la surface de la terre, une valeur compatible avec la loi de la raison inverse du quarré des distances, ce qui se réduit à vérifier si $GR^2 = g\rho^2$ ou si $\dfrac{(60{,}138)^3\rho\gamma^2}{g} = 1$.

Faisant le calcul, on a

$$\begin{array}{lcl} 3 \log. 60{,}138 \ldots & = & 5{,}33745 \\ \log. \rho \ldots\ldots & = & 6{,}80388 \\ 2 \log. \gamma = \ldots\ldots & = & \overline{12},85029 \\ \text{comp.}^t \log. g \ldots & = & \overline{1},00838 \\ \hline \text{somme} = \ldots\ldots & & 0{,}00000 = \log. 1. \end{array}$$

Les forces G et g sont donc réciproques aux quarrés des distances de leurs points d'application au centre de la terre.

935. J'ai dit à l'art. 891 qu'on pouvait arriver à ce résultat « par la « considération de la différence entre la sécante et le rayon d'un très-« petit arc de l'orbite parcouru pendant un temps donné, différence « qu'on peut, vu la petitesse de l'arc, regarder comme égale au sinus « verse. » Ce moyen de résoudre la question, employé par Newton, est fondé sur l'égalité qui existe entre la quantité dont le mobile s'écarte de la tangente à son orbite pendant un temps infiniment petit dt, dans

le sens du rayon vecteur, et l'espace initial que la force centrale lui ferait parcourir, pendant le même temps et dans le même sens, s'il n'avait point de vitesse autour du centre d'action ; or l'arc de l'orbite, décrit pendant 1″, peut, eu égard à l'extrême petitesse de sa valeur angulaire ϑ, être pris pour un arc élémentaire ; on a donc (en observant que $\frac{1}{2}G$ est, art. 704, la chute du mobile vers le centre de la terre pendant l'unité de temps, ou l'espace que la force centrale lui ferait parcourir en exerçant sur lui une action constante pendant 1″, sa vîtesse initiale étant supposée nulle) $\frac{1}{2}G = R\,(\textit{sécante}\ \vartheta - 1) = R\ \textit{sinus verse}\ \vartheta$. L'espace $\frac{1}{2}G$ se trouve ainsi exprimé en fonction, soit de la sécante, soit du sinus verse de l'arc dont le rayon $= R$ et qui est parcouru pendant 1″, conformément à ce qui a été dit à l'art. 891 ; et pour savoir si le rapport de $\frac{1}{2}G$ à l'espace correspondant $\frac{1}{2}g$, parcouru par les graves, près de la surface de la terre, pendant la première seconde de leur chute, (rapport qui est celui des forces G et g) s'accorde avec la loi de la raison inverse des quarrés des distances, il ne reste qu'à vérifier l'équation $\frac{R\,\text{sin. verse}\,\vartheta}{\frac{1}{2}g} = \frac{\rho^2}{R^2}$ qui en faisant $R = n\rho$ devient $\frac{n^3\rho\,\text{sin. verse}\,\vartheta}{\frac{1}{2}g} = 1$.

La propriété des petits arcs donne $\textit{sin. verse}\ \vartheta = \frac{1}{2}\,\text{sin.}^2\,\vartheta$, ainsi pour procéder, par la méthode newtonienne, à la vérification numérique qu'on trouve à la fin de l'art. précédent, on peut, à la formule $\frac{n^3\rho\vartheta^2}{g} = 1$ substituer $\frac{n^3\rho\,\text{sin.}^2\,\vartheta}{g} = 1$, en désignant, par n, le rapport du rayon de l'orbite lunaire au rayon de la sphère terrestre. On obtiendra le même résultat par l'une ou l'autre formule, car la valeur angulaire de ϑ, l'unité de durée étant la seconde sexagésimale, n'est que de 0″,549, ancienne [redacted]

Formules diverses relatives à la force centrifuge produite par le mouvement circulaire. Détermination de la force accélératrice due à la pesanteur dans le cas où la terre n'aurait aucun mouvement de rotation autour de son axe. Valeur de la vitesse horizontale qui annulerait l'effet de la gravité.

936. On peut donner à l'expression de la force centrifuge dans le cercle diverses formes propres à faciliter les conséquences auxquelles la théorie conduit.

D'après la relation établie, par l'équation $N = \frac{v^2}{r}$ de l'art. 931, entre les quantités N, v, et r, si T est le temps total employé par le mobile à parcourir le cercle, décrit d'un rayon R, sur lequel il est assujetti à se mouvoir avec une vîtesse angulaire constante ϑ, et π la demi-circonférence dont le rayon $= 1$, ce qui donne $\vartheta = \frac{2\pi}{T}$, on aura

---

la valeur est donc égale à $R \left\{ \text{sécante}\,(\vartheta\tau) - 1 \right\} = R \left\{ \frac{1}{\cos.(\vartheta\tau)} - 1 \right\} = R \left\{ \frac{1 - \cos.(\vartheta\tau)}{\cos.(\vartheta\tau)} \right\} = \frac{\text{sin. verse}\,(\vartheta\tau)}{\cos.(\vartheta\tau)} R$; on voit déjà que, dans le cas d'une petite valeur de l'angle $\vartheta\tau$, qui permet de faire $\cos.(\vartheta\tau) = 1$, l'expression se réduit à R sin. verse $(\vartheta\tau)$, et cette réduction pourra s'appliquer au cas de $\tau = 1''$ si l'angle ϑ est, lui-même, très-petit. Mais *sin. verse* $(\vartheta\tau) = 2\,\text{sin.}^2 (\frac{1}{2}\vartheta\tau)$, donc la valeur ultérieure du prolongement du rayon, compris entre l'orbite circulaire et la tangente, est $\frac{2\,\text{sin.}^2(\frac{1}{2}\vartheta\tau)}{\cos.(\vartheta\tau)} R$, valeur à laquelle on peut, lorsque ϑ est très-petit et τ égal à l'unité, substituer l'expression $\frac{1}{2} R\,\text{sin.}^2\,\vartheta$ au moyen de quoi il est permis de changer, comme je l'ai fait dans le texte, $\frac{n^2 \rho\,\text{sin. vers.}\,\vartheta}{\frac{1}{2} g}$ en $\frac{n^2 \rho\,\text{sin.}^2\,\vartheta}{g}$. Plus le temps τ sera petit et plus l'espace $\frac{2\text{sin.}^2(\frac{1}{2}\vartheta\tau)}{\cos.(\vartheta\tau)} R$, s'approchera d'être rigoureusement égal à la chute du mobile dans la direction du rayon vecteur, correspondante à la durée τ de l'action de la puissance, telle qu'elle aurait lieu si ce mobile était attiré, pendant ce temps τ, sans avoir eu de vîtesse initiale; lorsque τ est infiniment petit, ou égal à dt, $\frac{2\,\text{sin.}^2(\frac{1}{2}\vartheta\tau)}{\cos.(\vartheta\tau)} R$ devient $\frac{1}{2}\vartheta^2 R dt^2$ et a pour valeur $\frac{1}{2} G dt^2$, valeur qui se déduit aussi, soit de l'équation (2) de l'art. 934, soit des formules générales du mouvement varié.

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad N = \frac{4\pi^2}{T^2} R.$$

« Lorsque plusieurs mobiles décrivent uniformément des cercles de « mêmes rayons, leurs forces centrifuges sont réciproques aux quarrés « des temps qu'ils employent à faire leurs révolutions, et si ces temps « sont égaux, les forces centrifuges sont proportionnelles aux rayons « des cercles décrits ».

Soit, encore, H la hauteur due à la vîtesse $R\theta$, ou U, on aura $U^2 = 2gH$, en désignant, par g, la force accélératrice de la pesanteur à la surface de la terre, et l'équation $N = \frac{U^2}{R}$, se changera en

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad N = \frac{2H}{R} g.$$

937. L'équation (1) de l'article précédent aurait pu se déduire de l'équation (3) de l'art. 890 appliquée au cas ou les circonstances initiales du mouvement d'une planète la déterminent à décrire un cercle ; $\frac{h}{a^2}$ représente, dans ce cas, la force centrifuge N, le demi-axe a représente le rayon R et on a, par l'équation citée, $\frac{h}{a^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot a$.

La vîtesse d'une planète ainsi assujettie à décrire un cercle est, équation (2) de l'art. 894, (en introduisant, dans cette équation, la condition $a = r$) égale à $\sqrt{\frac{h}{a}}$ ou à $\sqrt{\frac{h}{a^2}} \cdot a$, expression équivalente à $\sqrt{NR}$ qui, est la valeur U dans les formules de l'article précédent.

Cette vîtesse U avec laquelle le mobile se meut sur la circonférence [redacted]

938. La terre faisant, art. 676, une révolution sydérale autour de son axe, en 86164″ de temps moyen, un point quelconque de sa surface a, art. 936, équation (1) dans le plan du parallèle sur lequel se trouve ce point, une force centrifuge $N = \left(\frac{2 \times 3{,}14159}{86164}\right)^2 . R$, le rayon R du parallèle, est dans l'hypothèse de la sphéricité de la terre, égal au produit du rayon d'un grand cercle par le cosinus de la latitude et la valeur précédente devient, art. 265, L étant la latitude,

$$(1) \ldots N = \left\{ \left(\frac{2 \times 3{,}14159}{86164}\right)^2 \times 6366198^{\text{m}} \right\} \cos. L = 0{,}033853 \cos. L$$

la direction de cette force N fait avec la direction de la pesanteur, un angle égal à celui de la latitude, ainsi son action dans le sens de la vertical, action que je désigne par N', a pour valeur

$$(2) \ldots\ldots\ldots N' = 0{,}033853 \cos.^2 L.$$

Cette force N' est l'excès de la pesanteur qui aurait lieu si la terre n'avait aucun mouvement de rotation autour de son axe, sur la pesanteur résultant de l'attraction de la terre combinée avec la force centrifuge; soit g' cette pesanteur hypothétique et g la pesanteur effective, on a

$$(3) \ldots\ldots\ldots g' = g + 0{,}033853 \cos.^2 L.$$

On peut, pour plus d'exactitude, avoir égard aux variations de g, à différentes latitudes; je ferai, en conséquence, comme à l'art. 709,

$$g = 9{,}77980 + 0{,}05174 . \sin.^2 L;$$

et introduisant cette valeur dans l'équation (3), on a

$$(4) \ldots\ldots\ldots g' = 9{,}81365 + 0{,}01789 \sin.^2 L;$$

sous l'équateur, où $\cos. L = 1$, g' surpasse g de la valeur entière de $N' = 0{,}^{\text{m}}03385$, c'est-à-dire que la force centrifuge diminue de $0{,}^{\text{m}}03385$ la vîtesse qu'un grave acquerrait pendant la première seconde de sa chute si la terre ne tournait pas; cette diminution est d'environ $\frac{1}{290}$ de g'. Au pole, où $\sin. L = 1$, et $\cos. L = 0$, on a $N' = 0$ et $g' = g$, ce qui est d'ailleurs évident, la force centrifuge devant être nulle pour tous les points placés sur l'axe de rotation.

939. L'équation (2) de l'art. 936 donne $\frac{N}{g} = \frac{2H}{R}$, et, en supposant $N = g$, on a $H = \frac{1}{2} R$; ainsi « lorsque la vîtesse constante du « mobile, sur le cercle qu'il est obligé de décrire, sera celle qu'acquerrait

« ce mobile en tombant d'une hauteur égale à la moitié du rayon du « cercle, sa force centrifuge sera égale à son poids ».

R étant le rayon du globe terrestre, si un corps étoit lancé dans le plan de l'équateur, près de la surface de la mer, avec une vîtesse horizontale $= \sqrt{gR}$, ce corps, d'après ce qui vient d'être dit, ferait, en vertu de sa force centrifuge, pour s'éloigner du centre de la terre, un effort égal à celui que l'attraction terrestre exercerait sur lui pour le rapprocher du même centre; il devrait donc, (dans l'hypothèse où son mouvement aurait lieu dans le vide) se maintenir constamment dans une orbite circulaire et devenir un satellite de la terre.

Cette proposition se déduit fort-simplement des équations (1) de l'art. 908 et (2) de l'art. 909, qui se rapportent au mouvement elliptique des planètes; si on y introduit les conditions de l'orbite circulaire $a = R$ et sin. $\mu = 1$, dont l'autre condition $\epsilon = 0$ est une conséquence, on a $U = \sqrt{\frac{h}{R}} = \sqrt{\left(\frac{2h}{R^2} \cdot \frac{1}{2} R\right)}$ or $\frac{h}{R^2}$ est, art. 889, la force accélératrice à la distance R du centre d'action, et $\sqrt{\left(\frac{2h}{R^2} \cdot \frac{1}{2} R\right)}$ est, art. 703, la vîtesse qu'acquerrait le mobile, animé de cette force accélératrice supposée constante, en tombant sur le centre d'action de la hauteur $\frac{1}{2} R$, c'est-à-dire que $\sqrt{\frac{h}{R}}$, est la vîtesse due à la hauteur $\frac{1}{2} R$ lorsque la pesanteur a pour mesure la force accélératrice résultant de l'attraction exercée à la distance R.

Sous l'équateur, $\sqrt{gR} = \sqrt{9{,}7798 \times 6376466} = 7896^{m},9$; ainsi la vîtesse qu'il faudrait imprimer à un corps, pour rendre sa force centrifuge égale à sa pesanteur, est égale à environ 16 fois celle d'un boulet au sortir

point matériel assujetti à parcourir une ligne donnnée, suppose que la courbure de cette ligne est assujettie à la *loi de continuité;* sans cette condition, la valeur générale de la vîtesse, art. 919 ne serait pas admissible, cette valeur n'étant applicable qu'au cas où les variations de v, sont dues uniquement aux actions des puissances, de telle sorte, que lorsque les puissances sont nulles, la vîtesse initiale se conserve, art. 920 quelle que soit la forme de la trajectoire; or ces propriétés cesseront d'appartenir au mouvement dès que la trajectoire aura, sur sa trace, une ou plusieurs couples de lignes ou d'arcs formant des angles finis à leurs points de réunion. La vîtesse du mobile éprouvera un changement brusque et fini, à chacun des sommets de ces angles, qui ne permettra plus de lui appliquer les formules générales ci-dessus démontrées.

941. Je vais, pour éclaircir ces propositions générales, donner un exemple simple du mouvement d'un point matériel sur une ligne *discontinue* qu'on pourra aisément comparer avec le cas analogue de mouvement sur une ligne continue. Soit un système de tubes rectilignes mis bout-à-bout de manière à former une portion de polygone, dont les côtés peuvent être ou n'être pas dans le même plan; je suppose que ce système se trouve mis dans une position fixe et telle que, si par un sommet d'angle quelconque du polygone, on mène un plan horizontal, les deux côtés adjacents à ce sommet d'angle, se trouvent, l'un au-dessus et l'autre au-dessous du plan dont je viens de parler, avec la condition qu'on n'ait nulle part, dans le polygone, un côté vertical ayant, pour prolongement inférieur, un côté horizontal.

Dans cet état des choses un point matériel pesant introduit, dans le tube poligone, par l'ouverture supérieure, descendra, en suivant le périmètre de ce poligone, jusqu'à l'issue inférieure et il s'agit de déterminer les circonstances de son mouvement; je supposerai que la vîtesse initiale et le frottement sont nuls.

Je désigne les côtés contigus du polygone par 1.e, 2.e, 3.e, etc. n.^{e} côté en commençant par le côté supérieur qui est le 1.er côté. J'appelle h', h'', h''', etc. $h^{(n)}$, (n) étant un numéro d'accentuation) les différences de niveau, respectives, entre les points extrêmes du 1.er, du 2.e, du 3.e etc. du n.^{e} côté, ω', ω'', ω''', etc. $\omega^{(n)}$, les angles que forment entr'eux les côtés contigus de manière que l'angle numéro $^{(n)}$, ou $\omega^{(n)}$, soit celui

que forme le côté numéro n avec le côté $(n+1)$; enfin $V^{(n)}$ est la vîteses dont jouit le mobile au point inférieur du côté n.° (n) avant d'avoir changé de direction, et $V_{,}^{(n)}$ est ce qui devient, à l'instant même, cette vîtesse par l'effet du changement de direction ou de l'angle que forment entr'eux les côtés n.os (n) et $(n+1)$.

On a une relation immédiate entre les vîtesse $V^{(n)}$ et $V_{,}^{(n)}$, par la décomposition de la vîtesse $V^{(n)}$ en deux autres dont l'une soit perpendiculaire au côté numéro $(n+1)$ et l'autre dirigée suivant ce côté; la première composante sera détruite (le mobile est supposé entièrement dépourvu d'élasticité) et la seconde qui aura pour valeur $V^{(n)}\cos.\,\omega^{(n)}$, sera la vîtesse au point supérieur du côté numéro $(n+1)$ ainsi on aura

$$(1)\ \ldots\ldots\ldots\ V_{,}^{(n)} = V^{(n)}\cos.\,\omega^{(n)}.$$

La vîtesse $V^{(n)}$, qui est celle du mobile au bas du côté n.° (n) dépend de la vîtesse $V_{,}^{(n-1)}$ correspondante au point supérieur de ce côté et de la vîtesse engendrée par la pesanteur pendant que ce même côté a été parcouru; on a art. 779, et 701 équation (3)

$$(2)\ \ldots\ldots\ (V^{(n)})^2 = (V_{,}^{(n-1)})^2 + 2gh^{(n)};$$

ou en observant, équation (1), que $V_{,}^{(n-1)} = V^{(n-1)}\cos.\,\omega^{(n-1)}$

$$(3)\ \ldots\ldots\ (V^{(n)})^2 = (V^{(n-1)}\cos.\,\omega^{(n-1)})^2 + 2gh^{(n)};$$

si partant de la valeur $V' = \sqrt{2gh'}$, on forme successivement, d'après cette équation, les expressions de V'', V''', etc. en substituant toujours dans l'une quelconque de ces expressions la valeur, en h et ω, de la vîtesse du numéro immédiatement inférieur, on parviendra à l'équation générale

$$\left\{ h^{(n)} \right.$$

au point inférieur (sa masse est censée $= 1$) aurait été, art. 768, égale à $2g(h' + h'' + h''' + \text{etc.} + h^{(n)})$.

La perte de force vive est donc

$$2g\left\{\begin{array}{l} h^{(n-1)}(1 - \cos.^2 \omega^{(n-2)}) \\ + h^{(n-2)}(1 - \cos.^2 \omega^{(n-2)} \cos.^2 \omega^{(n-1)}) \\ + \text{etc.} \\ + h'(1 - \cos.^2 \omega' \cos.^2 \omega'' \;.\;.\;.\;.\; \cos.^2 \omega^{(n-1)}). \end{array}\right\}$$

et on peut disposer les angles ω de manière à donner à cette perte de force vive une valeur arbitraire entre o et $2g(h' + h'' + \text{etc.})$.

Le cas de la perte de force vive nulle est celui de $\omega' = 0, \omega'' = 0, \omega''' = 0$, etc.; tous les côtés du polygone sont dans la même direction et on a $\cos. \omega' = 1$, $\cos. \omega'' = 1$, etc. la vîtesse au bas de la chute est $\sqrt{\{2g(h' + h'' + \text{etc.}) + h^{(n)}\}}$ conformément à la théorie du plan incliné.

943. On peut supposer que chacun des côtés du polygone et chacun des angles aigus que ce côté forme avec le côté qui le précède et celui qui le suit sont infiniment petits, le nombre de ces côtés étant infini; on aura, dans ce cas, une courbe à simple ou double courbure; tous les cosinus qui entrent dans le 2.e membre de l'équation (4) de l'art. 941, deviendront égaux à l'unité, et il restera, dans ce 2.e membre, la somme des hauteurs élémentaires dont le mobile s'abaisse en parcourant chaque élément de la courbe; ainsi, H étant la différence de niveau entre les deux points extrêmes de cette courbe, la vîtesse finale aura, pour valeur, $\sqrt{2gH}$.

944. On voit par ce résultat que lorsqu'un mobile pesant descend d'un plan horizontal supérieur à un plan horizontal inférieur, il acquiert, au bas de sa descente, une vîtesse due à la distance verticale des deux plans, quelle que soit la courbe qu'il ait suivi dans sa marche, pourvu que cette courbe soit *continue*.

Propriétés générales du mouvement d'un point matériel pesant assujetti à parcourir une courbe quelconque fixe et continue.

945. Le théorême de l'article précédent auquel je suis parvenu en considérant une courbe à double courbure comme la limite d'un polygone dont les côtés ne sont pas dans un même plan, va se déduire fort-aisément de la valeur générale de la vîtesse, art. 919.

Pour donner plus d'étendue aux conséquences que j'ai à tirer de cette valeur, je prends le cas d'un tube ou canal fixe, à simple ou double courbure, ayant la forme d'un *syphon* renversé, placé entre deux plans horizontaux, de manière que ses deux extrémités soient dans le plan supérieur et que sa directrice soit tangente au plan inférieur; les deux branches ascendantes, qui peuvent être ou n'être pas semblables, n'étant assujetties, dans leurs courbures particulières et dans leurs réunion, qu'à la loi de continuité. Je suppose que le plan horizontal inférieur est celui des x, y, et je place, au point de contact de la directrice avec ce plan, l'origine des coordonnées x, y et z, les z positives se comptant de bas en haut.

g continuant à désigner la force accélératrice due à la pesanteur, on aura à introduire dans l'équation de l'article cité les valeurs $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$, ce qui donnera

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad v^2 = U^2 - 2gz\,;$$

si le point matériel est introduit dans le syphon par une de ses extrémités, qui se trouvent dans le plan horizontale supérieur, sans vîtesse initiale, on aura, H étant la distance verticale entre les deux plans, les valeurs simultanées $v = 0$, $z = H$, d'où $U^2 = 2gH$ et

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad v^2 = 2g\,(H - z)\,;$$

lorsque le mobile sera parvenu au plan horizontal inférieur, ou plan xy, on aura $z = 0$, et la vîtesse acquise sera $\sqrt{2gH}$, égale à celle que le corps aurait acquise en tombant par la verticale menée entre les deux plans, résultat identique avec celui des art. 943 et 944.

Le mobile entrera donc dans la branche ascendante du syphon, par

[redacted]

branche du syphon, par la distance verticale du mobile au plan horizontal, passant par le point le plus bas de la directrice du syphon et qui doit être tangent à cette directrice pour que la loi de continuité ne soit pas violée à la réunion des deux branches.

Si on suppose $H=z$ on a $v=0$; cette valeur est donnée, par l'état de la question, à l'entrée de la branche descendante, et par l'analyse, à l'extrémité supérieure de la branche ascendante, où la vîtesse acquise au bas du syphon se trouve éteinte; le mobile, arrivé au haut de cette seconde branche, doit donc commencer à redescendre, en vertu de la pesanteur, la branche ascendante devenant descendante et réciproquement, la relation entre v et z continue à être exprimée par l'équation $v=\sqrt{2g(H-z)}$, et on voit que le mobile aura des oscillations continuelles qui embrasseront l'étendue entière du syphon et le lui feront parcourir tantôt dans un sens tantôt dans l'autre.

Les limites de sa marche sont, d'ailleurs, indiquées immédiatement par l'équation $v=\sqrt{2g(H-z)}$ qui rend v imaginaire lorsque $z>H$.

947. J'ai supposé que la tangente au point inférieur de la directrice était horizontale; mais cette condition n'est pas nécessaire pour faire remonter un point matériel à une hauteur verticale H, le long d'une courbe quelconque continue en lui imprimant, au point le plus bas et dans le sens du premier élément de cette courbe, une vîtesse initiale $\sqrt{2gH}$, car on a vu que la détermination de la constante C de l'équation $v^2=C-2gz$, d'après la valeur de cette vîtesse initiale, est indépendante de la direction, par rapport à l'horizon, suivant laquelle elle est imprimée et suppose seulement qu'elle est tangentielle à la directrice.

Ainsi, généralement, un point matériel pesant, partant d'un plan horizontal supérieur et descendant le long d'une courbe quelconque, jusqu'à un autre plan horizontal inférieur, a acquis, lorsqu'il y est arrivé, une vîtesse due à la distance verticale de ces deux plans; et en imprimant cette vîtesse au mobile, tangentiellement à une autre courbe quelconque le long de laquelle il puisse remonter jusqu'au plan supérieur, il y remontera et lorsqu'il s'y trouvera sa vîtesse sera éteinte.

948. Tels sont les théorêmes généraux annoncés à la fin de l'art. 781, lequel article contient les théorêmes analogues applicables aux trajectoires rectilignes. Ces mêmes théorêmes généraux fournissent aussi un exemple à la théorie démontrée art. 921 et 922. En effet, la vîtesse

étant nulle sur le plan supérieur qui représente la surface de laquelle on suppose, à l'article cité, que le mobile doit partir, on a $V' = 0$, l'équation (2), de l'article 922, a la forme $v^2 = 0 + 2(-gz + gH)$, d'où $Q = -gz$, $Q' = -gH$, et l'équation $Q - Q' = 0$ de la surface de départ devient $-gz + gH = 0$, qui est, en effet, l'équation du plan supérieur. Le quarré de la vîtesse, au plan inférieur, est $2gh$, d'où $V''^2 = 2gH$, et l'équation (3) de l'art. cité prend la forme $v^2 = 2gH + 2(-gz + 0)$, d'où $Q'' = 0$, ce qui réduit l'équation $Q - Q'' = 0$, de la surface à laquelle le mobile doit arriver, à $-gz = 0$, équation du plan horizontal inférieur sur lequel se trouve l'origine des coordonnées verticales z. J'aurais donc pu conclure immédiatement, du contenu de l'art. 922, tout ce qui a été démontré depuis l'article 944.

Définition du *pendule simple*. Propriétés de son mouvement dans le vide, les amplitudes des oscillations étant quelconques. Vitesses absolue et angulaire. Tension du fil.

949. On appelle *pendule simple* un corps ou point matériel pesant, suspendu à un point fixe par le moyen d'un fil parfaitement flexible et inextensible, fil dont la masse est supposée assez petite pour qu'on puisse la regarder comme nulle.

Ce pendule, étant écarté de la situation verticale et livré à la pesanteur, sans vîtesse initiale, décrira, dans son mouvement, des arcs de cercles situés dans le plan vertical, passant par le point de suspension et par la direction initiale du fil; on prouvera cette proposition en employant un raisonnement semblable à celui dont je me suis servi, art. 846 et 862, pour démontrer que les trajectoires des projectiles pesants sont des courbes planes. Les puissances, qui agissent sur ce mobile, sont ici la pesanteur, et la résistance du fil représentant une force attractive émanée du point de suspension; ces deux forces sont évidemment, à chaque instant, dirigées dans un plan vertical passant par la direction du fil et par le point de suspension; or ce plan vertical ne pourrait changer de position, autour du point de suspension, qu'en vertu d'une force, agissant sur le mobile, avec laquelle il ferait un angle fini, et il est manifeste, la vîtesse initiale étant nulle, qu'une pareille force, dès qu'elle n'existe pas dans le premier instant du mouvement, ne peut exister dans aucun des instants suivants, et la même propriété aurait

lieu si le mobile recevait une impulsion initiale dirigée dans le plan dont je viens de parler. (La question du mouvement d'un pendule qu'on fait dévier du plan vertical passant par le point de suspension et par la direction initiale du fil, sera traitée à la fin de cette section).

950. Le mouvement du pendule simple est donc identique avec celui qu'aurait le mobile si on l'assujettissait à parcourir un arc de cercle fixe, situé dans un plan vertical décrit du point de suspension, comme centre et d'un rayon égal à la longueur du pendule. Or j'ai démontré art. 945 et 946 qu'un mobile pesant, dans ce cas, partant d'un point situé à une hauteur verticale b, au-dessus du point le plus bas de sa trajectoire, avait acquis, arrivé à ce point inférieur, une vîtesse due à la hauteur b, et remontait de l'autre côté du même point inférieur jusqu'au plan horizontal renfermant son point de départ ; que là, sa vîtesse étant épuisée, il prenait un mouvement rétrograde et redescendait au point le plus bas pour remonter ensuite au point de départ, où, sa vîtesse devenant encore nulle, il se retrouvait dans son état initial, et ainsi de suite.

Le corps, en parcourant chacun des arcs qui sont placés de part et d'autre du point le plus bas, fait ce qu'on appelle une *demi-oscillation ;* l'*oscillation* entière se compose ainsi d'une *demi-oscillation* descendante et d'une *demi-oscillation* ascendante. Il est aisé de prouver que la durée de l'une est égale à la durée de l'autre ; pour cela, qu'on imagine une infinité de plans horizontaux situés entre le point le plus bas et les deux points les plus élevés de l'arc parcouru ; deux quelconques de ces plans, infiniment voisins l'un de l'autre, renfermeront entr'eux un arc élémentaire de l'oscillation descendante et un arc égal de l'oscillation ascendante, et le mobile, en parcourant chacun de ces arcs, aura, art. 944 et 946, la même vîtesse ; il les parcourra donc pendant le même temps élémentaire dt, d'où on conclut que la somme des temps élémentaires composant la durée de l'oscillation descendante, sera égale à la somme pareille composant la durée de l'oscillation ascendante.

951. Je vais, maintenant, m'occuper de la détermination des phénomènes relatifs aux oscillations, autres que ceux dont il est question dans l'article précédent. Voici la nomenclature des quantités qui entrent dans l'analyse.

La longueur du pendule = ... a

La hauteur verticale du point de départ au-dessus du point le plus bas de l'arc décrit = ... b

Les coordonnées qui déterminent la position du mobile, au bout du temps t, et dont l'origine est au point le plus bas de l'arc décrit.	Coordonnée verticale = . . . z Coordonnée horizontale = . . . x
Angle formé par la direction initiale du fil et	Par la verticale = ... f Par la direction du fil au bout du temps t = . . . ω

Différence entre ces deux angles $= f - \omega =$ . . . . θ

Vîtesse au bout du temps t	angulaire = ... ϑ effective dans le sens de l'arc décrit = . . v

Force accélératrice de la pesanteur $= 9^{m},81 =$ . . . . g

On a, au 1.er instant du mouvement,

$$t = 0; \quad v = 0; \quad \omega = 0; \quad \theta = f; \quad z = b.$$

Au bout du temps t, compté avant que la première demi-oscillation soit terminée, la vîtesse étant art. 945 et 946 due à la hauteur verticale dont le corps est descendu pendant ce temps, hauteur qui est égale à $b - z$, on a

$$(1) \; \ldots \; v^2 = 2g(b - z) = 2g \cdot a(\cos.\theta - \cos.f);$$

équation qui peut se déduire immédiatement de celle de l'art. 919 en faisant $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$ et déterminant C par la condition des valeurs simultanées $v = 0, z = b$. La vîtesse angulaire égale, art. 897, à la vîtesse effective du point placé à l'unité de distance du centre fixe du mouvement, c'est-à-dire à $\frac{v}{a}$, se détermine par l'équation

$$(2) \; \ldots \; \vartheta^2 = \frac{2g}{a^2}(b - z) = \frac{2g}{a}(\cos.\theta - \cos.f);$$

à la fin de la première demi-oscillation, le pendule se trouve dans la situation verticale et on a $v^2 = 2bg$; si, en prenant cette vîtesse, pour vîtesse initiale, on cherche la loi du mouvement ascensionnel pendant la 2.e demi oscillation on aura, art. 919 en faisant $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$, $v^2 = 2bg - 2gz$ et, en observant que $+\cos.\theta$ convient

également à $+\theta$ et à $-\theta$, on retombera sur les équations (1) et (2) qui donnent, ainsi, l'expression générale de la vîtesse absolue ou angulaire, soit dans le cas de la descente soit dans celui de l'ascension.

952. Il sera bon que les élèves puissent donner une démonstration immédiate des équations de l'article précédent. Le mobile étant à un point quelconque de l'arc parcouru, la résistance, que l'élément de cet arc sur lequel il se trouve oppose à l'action de la pesanteur, est identique, à tous égards, avec celle qu'opposerait un *plan incliné*, perpendiculaire au plan de l'arc parcouru, et renfermant l'arc élémentaire dont je viens de parler, ou la tangente qui en serait le prolongement ; or ce plan fait avec l'horizon un angle égal à celui que la direction actuelle du fil du pendule forme avec la verticale c'est-à-dire un angle θ; donc, art. 775, la pesanteur relative du mobile, ou la force accélératrice dans le sens du plan incliné, a pour valeur $g \sin.\theta$, ce qui donne

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{dv}{dt} = g \sin.\theta.$$

Je multiplie le 1.er membre de cette équation par v et le 2.e par la valeur $-\dfrac{ad\theta}{dt}$ de v (l'arc élémentaire parcouru pendant l'instant dt est égal à $-ad\theta$; on donne le signe négatif à $d\theta$ parceque θ qui, sur l'arc descendant, diminue lorsque t augmente, a le signe négatif sur l'arc ascendant) et j'ai

$$vdv = -agd\theta \sin.\theta\,;$$

d'où

$$\tfrac{1}{2}v^2 = ag\cos.\theta + constante.$$

On a, en même temps, $v=0$ et $\theta=f$; ainsi $constante = -ag\cos.f$ et

$$v^2 = 2ag(\cos.\theta - \cos.f).$$

C'est l'équation (1) de l'article précédent de laquelle on déduit toutes les autres valeurs du même article, en observant que $\cos.f = \dfrac{a-b}{a}$, et $\cos.\theta = \dfrac{a-z}{a}$.

Toutes ces valeurs étant ainsi démontrées par des considérations particulières et immédiates, l'identité des valeurs de v correspondantes à la même valeur de z sur l'arc descendant et sur l'arc ascendant, l'égalité des amplitudes de ces deux arcs, l'égalité des temps employés à les parcourir etc., se trouvent rattachées aux mêmes considérations.

953. L'action de la pesanteur perpendiculaire à l'élément d'arc parcouru pendant l'instant dt a pour valeur, art. 775, $g\cos.\theta$ et en ajoutant, à cette composante, la valeur $\frac{v^2}{a}$ de la force centrifuge, on a l'expression suivante de la tension du fil que je désigne par Γ

$$(1) \ldots\ldots\ldots \Gamma = \frac{v^2}{a} + g\cos.\theta;$$

substituant à v^2 sa valeur donnée art. 951,

$$(2) \ldots\ldots\ldots \Gamma = g(3\cos.\theta - 2\cos.f);$$

ou en substituant, pour $\cos.\theta$ et $\cos.f$, leurs valeurs respectives $\frac{a-z}{a}$ et $\frac{a-b}{a}$

$$(3) \ldots\ldots\ldots \Gamma = \frac{g}{a}(a+2b-3z);$$

au point de départ la valeur de la tension du fil se réduit à $g\cos.f$ ou à $\frac{g}{a}(a-b)$; cette tension atteint son maximum au point le plus bas de l'arc parcouru où elle est égale soit à $g(3-2\cos.f)$, soit à $\frac{g}{a}(a+2b)$, son augmentation totale, pendant une demi-oscillation descendante, étant $3g(1-\cos.f)$ ou $\frac{3bg}{a}$.

Valeur du temps employé par le pendule simple à faire, dans le vide, une oscillation de grandeur finie quelconque.

954. L'équation $v=\sqrt{2g(b-z)}$ de l'art. 951 donne, en désignant par ds l'arc élémentaire parcouru au bout du temps t, pendant l'instant dt, substituant à v sa valeur $\frac{ds}{dt}$ et observant que s diminue, sur l'arc descendant, lorsque t augmente, et que le même s change de signe sur l'arc ascendant,

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots dt = \frac{-ds}{\sqrt{2g(b-z)}}.$$

On a par les propriétés du cercle, $ds = \frac{a\,dx}{a-z}$; $x=\sqrt{z(2a-z)}$;

d'où $dx = \frac{(a-z)\,dz}{\sqrt{z(2a-z)}}$, $ds = \frac{a\,dz}{\sqrt{z(2a-z)}}$, et (1) devient

$$(2) \ldots\ldots dt = \frac{-a\,dz}{\sqrt{2gz(2a-z)(b-z)}}.$$

Je vais déduire, de cette équation, la durée d'une demi-oscillation descendante, ce qui suffit à l'objet que j'ai en vue ; car on sait, art. 950, qu'en doublant cette durée on aura le temps correspondant à l'oscillation entière. Pour cela je mets l'équation précédente sous la forme

$$(3) \ldots dt = \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{-dz}{\sqrt{z(b-z)}} \cdot \left(1 - \frac{z}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

et, en développant le facteur $\left(1 - \frac{z}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}$,

$$(4) \ldots dt = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{-dz}{\sqrt{z(b-z)}} \cdot \left\{1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{z}{2a} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{z}{2a}\right)^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{z}{2a}\right)^3 + \text{etc.}\right\}$$

Le n.^{e} terme de la suite a pour valeur $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\ldots 2n}\cdot\left(\frac{x}{2a}\right)^n$, le terme n.° 0, étant l'unité.

Or on a, en prenant les intégrales depuis $x = b$ jusqu'à $x = 0$, et désignant, par π, la demi-circonférence dont le rayon $= 1$

$$(5)\ (^*) \ldots \left\{\begin{array}{l}
\int \frac{-dz}{\sqrt{z(b-z)}} = \pi; \\
\int \frac{-z\,dz}{\sqrt{z(b-z)}} = \tfrac{1}{2} b\pi; \\
\int \frac{-z^2\,dz}{\sqrt{z(b-z)}} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} b^2\pi; \\
\int \frac{-z^3\,dz}{\sqrt{z(b-z)}} = \frac{1.3.5}{2.4.6} b^3\pi; \\
\vdots \\
\int \frac{-z^n\,dz}{\sqrt{z(b-z)}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\ldots 2n} b^n\pi;
\end{array}\right.$$

(*) L'importance de cette théorie me détermine à placer ici une démonstra-

ainsi la valeur de t prise entre les mêmes limites, ou la durée d'une demi-oscillation, que je désigne par T, a pour valeur

---

tion élémentaire de ces équations.

Je différentie l'expression $z^n\sqrt{bz-zz}$ et j'ai

$$d\{z^n\sqrt{bz-zz}\}=nz^{n-1}dz\sqrt{bz-zz}+\frac{z^n dz(\frac{1}{2}b-z)}{\sqrt{bz-zz}};$$

réduisant au même dénominateur, développant le numérateur, rassemblant les termes qui ont des facteurs communs, et intégrant

$$z^n\sqrt{bz-zz}=(n+\tfrac{1}{2})\int\frac{bz^n dz}{\sqrt{bz-zz}}-(n+1)\int\frac{z^{n+1}dz}{\sqrt{bz-zz}}.$$

L'intégrale s'évanouit lorsque $z=0$, ainsi il n'y a point de constante à ajouter; et comme elle s'évanouit encore en faisant $z=b$, elle est, par conséquent, nulle entre les limites $z=b$ et $z=0$, ce qui donne

$$(n+\tfrac{1}{2})\int\frac{bz^n dz}{\sqrt{bz-zz}}=(n+1)\int\frac{z^{n+1}dz}{\sqrt{bz-zz}};$$

d'où on déduit

$$\frac{(2n+1)b}{2(n+1)}\int\frac{z^n dz}{\sqrt{bz-zz}}=\int\frac{z^{n+1}dz}{\sqrt{bz-zz}};$$

en attribuant à n les valeurs successives 0, 1, 2, 3 etc. et donnant à dz, comme dans le texte, le signe négatif, on obtient les suites de valeurs correspondantes

$$n=0\ \ldots\ldots\ \tfrac{1}{2}b\int\frac{-dz}{\sqrt{bz-zz}}=\int\frac{-zdz}{\sqrt{bz-zz}};$$

$$n=1\ \ldots\ldots\ \tfrac{3}{4}b\int\frac{-zdz}{\sqrt{bz-zz}}=\int\frac{-z^2dz}{\sqrt{bz-zz}};$$

$$n=2\ \ldots\ldots\ \tfrac{5}{6}b\int\frac{-z^2dz}{\sqrt{bz-zz}}=\int\frac{-z^3dz}{\sqrt{bz-zz}};$$

$$n=3\ \ldots\ldots\ \tfrac{7}{8}b\int\frac{-z^3dz}{\sqrt{bz-zz}}=\int\frac{-z^4dz}{\sqrt{bz-zz}}.$$

etc. etc.

On a donc chacune des intégrales successives dès que la première est connue; or

$$\int\frac{-dz}{\sqrt{bz-zz}}=\int\frac{-\dfrac{dz}{\frac{1}{2}b}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{z-\frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}b}\right)^2}}=\text{arc}\left(\cos.=\frac{2z-b}{b}\right)$$

(6) . . . . . $T=$ . . . .

$$\tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)\left(\frac{b}{2a}\right)^3+\text{etc.}\right\}$$

Le n.e terme de la série est $\left(\frac{1.3.5\ldots2n-1}{2.4.6\ldots2n}\right)^2\left(\frac{b}{2a}\right)^n$, le terme n.° o, étant l'unité.

955. Le temps d'une oscillation entière, double de celui dont je viens de donner la valeur, est par conséquent égal à

$$\pi\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{b}{2a}\right)^3+\text{etc.}\right\}$$

956. J'observe que $\frac{b}{2a}$, dont les 1.re, 2.e, etc. puissances multiplient les termes successifs de la série, est le demi-sinus verse de l'angle f formé par la direction initiale du fil et par la verticale ; il suit de-là que, si cet angle f est petit, les termes de la série qui contiennent $\frac{b}{2a}$ seront des fractions dont la somme pourra être négligeable par rapport à l'unité, et la valeur du temps d'une oscillation entière se réduira à $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

Ce temps est indépendant de l'inclinaison initiale du pendule, ce qui constitue une propriété très-remarquable des petites oscillations; mais je vais faire de cette matière l'objet d'un examen particulier.

---

et l'intégrale, qui est nulle lorsque $z=b$, c'est-à-dire lorsque cos. $\frac{2z-b}{b}=1$, devient égale à π lorsque $z=0$, c'est-à-dire lorsque cos. $\frac{2z-b}{b}=-1$. On a donc, entre les limites $z=b$ et $z=0$, $\int\frac{-dz}{\sqrt{bz-zz}}=\pi$; c'est la première des équations (5) du texte ; et en substituant sa valeur π dans celle des équations ci-dessus trouvées, qui correspond à $n=0$, on a la valeur de $\int\frac{-zdz}{\sqrt{bz-zz}}$ (2.e équation (5) du texte), laquelle substituée, à son tour, dans l'équation ci-dessus correspondante à $n=1$ donne $\int\frac{-z^2dz}{\sqrt{bz-zz}}$ (3.e équation (5) du texte), et, en continuant de la même manière, on a toutes les équations (5) du texte.

Examen particulier du mouvement du pendule simple faisant de petites oscillations dans le vide. Définitions de l'*isochronisme* et du *synchronisme*.

957. Je conserve la notation de l'art. 951 et observant 1.° que l'arc élémentaire parcouru pendant l'instant dt a pour valeur $ad\omega$, 2.° que la force accélératrice, dans le sens de l'arc parcouru, est art. 775 égale à $g \sin.\theta$ ou à $g \sin.(f-\omega)$; j'ai, art. 727, équation (8), dans l'hypothèse de dt constant,

$$(1) \ldots\ldots\ldots \frac{add\omega}{dt^2} = g \sin.(f-\omega):$$

si on suppose que f et ω sont de très-petits angles, on pourra substituer l'arc $f-\omega$ à son sinus, et on aura

$$(2) \ldots\ldots\ldots \frac{dd\omega}{dt^2} = \frac{g}{a}(f-\omega);$$

multipliant les deux membres de cette équation par $d\omega$, faisant une première intégration et observant que $\frac{d\omega}{dt}$ est la vîtesse angulaire désignée par $\mathfrak{g}$, on a

$$(3) \ldots\ldots\ldots \mathfrak{g}^2 = \frac{g}{a}(2f-\omega)\omega.$$

La constante arbitraire est nulle parceque les deux membres de cette équation s'évanouissent ensemble lorsque $\omega = 0$.

Remettant pour $\mathfrak{g}^2$ sa valeur $\frac{d\omega^2}{dt^2}$ et tirant la valeur de dt, on a

$$(4) \ldots\ldots\ldots dt\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(2f-\omega)}}.$$

Le terme $\frac{d\omega}{\sqrt{\omega(2f-\omega)}} = \frac{\frac{d\omega}{f}}{\sqrt{1-\left(\frac{f-\omega}{f}\right)^2}}$ est la différentielle de l'arc dont le cosinus $= \frac{f-\omega}{f}$; ainsi

$$(5) \ldots\ldots t\sqrt{\frac{g}{a}} = \text{arc}\left(\cos. = \frac{f-\omega}{f}\right):$$

il n'y a point encore de constante arbitraire à ajouter parceque $t = 0$ correspond aux valeurs $\omega = 0$, $\cos. \dfrac{f-\omega}{f} = 1$, et $\text{arc.}\left(\cos. = \dfrac{f-\omega}{f}\right) = 0$.

On déduit de (5)

$$(6)\ \ldots\ldots\ \omega = f\left\{1 - \cos.\left[t\sqrt{\frac{g}{a}}\right]\right\}.$$

958. Les équations de l'article précédent offrent l'exemple de la propriété des fonctions révolutives dont j'ai parlé art. 690. Le temps total, qui s'écoule depuis l'instant où le mobile part de l'extrémité supérieure du demi-arc descendant jusqu'à l'instant où il y revient, est, équation (5), égal à $2\pi\left(\dfrac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$; et l'équation (6) peut se mettre sous la forme

$$\omega = f - f\cos.\left\{\frac{2\pi t}{2\pi\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Les constantes A et C de l'article cité sont ici représentées par f et $-f$, et le temps k répond à $2\pi\left(\dfrac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$. Si on substitue à l'arc décrit une ligne droite qui lui soit égale, et sur laquelle le corps se meuve de la même manière qu'il se meut sur cet arc, pendant que la droite elle-même a un mouvement horizontal uniforme dans le sens de sa longueur, avec la vîtesse V, et qu'on désigne par x la distance, au bout du temps t, du corps au point fixe où ce corps et l'origine de la ligne droite mobile se trouvoient ensemble lorsque l'on comptait zéro temps, on aura

$$x = Vt + \left\{f - f\cos.\frac{2\pi t}{2\pi\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}}\right\},$$

équation qui est un cas particulier de la formule générale $x = Vt + \textit{fonction}\left(A, C\cos.\dfrac{2\pi t}{k}\right)$ de l'art. 690, et qui en vérifie les propriétés.

959. Le temps $2\pi\left(\dfrac{a}{g}\right)$, qui s'écoule entre l'instant où le mobile part de l'origine de l'arc parcouru et l'instant où il y revient, comprend les durées de quatre demi-oscillations, durées égales entr'elles et à

$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\pi$; on voit, par le tableau suivant, comment les équations (5) et (6) expriment les distances et les vîtesses périodiques qui ont lieu à la fin de chacune de ces oscillations, le temps croissant indéfiniment.

Valeurs du temps t.	Valeurs de la distance angulaire ϖ à l'origine de l'arc parcouru.	Valeur de la vitesse angulaire δ.
0	. . . . 0	. . . . 0 . . . .
$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\pi$ . . .	. . . . f	. . . . f . . . .
$\frac{2}{2}\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\pi$ . . .	. . . $2f$	. . . . 0 . . . .
$\frac{3}{2}\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\pi$ . . .	. . . . f	. . . . f . . . .
$\frac{4}{2}\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\pi$ . . .	. . . . 0	. . . . 0 . . . .
$\frac{5}{2}\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\pi$ . . .	. . . . f	. . . . f . . . .
$\frac{6}{2}\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\pi$ . . .	. . . $2f$	. . . . 0 . . . .
$\frac{7}{2}\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\pi$ . . .	. . . . f	. . . . f . . . .
$\frac{8}{2}\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\pi$ . . .	. . . . 0	. . . . 0 . . . .
etc.	etc.	etc.

960. Quelque soit la durée du mouvement, la distance angulaire ϖ du mobile au point de départ et sa vîtesse ne peuvent pas excéder des limites déterminées. Le temps d'une oscillation entière est égal à $\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\pi$, valeur identique avec celle qui a été conclue, art. 956, de la formule applicable aux oscillations d'amplitudes quelconques, et indépendantes de la position du point de départ. Ainsi lorsque plusieurs pendules d'égales longueurs parcourent de petits arcs en oscillant, leurs

oscillations entières sont d'égales durées, quelques soient les rapports entre les diverses amplitudes ou valeurs angulaires de ces oscillations.

961. La propriété, qu'a un même pendule de faire ses oscillations dans des temps égaux, constitue ce qu'on appelle l'*isochronisme;* les oscillations de ce pendule sont *isochrones.*

Si on compare les mouvements de deux pendules, et si les oscillations de l'un sont de même durée que celles de l'autre, on dit que ces deux pendules sont *synchrones*; le *synchronisme* est donc, pour les *oscillations* comparées de deux ou plusieurs pendules, ce que l'*isochronisme* est pour les oscillations comparées d'un même pendule.

Usage du pendule simple pour déterminer la loi de la pesanteur près de la surface de la terre. Vérités physiques dont on doit, à cet instrument, la découverte ou la confirmation.

962. Le pendule, dont la société retire d'inappréciables avantages depuis qu'il est appliqué à la mesure du temps (*), a aussi fourni les moyens de découvrir ou de confirmer des vérités très-importantes, en

(*) Les premières recherches sur la théorie du pendule sont encore dues à Galilée; l'objet de ce traité, qui m'a déjà fait nommer plusieurs fois ce grand philosophe, ne pourra pas, à beaucoup près, me fournir l'occasion de citer toutes ses découvertes. L'idée d'appliquer le pendule à la mesure du temps ne lui avait pas échappé et il s'occupa, avec son fils, dans les dernières années de sa vie, d'un essai de machine chronomètrique munie d'un pendule; mais la révolution, que l'emploi de cet instrument a opérée dans l'art de mesurer le temps, est entièrement due à Huyghens, qui conçut, à la fin de l'année 1656, la première idée d'une horloge à pendule, dans laquelle le pendule et le moteur sont deux choses séparées, le premier servant exclusivement à régulariser l'action du second, et le mécanisme étant combiné de manière que le moteur restitue au pendule, à chaque oscillation, la force que la fonction dont celui-ci est chargé lui fait perdre.

Les essais de Galilée, qui employait, comme moteur, le pendule lui-même, ne peuvent rien oter à Huyghens, de la gloire de son invention. Je parlerai, quand j'en serai au mouvement cycloïdal, d'une disposition particulière que ce géomètre a proposé de donner au pendule, pour assurer l'isochronisme des oscillations quelques soient leurs amplitudes, dans un ouvrage très-remarquable, intitulé *Horologium oscillatorium;* c'est dans cet ouvrage qu'il a exposé les propositions fondamentales de la théorie des *forces centrifuges,* dont la découverte lui est due.

physique et en astronomie, dont les principales sont relatives à la loi de l'action de la pesanteur en divers points, soit de la surface de la terre, soit d'une verticale élevée à un point quelconque de cette surface, et à la figure de la terre.

On a tenté, lors des premières recherches relatives aux quantités absolues que fournissent les phénomènes de la pesanteur, telles, par exemple, que la longueur de la ligne verticale parcourue par les corps graves pendant la première unité de temps de leur descente, de faire des expériences sur la chute immédiate de ces corps, soit par des lignes verticales, soit sur des plans inclinés ou des courbes hélicoïdales; on ne pouvait obtenir, par ce procédé, qu'une approximation très-grossière, vu la difficulté d'évaluer les temps correspondants aux espaces parcourus, les anomalies provenant de la résistance de l'air, la résistance du frottement etc.; la machine d'Atwood, dont j'ai donné la théorie, art. 790 et suivants, donne beaucoup plus d'exactitude, mais le pendule est, ainsi que je l'ai observé, art. 815, l'appareil qui fournit, pour la détermination de la quantité cherchée, les moyens de précision les plus parfaits, et les plus commodes, les observations se réduisant à compter le nombre d'unités de temps correspondant à un nombre déterminé d'oscillations d'un pendule de longueur pareillement déterminée.

963. La théorie d'après laquelle on déduit, des expériences, les résultats qu'on veut obtenir, est une conséquence fort-simple des formules relatives au pendule simple ci-dessus démontrées. Si on désigne par τ la durée d'une très-petite oscillation d'un pendule simple, dont la longueur est a, par π la demi-circonférence dont le rayon $= 1$, la lettre g continuant à représenter la force accélératrice due à la pesanteur, on aura art. 956 et 959

$$(1) \ldots\ldots \tau = \pi \sqrt{\frac{a}{g}},$$

d'où
$$(2) \ldots\ldots g = \frac{\pi^2}{\tau^2}\, a.$$

Supposant donc qu'on ait reconnu par des observations exactes que ce pendule, dont la longueur connue $= a$, ait fait, pendant un temps donné T, un nombre N d'oscillations, on aura le temps d'une seule oscillation $= \tau = \frac{T}{N}$, d'où

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots g = \frac{\pi^2 N^2}{T^2}\, a.$$

La valeur de g se trouve ainsi composée de quantités toutes connues. Son évaluation sera d'autant plus exacte que la longueur arbitraire a du pendule d'expérience sera plus grande.

964. On déduit de l'équation (3) de l'article précédent

$$a = \frac{g T^2}{\pi^2 N^2}\ ;\quad T = \pi N \sqrt{\frac{a}{g}}\ ;\quad N = \frac{T}{\pi}\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

« Les longueurs de différents pendules sont entr'elles en raison di-
« rectes des quarrés des temps employés à faire un même nombre
« d'oscillations, ou en raison inverse des quarrés des nombres d'oscil-
« lations faites dans un même temps ».

Réciproquement, « les temps employés à faire un même nombre d'os-
« cillations, ou les nombres d'oscillations faites dans un même temps,
« sont entr'eux, respectivement, en raison directe ou en raison inverse
« des racines quarrées des longueurs des pendules ».

965. Il est une autre détermination importante à faire, celle de la longueur du pendule dont chaque oscillation a, pour durée, une unité de temps. Il est bon d'observer que la connaissance de cette longueur n'est pas préalablement nécessaire pour l'évaluation du temps T qui entre dans l'équation $g = \frac{\pi^2 N^2}{T^2} \cdot a$ de l'art. 963, et dans celles de l'art. précédent qui en ont été déduites; car, si le chronomètre dont on se sert est muni d'un *pendule*, on le règle, par les moyens de tâtonnements connus, de manière que l'aiguille des secondes fasse 86400 ou 100000 pulsations (suivant qu'on employe l'ancienne ou la nouvelle division du temps) pendant un jour moyen, sans avoir besoin de connaître à quelle longueur de *pendule simple* répond la dimension du *pendule composé* adapté au chronomètre.

Cette longueur, qui est, maintenant, l'inconnue cherchée, pourrait se déduire de la forme du pendule composé, des masses de ses différentes parties, etc. etc. par des méthodes que j'exposerai dans la 3e section de cette seconde partie du cours; mais il est infiniment préférable de conclure la longueur cherchée de celle d'un autre pendule faisant, pendant un temps donné, un nombre, pareillement donné, d'oscil-

lations. La longueur cherchée se calcule alors par une simple règle de proportion fondée sur les propriétés du mouvement des pendules énoncées par les théorêmes de l'art. précédent. Soit λ la longueur cherchée du pendule qui bat les secondes, et a la longueur donnée d'un pendule qui fait N oscillations pendant T secondes, et, par conséquent, une oscillation pendant $\frac{T}{N}$ secondes, on aura d'après le premier théorême de l'article cité

$$\frac{T^2}{N^2} : 1 :: a : \lambda = \frac{a N^2}{T^2}.$$

966. La longueur λ peut aussi se déduire de la valeur, préalablement connue, de g, au moyen de l'équation (1) de l'art. 963. Faisant, dans cette équation, $\tau = 1''$ et $a = \lambda$, on a

$$\lambda = \frac{g}{\pi^2}.$$

967. Toutes les déterminations précédentes supposent que les oscillations sont infiniment petites, et qu'elles se font dans le vide; et, comme les pendules d'expérience ne sont ni dans l'un ni dans l'autre de ces deux cas, il faut, lorsqu'on veut la plus rigoureuse exactitude, ramener les observations effectives à ce qu'elles seraient si le pendule ne décrivait que des arcs élémentaites dans un milieu non résistant; il faut, encore avoir égard à la masse du fil, à la forme et à la grandeur du corps suspendu etc. Je parlerai, dans la suite du cours, des procédés et des méthodes dont ces diverses précautions exigent la connaissance et l'usage; toutes les causes d'anomalies auxquelles elles se rapportent ont été prises en considération dans les expériences faites à l'occasion du nouveau système métrique français; on a trouvé qu'à l'observatoire de Paris la longueur du pendule à secondes décimales était de $0^m,7419$ et celle du pendule à secondes sexagésimales de $0^m,99385$, comme je l'ai dit à l'article 676.

D'après cette détermination, le nombre d'oscillations faites à l'observatoire de Paris, pendant un jour moyen, par un pendule simple, d'un mètre de longueur, doit être, art. 964, égal à $100000\sqrt{0,7419} = 86133,6$.

968. Les variations de la pesanteur à différentes latitudes, donnent lieu à des variations correspondantes de la longueur du pendule; d'après les

les déterminations les plus récentes, λ étant la longueur du pendule à seconde à la latitude L, on a, pour la division du jour moyen en 100000 secondes,

$$(1) \ldots \lambda = 0^m,739703526 + 0^m,0039136892 \sin.^2 L,$$

ou en substituant à $\sin.^2 L$ sa valeur $\frac{1}{2}(1 - \cos. 2L)$

$$(2) \ldots \lambda = 0,741660371 - 0,001956845. \cos. 2L.$$

Les premiers termes des seconds membres de (1) et (2) sont, respectivement, les longueurs du pendule décimal sous l'équateur et sous le parallèle moyen.

Pour avoir la valeur de λ applicable à la division du jour en 86400 secondes il faut, art. 964, multiplier les seconds membres des équations précédentes par $(\frac{100000}{86400})^2$.

969. C'est par les observations du pendule qu'on a pu s'assurer que l'intensité de la pesanteur était moindre au sommet des montagnes qu'au niveau de la mer. Nous avons des expériences sur cet objet, faites au Pérou, par Bouguer, avec beaucoup de soin ; il a trouvé à Quito, élevé de 2857 mètres, et sur le Pichincha, élevé de 4744^m au-dessus de la mer, que la diminution de la pesanteur était, dans le premier lieu, de 0,000751, et dans le second de 0,001184, la pesanteur, au niveau de la mer, étant l'unité.

970. Enfin le pendule fournit une preuve de *fait* de l'importante conclusion tirée, art. 890, de la 3e. loi de Kepler, par laquelle on a reconnu qu'à égales distances d'un centre d'attraction tous les points matériels soumis à cette attraction recevaient la même force accélératrice quelles que fussent leurs masses. On est parfaitement assuré que plusieurs corps suspendus à des fils de même longueur font, exactement, dans le vide, le même nombre d'oscillations pendant un même temps, quoique leurs masses soient différentes ; d'où il suit qu'ils sont animés de forces motrices proportionnelles à ces masses, et que tombant verticalement, dans le vide, avec une vîtesse initiale, ou commune ou nulle, ils parcourraient des espaces égaux dans des temps égaux. Les expériences, faites immédiatement sur les chutes de ces corps, ne pourraient jamais avoir une précision comparable à celle des expériences faites avec le pendule.

Mouvement d'un point matériel pesant sur une cycloïde.

971. Une courbe plane étant tracée sur un plan vertical et un point matériel pesant, assujetti à se mouvoir sur cette courbe, étant aban-

donné à la pesanteur, on a vu, art. 945 équation (2), que la valeur générale du quarré de sa vîtesse désignée par v était, g continuant à représenter la force accélératrice due à la gravité,

$$v^2 = 2g(H - z) \,.\,\Big\{$$ H est la hauteur verticale du point de départ au-dessus de l'origine des coordonnées verticales z.

Cette équation suppose que la vîtesse est nulle lorsque $z = H$, mais si la vîtesse initiale, dans le sens de la courbe, était due à une hauteur h, la constante U^2 de l'équation (1) de l'art. cité devrait se déterminer par la condition des valeurs simultanées $v^2 = 2gh$ et $z = H$, qui donne $U^2 = 2g(H+h)$, et

$$(1) \;\ldots\ldots\ldots\; v^2 = 2g(h + H - z).$$

s étant l'arc de courbe que le mobile a encore à parcourir pour arriver au plan horizontal qui renferme l'origine des z, l'élément ds est parcouru avec la vîtesse $\sqrt{2g(h+H-z)}$, et l'élément de temps dt employé à le parcourir a pour valeur, art. 688,

$$(2) \ldots dt = \frac{-ds}{\sqrt{2g(h+H-z)}} \,.\,\Big\{$$ Observez que s diminue lorsque t augmente, et qu'ainsi dt et ds doivent avoir des signes contraires.

J'ai déjà appliqué, art. 954 et suivants, cette équation au mouvement sur un arc de cercle dans l'hypothèse de $h = 0$, ou de l'égalité à zéro de la vîtesse initiale; je vais supposer maintenant que le point matériel pesant est assujetti à se mouvoir sur une cycloïde à base horizontale, ayant tous les points de sa trace situés au-dessous de cette base dans un plan vertical.

Soient s et z, respectivement, l'arc variable de la courbe et la coor-

[redacted]

$$(5) \ldots dt = -dz\sqrt{\frac{a}{2gz(h+H-z)}} = -\left(\frac{a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{[z(h+H-z)]^{\frac{1}{2}}};$$

l'expression $\frac{-dz}{\{z(h+H-z)\}^{\frac{1}{2}}}$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{\frac{-dz}{\frac{1}{2}(h+H)}}{\left\{1-\left(\frac{z-\frac{1}{2}(h+H)}{\frac{1}{2}(h+H)}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} = d.\,\text{arc}\left\{\cos. = \frac{z-\frac{1}{2}(h+H)}{\frac{1}{2}(h+H)}\right\}, \text{on}$$

a donc $t = \left(\frac{a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}.\,\text{arc}\left\{\cos. = \frac{z-\frac{1}{2}(h+H)}{\frac{1}{2}(h+H)}\right\} + constante;$

la constante se détermine par la condition des valeurs simultanées $t=0$, $z=H$, d'où

$$constante = -\left(\frac{a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \text{arc}\left\{\cos. = \frac{H-h}{H+h}\right\},$$

$$(6) \ldots t = \left(\frac{a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\text{arc.}\left[\cos. = \frac{z-\frac{1}{2}(H+h)}{\frac{1}{2}(H+h)}\right] - \text{arc}\left[\cos. = \frac{H-h}{H+h}\right]\right\}$$

972. Telle est la valeur générale du temps employé par le mobile à descendre, sur l'arc de cycloïde, depuis le point situé à une hauteur H jusqu'au point situé à une hauteur z au-dessus de l'origine de z, ce qui forme une descente verticale $= H - z$; pour avoir le temps total de la descente jusqu'à l'horizontale sur laquelle se trouve l'origine commune de s et z, on fera $z = 0$ dans l'équation précédente et on aura, π étant la demi-circonférence dont le rayon $= 1$,

$$(1) \ldots\ldots t = \left(\frac{a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\pi - \text{arc}\left(\cos. = \frac{H-h}{H+h}\right)\right\};$$

si on suppose de plus que la vîtesse initiale est nulle ou que $h = 0$, on obtient la valeur remarquable

$$(2) \ldots\ldots\ldots t = \pi\left(\frac{a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'élévation initiale H du mobile au-dessus du point le plus bas de la courbe a disparu de la valeur de t, le temps de la descente jusqu'à ce point le plus bas est donc indépendant de la position du point de départ, et sera toujours le même quelque soit la longueur de l'arc à parcourir pour arriver de ce dernier point au premier.

973. Cette propriété curieuse de la cycloïde constitue ce qu'on appelle le *tautochronisme ;* les courbes qui en jouissent sont appelées courbes *tautochrones*. J'ai déjà fait remarquer, art. 782, une espèce de *tautochronisme* dans le cercle tracé sur un plan vertical. Un mobile partant d'un point quelconque de la circonférence de ce cercle, sans vîtesse initiale, arrive toujours à son point le plus bas dans un même temps, égal à $\sqrt{\frac{2a}{g}}$ (le diamètre du cercle est désigné par a) ; mais il faut, pour cela, que le mobile suive, non l'arc de cercle, mais la corde de cet arc menée du premier au second point.

974. Le mouvement du pendule, qui fait des oscillations très-petites ou infiniment petites, a aussi, art. 956 et 960, la propriété du *tautochronisme*, propriété qu'il tient de la cycloïde et dont il jouit parceque le point matériel pesant, suspendu au fil, décrit des arcs qu'on peut regarder comme cycloïdaux. En effet le rayon de courbure du point le plus bas de la cycloïde renversée est égal à $2a$, et un pendule simple de cette longueur, qui décrirait des arcs infiniment petits, ferait, art. 959, une demi-oscillation pendant un temps $= \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{2a}{g}} = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$; les oscillations circulaires infiniment petites de ce pendule et les oscillations cycloïdales finies du point matériel, dont il a été question dans les articles précédents, seraient donc synchrones entr'elles, et la raison de ce synchronisme peut se déduire immédiatement du tautochronisme de la cycloïde, en considérant que si le point de départ est infiniment peu distant du point inférieur, le mouvement est identique avec celui qui aurait lieu sur un arc de cercle d'un rayon égal à $2a$.

[redacted]

du diamètre du cercle générateur. Ce fil, en oscillant dans le plan des arcs cycloïdaux, s'enveloppait successivement sur l'un et sur l'autre, et son point inférieur, décrivant une portion de cycloïde, faisait, d'après la théorie ci-dessus démontrée, ses oscillations dans des temps égaux, quelles que fussent leurs amplitudes. Cette invention d'Huyghens n'a pas été adoptée, dans la pratique de l'horlogerie, par des raisons que je ferai connaître en parlant du pendule composé.

Expression de la force accélératrice qui, lorsqu'elle a lieu sur une courbe quelconque, rend cette courbe tautochrone.

976. L'angle que forme, avec l'horizon, un arc élémentaire ds d'une cycloïde mise dans la position indiquée à l'art. 971 a, pour sinus, $\frac{dz}{ds}$; ainsi la force accélératrice tangentielle, qu'un point matériel pesant, placé sur cet élément de courbe, reçoit de la pesanteur, est, art. 775, égale à $\frac{dz}{ds}g$, ou (en observant que l'équation $s^2 = 4az$ donne $\frac{dz}{ds} = \frac{s}{2a}$) à $\frac{g}{2a}s$; cette force accélératrice est donc, à chaque instant, proportionnelle à la longueur s du chemin que le mobile a encore à faire pour arriver au point le plus bas de la cycloïde.

977. Le résultat auquel je viens d'arriver n'est pas particulier à la cycloïde et indique une condition générale, qui, lorsqu'elle est satisfaite dans le mouvement d'un point matériel sur une courbe quelconque à double ou simple courbure, établit aussitôt le tautochronisme sur cette courbe. Je désigne par S l'arc total que le mobile doit parcourir depuis le premier instant de son mouvement, sa vîtesse initiale étant supposée nulle, par s l'arc qui lui reste à parcourir au bout du temps t, ensorte que $S - s$ est l'arc parcouru pendant ce temps t, par v la vîtesse à l'extrémité antérieure de s, et par A une quantité constante. Si la force accélératrice est, au bout du temps t, proportionnelle à l'arc s que le mobile doit encore parcourir pour arriver à l'extrémité de S, on a l'équation

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dv}{dt} = As;$$

multipliant le premier membre par v et le second par la valeur $\frac{ds}{dt}$ de v, on a, en observant que s diminue lorsque t augmente,

$vdv = -Asds$, d'où $v^2 = -As^2 + C$; l'état de la question donne les valeurs simultanées $v = 0$, $s = S$, d'où $C = AS^2$, et

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ v = A^{\frac{1}{2}}\sqrt{S^2 - s^2}:$$

on déduit de cette équation, en observant que s diminue lorsque t augmente, $A^{\frac{1}{2}}dt = \dfrac{-ds}{(S^2 - s^2)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\dfrac{-ds}{S}}{\left(1 - \dfrac{s^2}{S^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$,

d'où

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ A^{\frac{1}{2}}t = \text{arc}\left(\cos. = \frac{s}{S}\right).$$

La constante arbitraire est nulle parceque les valeurs initiales $t = 0$, $s = S$, rendent les deux membres égaux à zéro.

Pour tirer de cette valeur générale de t la valeur particulière du temps total, que je désigne par T, employé à parcourir l'arc S, il faut faire $s = 0$, ce qui donne

$$(4) \ldots\ T = \frac{\pi}{2A^{\frac{1}{2}}}.$$ π est la demi-circonférence dont le rayon $= 1$.

Le tautochronisme a donc lieu puisque l'arc total S, qui ne se trouve plus dans la valeur de T, reste indéterminé ; cette indétermination ne porte que sur l'origine de S, ou sur le point de position initiale du mobile, l'autre point extrême de l'arc parcouru, pendant le temps T, point où sa tangente doit être horizontale, demeurant fixe sur la courbe ; et c'est par rapport à ce dernier point que la condition posée par l'équation (1) assure le tautochronisme, l'équation (4), qui en est déduite, énonçant que le temps nécessaire pour arriver à ce même point est

$\frac{dv}{dt} = As$ de l'article précédent ; cette matière a ensuite été traitée d'une manière plus approfondie par Euler (*Mém. de l'acad. de Péters-boug 1735 et 1764*), par Fontaine (*Mém. de l'acad. des sciences de Paris 1734, et 1768*), par d'Alembert, etc. : mais Lagrange parait l'avoir épuisée (*Mém. de l'acad. de Berlin de 1765 et 1770*). Je ferai connaître sa théorie dans la 3.e partie du cours.

Cependant Huyghens a, ainsi que je le ferai voir bientôt, résolu complétement le problême de la détermination de la courbe tautochrone dans le vide, lorsque le mobile ne doit son mouvement qu'à la pesanteur, et dans l'hypothèse où on ne considère ce mouvement, ainsi que je l'ai fait dans le chapitre précédent, que depuis un point arbitraire de la courbe jusqu'à un point fixe inférieur. Mais on peut poser la question plus généralement, se donnant pour condition que le mobile pesant doit faire une oscillation entière, en remontant de l'autre côté du point le plus bas jusqu'à la hauteur de son point de départ (les autres conditions assignées art. 945 étant d'ailleurs remplies), et chercher la ligne sur laquelle la durée de chaque oscillation entière est une quantité donnée, indépendante de la position du point de départ ou de la grandeur de l'oscillation ; le problême cesse alors d'être déterminé, la cycloïde n'en fournit plus qu'une solution particulière, et ce problême est même résoluble par un assemblage de deux courbes, l'une desquelles peut être prise arbitrairement; l'analyse suivante vafournir la preuve de ces propoitions.

979. Soit CAD une courbe décrite dans un plan vertical, que je considère, pour plus de généralité, comme composée du système de deux courbes AMC. AND définies par des équations différentes, mais ayant, à leur point de réunion A, une tangente horizontale commune $\Pi A \Pi'$. Je mène l'axe vertical AB sur lequel je compte les coordonnées $AP = z$, les points, dont z détermine la hauteur au-dessus de $\Pi A \Pi'$, se trouvant aux extrémités M et N de l'horizontale MPN. Je fais arc $AM = s$, arc $AN = \sigma$, et traçant l'horizontale mpn infiniment près de MPN, j'ai $Mm = ds$, $Nn = d\sigma$. Fig. 7.

Le mobile pesant est censé partir du point C, sans vitesse initiale, et, CBD étant une horizontale, ce mobile doit, art. 947, parvenu en A, remonter jusqu'au point D ; il s'agit de déterminer le système des deux courbes AMC, AND de manière que la somme des temps em-

ployés à parcourir *CMA* et *AND* soit toujours la même, quelque soit la position du point de départ *C*.

J'appelle b la hauteur *AB* qui, d'après l'état de la question, doit être arbitraire; le corps, parvenu en *M* sera descendu de la hauteur $b-z$ et aura acquis, art. 945, une vitesse $\sqrt{2g(b-z)}$, égale à celle qui lui restera lorsque, après avoir franchi le point *A*, il sera remonté jusqu'en *N*. La somme des temps élémentaires employés à parcourir *Mm* et *Nn* sera donc art. 688 égale à $\frac{ds+d\sigma}{\sqrt{2g(b-z)}}$; en prenant l'intégrale de cette expression entre les limites $z=0$ et $z=b$, on aura la durée totale du mouvement sur la ligne *CAD*. Cette intégrale doit être telle qu'elle s'évanouisse en y faisant $z=0$ et qu'elle acquière sa valeur définie en y faisant $z=b$, ce que l'on concevra parfaitement en observant que la question dont il s'agit est identique avec celle par laquelle on proposerait de construire deux courbes *AMC* et *AND* telles que, deux mobiles partant du point *A* avec la même vîtesse initiale, l'un dans le sens *AMC* et l'autre dans le sens *AND*, et se mouvant respectivement, pendant des temps τ et τ', avant que cette vîtesse initiale soit éteinte, on ait, quelque soit cette vîtesse, $\tau+\tau'=$ *constante*.

La hauteur b doit disparaître dans l'intégrale définie, et voici comment on détermine les conditions d'après lesquelles cette élimination aura lieu. Soit $ds+d\sigma=\frac{p\,dz}{k}$, en désignant par p une fonction de z, et par k une constante, on aura $\int\frac{ds+d\sigma}{\sqrt{2g(b-z)}}=\int\frac{p\,dz}{k\sqrt{2g(b-z)}}$;

je suppose que l'intégrale $\frac{1}{k\sqrt{2g}}\int\frac{p\,dz}{\sqrt{(b-z)}}$, complétée par une

Tous les termes de la série seront donc de la forme $n b^{-m} z^{m}$, et l'intégrale sera de dimension nulle ; or comme cette intégrale ne peut se composer que de z, de b et de nombres abstraits, la différentielle, qui est toujours de même ordre que l'intégrale, ne sera composée que des mêmes quantités, d'où il suit que p ne contiendra point b et sera simplement une puissance de z; $\frac{pdz}{\sqrt{b-z}}$ aura donc la forme $\frac{z^{\mu}dz}{\sqrt{b-z}}$, et observant que le numérateur et le dénominateur sont, respectivement, de la dimension $\mu+1$ et de la dimension $\frac{1}{2}$, la condition de la dimension nulle de la différentielle donnera $\mu+1-\frac{1}{2}=0$, d'ou $\mu=-\frac{1}{2}$; ainsi

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots p=z^{-\frac{1}{2}}.$$

La valeur du temps $\frac{1}{k\sqrt{2g}}\int\frac{pdz}{\sqrt{b-z}}$ et l'équation $ds+d\sigma=\frac{pdz}{k}$ sont donc changées, par les considérations précédentes, en ..... $\frac{1}{k\sqrt{2g}}\int\frac{dz}{\sqrt{z(b-z)}}$ et en $ds+d\sigma=\frac{dz}{k\sqrt{z}}$; faisant $k=\frac{1}{\sqrt{a}}$, on a

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots ds+d\sigma=dz\sqrt{\frac{a}{z}},$$

et intégrant

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots s+\sigma=2\sqrt{az};$$

la constante arbitraire est nulle parcequ'on a en même temps $s+\sigma=0$ et $z=0$.

La somme des arcs AM et AN est proportionnelle à la racine quarrée de la coordonnée verticale AP.

980. Soit construite une courbe ALE telle qu'en prolongeant jusqu'en L et l les cordes horizontales MN et mn on ait

$$(1) \ldots\ldots\ldots AL=AM+AN=s+\sigma:$$

on déduit de cette équation

$$Ll=Mm+Nn=ds+d\sigma,$$

et désignant l'arc AL par $s_{\prime}$, on a

$$s_{\prime}=\int(ds+d\sigma)=s+\sigma=2\sqrt{az}$$

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots s_{\prime}^{2}=4az;$$

la courbe *ALE* est une cycloïde dont le cercle générateur a un diamètre $= a$.

Prolongeant l'horizontale *CD* jusqu'au point *E* de cette cycloïde, si un corps grave descend, en glissant sur *ELA*, sa vîtesse, en *L*, sera $= \sqrt{2g(b-z)}$, et le temps employé à parcourir lL aura pour valeur $\frac{ds_{,}}{\sqrt{2g(b-z)}}$ ou $\frac{ds+d\sigma}{\sqrt{2g(b-z)}}$, c'est-à-dire la somme des temps employés à parcourir *Mm* et *Nn*. Il faudrait donc au mobile qui descendrait sur *ELA*, pour arriver de *L* en *A*, le même temps que le mobile, partant de *C*, employerait à descendre en *A* et à remonter en *D*, et ce temps est, art. 974, égal à celui de la demi-oscillation d'un pendule d'une longueur $= 2a$.

981. Il est aisé, d'après les résultats analytiques de l'art. 979, de déterminer la courbe *AND*, lorsqu'on s'est donné arbitrairement la courbe *AMC*. Soit l'abcisse $A\Pi' = x_{,}$, on aura $Nn = d\sigma = \sqrt{dx_{,}^2 + dz^2}$, d'où

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad ds + \sqrt{dx_{,}^2 + dz^2} = dz\sqrt{\frac{a}{z}}\,;$$

on déduit de cette équation

$$(2) \ldots dx_{,} = \sqrt{\left\{dz^2\left(\frac{a}{z} - 1\right) - 2dzds\sqrt{\frac{a}{z}} + ds^2\right\}}.$$

La courbe *AMC* étant donnée, *ds* est connu en *z* et *dz*, et on peut supposer $ds = q\,dz$: on aura donc

$$(3) \quad \ldots \quad dx_{,} = dz\sqrt{\left(\frac{a}{z} - 2q\sqrt{\frac{a}{z}} + q^2 - 1\right)},$$

équation différentielle de la courbe *AND* qui en fera connaître le tracé,

blème des tautochrones dans le cas où le mobile fait des oscillations entières, composées chacune d'une descente et d'une ascension, sans être assujetti à parcourir une ligne définie par une équation unique; l'examen des conditions relatives à cette dernière circonstance n'a aucune difficulté, et on trouve dans le mémoire d'Euler, cité article 978, l'exemple d'une courbe tautochrone, qui est algébrique du quatrième ordre. Cette courbe n'a pas ses deux branches *AMC*, *AND*, égales et semblables entr'elles, et, si on veut réunir cette propriété à celle du tautochronisme, alors le problême devient déterminé et ne peut plus être résolu que par la cycloïde; en effet, introduisant, dans l'équation $ds + d\sigma = dz\sqrt{\frac{a}{z}}$ de l'art. 979, la condition dont je viens de parler, on a $ds = d\sigma$, d'où $ds = \frac{1}{2}dz\sqrt{\frac{a}{z}}$, et $s = \sqrt{az}$, équation à une cycloïde engendrée par un cercle décrit d'un rayon $= \frac{1}{8}a$.

984. On pourrait conclure de ce résultat, si on en avait déjà eu la démonstration, art. 972, qu'une cycloïde à base horizontale, située dans un plan vertical, au-dessous de sa base, est tautochrone dans chacune de ses moitiés placées de part et d'autre de la verticale passant par son point inférieur; mais il reste encore à savoir s'il existe des courbes différentes de la cycloïde et tautochrones de la même manière qu'elle, en sorte qu'un corps partant d'un point quelconque d'une de ces courbes, sans vîtesse initiale, employe constamment un temps déterminé à arriver à un point inférieur fixe, où la tangente est horizontale, sans égard à l'espace que le mobile peut parcourir sur la continuation de la courbe de l'autre côté de ce point inférieur.

On résoudra la question proposée en déterminant la courbe *AND* Fig. 7.
dans l'hypothèse où la courbe donnée *AMC* serait une demi-cycloïde à base horizontale ayant son sommet en *A*; en effet le systême des deux courbes *AMC* et *AND* se trouvant ainsi déterminé de manière que les oscillations entières *CMAND* soient tautochrones, et, par l'état de la question, les oscillations descendantes *CMA* jouissant séparément de cette propriété, les oscillations ascendantes *AND* en jouiront aussi nécessairement; ainsi le mobile, partant de *A* avec une vîtesse due à une hauteur quelconque *AB*, remontera toujours à cette hauteur en suivant *AND*, dans un temps déterminé, temps qui est égal à celui

de sa descente suivant DNA s'il est posé en D sans vîtesse initiale, et la solution analytique devra, vu la généralité de l'analyse, faire connaître toutes les courbes AND auxquelles ce que je viens de dire est applicable.

Considérant donc la courbe AMC comme une demi-cycloïde engendrée par un cercle dont le diamètre $= A$, on aura $s = 2\sqrt{Az}$, et cette valeur, substituée dans l'équation $s + \sigma = 2\sqrt{za}$ de l'art. 979, donne

$$\sigma = 2\{\sqrt{az} - \sqrt{Az}\} = 2(\sqrt{a} - \sqrt{A})\sqrt{z};$$

AND est donc aussi une cycloïde engendrée par un cercle dont le diamètre $= (\sqrt{a} - \sqrt{A})^2$; mais comme a est, art. 982, une quantité entièrement arbitraire, la valeur du diamètre $(\sqrt{a} - \sqrt{A})^2$ pourra aussi être prise à volonté. L'analyse nous indique, par-là, qu'une cycloïde quelconque satisfait à la condition exigée, si elle a son sommet en A, et si elle est, à ce point A, tangente à l'horizontale $\Pi A \Pi'$, et comme la solution, indéterminée relativement au paramètre de la courbe trouvée, est déterminée relativement à la nature de cette courbe, il faut en conclure que l'espèce de tautochronisme dont il s'agit ici, est exclusivement propre à la cycloïde. Huyghens est le premier qui nous l'ait fait connaître, et, à cet égard, il n'y a rien à ajouter, ainsi que je l'ai dit, art. 978, à sa découverte.

Du tautochronisme considéré dans les courbes à double courbure.

985. Les positions des différents points d'une courbe à double courbure étant rapportées à trois plans coordonnés dont les lignes d'intersections sont les axes des x, y et z, si un point matériel, assujetti à se mouvoir sur cette courbe, est sollicité par une force constamment parallèle à l'un des axes, à l'axe des z par exemple, et si l'intensité de

l'angle formé par cet élément ds et par l'axe des z; en effet, Z étant la force parallèle aux z, dans l'expression de laquelle il n'entre d'autre variable que z, la force accélératrice $= \frac{dz}{ds} Z$, la vîtesse $v = \sqrt{U^2 + 2\int Z dz}$, le temps $t = \int \frac{ds}{\sqrt{(U^2 + 2\int Z dz)}}$, toutes quantités rapportées au mouvement dans le sens de la courbe, seront entièrement indépendantes de la projection de cette courbe sur le plan xy, laquelle projection demeurera arbitraire; on rendra la vérité de cette proposition encore plus sensible, en désignant par ψ l'angle variable que forme, avec l'axe des z, un élément quelconque ds de la courbe, au moyen de quoi on aura $ds = \frac{dz}{\cos.\psi}$, et les valeurs précédentes se changeront en $Z \cos.\psi$, $v = \sqrt{U^2 + 2\int Z dz}$, $t = \int \frac{dz}{\cos.\psi.\sqrt{U^2 + 2\int Z dz}}$, expressions évidemment indépendantes de toutes relations entre les coordonnées x et y, puisque, par hypothèse, ces relations n'ont aucune influence sur les longueurs des éléments de courbe ds, et sur les angles qu'ils forment avec l'axe des z.

986. La conséquence de ce théorême est que, pour le cas du mouvement, dans le vide, dû à la seule pesanteur, les problêmes, concernant le tautochronisme dont peuvent jouir les courbes à double courbure, ne doivent être distingués en rien des problêmes de même espèce qui sont relatifs aux courbes planes. Si une courbe à double courbure est tautochrone, soit dans le sens de l'art. 973, soit dans le sens de l'art. 978, en la concevant tracée sur une surface cylindrique à génératrices verticales, on pourra donner à cette surface toutes les formes compatibles avec la continuité de sa courbure et la direction verticale de ses génératrices, sans que la loi du mouvement sur la tautochrone soit altérée, et réciproquement, lorsqu'on a déterminé une tautochrone plane, par les méthodes données depuis l'art. 978, si on infléchit, d'une manière quelconque, le plan qui la renferme, en conservant la position verticale à toutes les lignes qui avaient cette position avant l'inflexion du plan, le mouvement aura lieu, sur les courbes à double courbure ainsi obtenues, absolument comme il avait lieu sur la courbe plane, c'est-à-dire qu'au bout du même temps le mobile occupera le même point, y aura la même vîtesse, etc.

D'après ce résultat, une courbe à double courbure, qui jouirait dans le vide, et en vertu de la seule pesanteur, de la propriété du tautochronisme définie art. 973, ne pourrait être qu'une cycloïde, tracée sur une surface cylindrique à génératrices verticales, et susceptible de devenir une cycloïde plane ordinaire en développant la surface cylindrique de manière que toutes ses génératrices se trouvent dans un même plan.

Définition de la propriété qui rend une courbe *brachystochrone* (*). Solution élémentaire du probléme de la brachystochrone dans le vide, les deux points extrêmes de la courbe parcourue étant fixes.

987. La théorie du mouvement d'un point matériel, qui se meut sur une courbe différente de celle que les forces auxquelles il est soumis tendent à lui faire décrire, comporte, ainsi que je l'ai déjà dit, deux cas généraux; dans le premier de ces cas, traité depuis l'art. 917 jusqu'à l'art. 975, le mobile est assujetti à parcourir une courbe déterminée, dans le second, son mouvement doit être assujetti à des conditions données et on cherche la courbe sur laquelle il doit se mouvoir pour satisfaire à ces conditions.

Les questions traitées art. 979 et suivants appartiennent à l'un et à l'autre de ces deux cas, celle dont je vais m'occuper appartient exclusivement au dernier; je vais d'abord en donner l'énoncé.

« Trouver la courbe sur laquelle un point matériel pesant doit se « mouvoir pour arriver, en vertu de sa pesanteur, dans le moindre « temps possible, d'un point de l'espace à un autre, les positions du « point de départ et du point d'arrivée pouvant être, ou fixes, ou assu« jetties à des conditions données ».

On peut, outre les conditions relatives aux positions des points ex-

le nom de courbe [illegible]

988. Je vais donner une [illegible] de la brachystochrone [illegible] vide entre deux points [illegible] de plus vite descente de l'un à l'autre de ces points [illegible] simple courbure. Supposant cette courbe donnée [illegible] ses points des lignes horizontales perpendiculaires [illegible] renferme ses deux points extrêmes, c'est-à-dire [illegible] le point d'arrivée, et j'ai, ainsi, une surface cylindrique sur laquelle la courbe dont il s'agit se trouve tracée. Imaginant deux [illegible] ces génératrices horizontales que je désigne par G, G', placées à une distance infiniment petite l'une de l'autre, l'intervalle qui les sépare doit, en vertu de la propriété qui rend la trajectoire brachystochrone, être franchie par le mobile, dans le moindre temps possible, car, ce mobile arrivant à la génératrice G avec une vîtesse donnée, uniquement, par l'abaissement vertical de cette ligne au-dessous du point de départ, vîtesse avec laquelle il parcourra la distance de G à G', on ne pourrait supposer une augmentation au minimum de temps dont je viens de parler qu'autant qu'il en résulterait des augmentations de la vîtesse du mobile, à sa rencontre avec les génératrices suivantes, propres à établir des compensations; mais la vîtesse, en G', est, art. 944, tout-à-fait indépendante tant de la ligne parcourue depuis le point de départ jusqu'à G' que du temps employé à faire ce trajet, et, en général, l'élément de temps dt pendant lequel le mobile va de G à G' n'a aucune influence sur la durée du passage de G' à G'', de G'' à G''' etc. (G'', G''', etc. étant des génératrices placées à la suite de G'), donc on ne peut rien perdre sur ce temps dt qui ne soit perdu sur le temps total, et si dt n'est pas un minimum la courbe n'est pas brachystochrone.

Le mobile, en allant d'une génératrice quelconque à la génératrice infiniment voisine, doit donc suivre la perpendiculaire commune à ces deux lignes, d'où il suit que la brachystochrone est une courbe normale à toutes les génératrices et dont tous les points se trouvent, par conséquent, sur le plan vertical avec lequel ces génératrices font toutes un angle droit; ce plan est, par l'état de la question, celui qui renferme le point de départ et le point d'arrivée. Fig. 8.

989. La brachystochrone est donc une courbe plane, dans le cas dont

il s'agit ici, et on parviendra très-facilement à la détermination de cette courbe par la solution du problême suivant ; « un point matériel pesant « partant d'un point A d'une horizontale AB et arrivant, par une courbe « quelconque, en vertu de sa pesanteur, sur l'un des côtés qr d'un angle « infiniment petit qrt, tracé dans un plan vertical, déterminer le point « q et la direction du mouvement, tant à l'arrivée du mobile à ce « point q que dans l'angle qrt, de manière que le temps employé par « ce mobile à traverser l'angle qrt soit un minimum ».

D'abord en considérant q comme le point cherché, et qt comme la ligne qui, dans l'angle qrt, satisfait aux conditions du problême, il est évident, quelque soit la vîtesse et la direction du mouvement en q, que qt doit être perpendiculaire aux côtés qr et tr, c'est-à-dire doit être un arc élémentaire tracé du centre r; si, de-plus, on fait attention que la vîtesse du mobile, en q, uniquement due à la différence de niveau entre A et q, serait, art. 942, nécessairement diminuée si la direction de cette vîtesse faisait un angle fini avec l'arc qt, ce qui occasionnerait, en pure perte, une augmentation dans le temps employé à parcourir cet arc, on verra que la direction du mouvement, en q, doit être perpendiculaire à rq et se trouver, dans un même plan, avec qr et tr.

Ces préliminaires posés, il ne s'agit plus que de chercher la position du point q, ou la valeur de pq; je fais *angle* $Apq = \phi$, *angle* $qrt = \omega$, $qp = \rho$ et $pr = a$, je continue à représenter par g la force accélératrice due à la pesanteur, et traçant la verticale qm, j'ai $\overline{qm} = \overline{qp} \times \sin. \overline{Apq} = \rho \sin. \phi$. La vîtesse en q a pour valeur, $\sqrt{(2g \times qm)} = \sqrt{2g\rho \sin. \phi}$, et, l'espace gt, à parcourir, étant égal à $(a+\rho)\,\omega$, l'expression du temps, désigné par τ, employé à traverser l'angle qrt est

[redacted]

Soient maintenant A et C les deux points entre lesquels on cherche la courbe par laquelle le mobile pesant arriverait, dans le moindre temps possible, de A en C; je fais passer par ces deux points une cycloïde ayant son origine en A et sa base sur l'horizontale AB; chacun des rayons de courbure tr de cette courbe étant, comme on sait, divisé en deux parties égales par la base AB, le mobile abandonné à la pesanteur sur l'arc fini $AqtC$ satisfait, en parcourant un arc élémentaire quelconque qt, ou en traversant l'angle qrt, à toutes les conditions ci-dessus énoncées; ainsi un second mobile qui, pour aller de A en C, suivrait toute autre courbe $Aq't'C$, employerait nécessairement plus de temps que le premier, soit à traverser cet angle qrt en suivant l'arc élémentaire $q't'$, soit à traverser tout autre angle infiniment petit formé par deux rayons de courbure de la cycloïde $AqtC$; le temps total employé à aller de A en C, en suivant cette cycloïde, sera donc plus court que le temps total employé à parcourir toute autre courbe entre les mêmes points.

990. La cycloïde se trouve ainsi, dans le vide, courbe tautochrone et courbe brachystochrone, et c'est principalement à cette réunion de propriétés curieuses qu'elle doit la célébrité dont elle jouit. Toutes les cycloïdes sont des courbes semblables puisque leur équation générale n'a qu'une seule constante, le diamètre du cercle générateur; d'après cela la position de l'origine A, celle d'un autre point C et celle de la base AB suffisent pour la construction de la courbe entière. On a l'équation suivante entre les coordonnées horizontales x et les coordonnées verticales z, l'origine étant en A

$$x = \tfrac{1}{2} a \text{ arc.} \left\{ \sin. = \frac{1}{\frac{1}{2}a} \sqrt{az - z^2} \right\} - \sqrt{az - z^2};$$

le diamètre du cercle générateur $= a$, c'est l'inconnue qu'il s'agit de déterminer et en élevant, par le point C la verticale CB, et, substituant, dans l'équation précédente, pour x et z, les valeurs de AB et BC, a restera seul, dans cette équation, avec des quantités connues, mais il se trouvera compris dans une fonction transcendante.

On pourra construire graphiquement la courbe qui résout le problème, avec beaucoup de facilité, si on a une cycloïde tracée et rapportée à un cercle générateur quelconque; soit $Aghb$ cette cycloïde, dont la base Fig. 9.

Ab est mise dans une position horizontale, *A* et *C* les deux points par lesquels doit passer la courbe brachystochrone ; menant la corde *AgC* le diamètre du cercle générateur de la brachystochrone sera une 4.ᵉ proportionnelle à *Ag*, *AC* et au diamètre du cercle générateur de *Aghb*.

Principes de la *méthode des variations* pour servir d'introduction à la solution générale de problême de la brachystochrone.

991. Le problême de la courbe de plus vîte descente, dans le vide et entre deux points fixes, est complètement résolu, dans le chapitre précédent, par des considérations immédiates et élémentaires ; je vais envisager ce problême sous un point de vue plus général, et, en cela, j'ai, pour objet principal, de donner aux élèves un exemple également utile et curieux de l'application qu'on peut faire, aux questions de mécanique, de la méthode des variations dont je démontrerai d'abord les formules fondamentales, afin de rendre plus complète l'instruction qu'ils tireront de cet exemple.

Soit x, y, z trois variables qu'on peut supposer être les coordonnées d'une courbe à double courbure, et U une fonction quelconque tant de ces variables que de leurs différentielles du 1.ᵉʳ, 2.ᵉ, etc. ordre, renfermant, de plus, les coordonnées x_0, y_0, z_0, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, qui se rapportent, respectivement, à deux points particuliers de la courbe, et leurs différentielles du 1.ᵉʳ, 2.ᵉ, etc. ordre.

Si on fait varier, dans la fonction U, les quantités x, y, z, x_0, y_0, z_0, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, et les différentielles qui en dépendent, en attribuant, à chacune de ces variables, un incrément infiniment petit par rapport à elle, mais arbitraire et désigné par la caractéristique δ, dont j'ai déjà expliqué,

[redacted]

La valeur de δU peut donc se mettre sous la forme générale

$$\delta U = \left\{ \begin{array}{l} p\delta x + p'\delta dx + p''\delta ddx + \text{etc.} \\ + q\delta y + q'\delta dy + q''\delta ddy + \text{etc.} \\ + r\delta z + r'\delta dz + r''\delta ddz + \text{etc.} \\ + P_0\delta x_0 + P'_0\delta dx_0 + P''_0\delta ddx_0 + \text{etc.} \\ + Q_0\delta y_0 + Q_0'\delta dy_0 + Q_0''\delta ddy_0 + \text{etc.} \\ + R_0\delta z_0 + R_0'\delta dz_0 + R_0''\delta ddz_0 + \text{etc.} \\ + P_{,}\delta x_{,} + P_{,}'\delta dx_{,} + P_{,}''\delta ddx_{,} + \text{etc.} \\ + Q_{,}\delta y_{,} + Q_{,}'\delta dy_{,} + Q_{,}''\delta ddy_{,} + \text{etc.} \\ + R_{,}\delta z_{,} + R_{,}'\delta dz_{,} + R_{,}''\delta ddz_{,} + \text{etc.} \end{array} \right.$$

Les coëfficients p, p', etc. q, q', etc., r, r' etc. étant les mêmes qu'on trouverait en calculant dU, et considérant x_0, y_0, z_0, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ et les quantités qui en dérivent comme des constantes.

992. Il faut, maintenant, trouver l'expression de $\int\delta U$ prise depuis la limite où on a $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ jusqu'à la limite où on a $x = x_{,}$, $y = y_{,}$, $z = z_{,}$, et j'observe d'abord que δx_0, δdx_0, etc. $\delta x_{,}$, $\delta dx_{,}$, etc. et les quantités analogues, en y et z, appartenant à des points particuliers, sont constantes par rapport au signe $\int$. De plus les expressions δdx et $d\delta x$, δddx et $dd\delta x$, etc. sont identiques, car x, x', x'' étant trois valeurs consécutives liées par les relations $x'' - x' = dx'$, $x' - x = dx$, on a $\delta(x' - x) = \delta dx$; mais $\delta(x' - x) = \delta x' - \delta x = d\delta x$, donc δdx et $d\delta x$ représentent, sous deux formes, la valeur de $\delta(x' - x)$. De même $\delta(dx' - dx) = \delta ddx$, et, comme on a $dx' = x'' - x'$, $dx = x' - x$, on trouve, sous une autre forme, $\delta(dx' - dx) = (\delta x'' - \delta x') - (\delta x' - \delta x) = d\delta x' - d\delta x = d^2\delta x$, etc.

On a, d'après ces observations,

$$\int\delta U = \left\{ \begin{array}{l} \int p\delta x + \int p' d\delta x + \int p'' d^2\delta x + \text{etc.} \\ + \int q\delta y + \int q' d\delta y + \int q'' d^2\delta y + \text{etc.} \\ + \int r\delta z + \int r' d\delta z + \int r'' d^2\delta z + \text{etc.} \\ + \delta x_0 \int P_0 + d\delta x_0 \int P'_0 + d^2\delta x_0 \int P''_0 + \text{etc.} \\ + \delta y_0 \int Q_0 + d\delta y_0 \int Q'_0 + d^2\delta y_0 \int Q''_0 + \text{etc.} \\ + \delta z_0 \int R_0 + d\delta z_0 \int R'_0 + d^2\delta z_0 \int R''_0 + \text{etc.} \\ + \delta x_{,} \int P_{,} + d\delta x_{,} \int P'_{,} + d^2\delta x_{,} \int P''_{,} + \text{etc.} \\ + \delta y_{,} \int Q_{,} + d\delta y_{,} \int Q'_{,} + d^2\delta y_{,} \int Q''_{,} + \text{etc.} \\ + \delta z_{,} \int R_{,} + d\delta z_{,} \int R'_{,} + d^2\delta z_{,} \int R''_{,} + \text{etc.} \end{array} \right.$$

993. Pour réduire les termes qui contiènent $d\delta x$, $d^2\delta x$, etc. $d\delta y$, $d^2\delta y$, etc. $d\delta z$, $d^2\delta z$, etc., sous le signe $\int$, à n'avoir plus, sous ce signe, que les variations δx, δy, δz, on employera les intégrations par parties qui donnent

$$\int p'\, d\delta x = p'\,\delta x - \int dp'\,\delta x\,;$$

$$\int p''\, d^2\,\delta x = p''\, d\delta x - dp''\,\delta x + \int d^2 p''\,\delta x\,;$$

$$\int p'''\, d^3\,\delta x = p'''\, d^2\delta x - dp'''\, d\delta x + d^2 p'''\,\delta x - \int d^3 p'''\,\delta x.$$

Les termes qui se rapportent à y et z fournissant des expressions de même forme, on aura

$$\int \delta U = \left\{ \begin{array}{l} \int \{ p - dp' + d^2 p'' - d^3 p''' + \text{etc.} \} \delta x \\ + \int \{ q - dq' + d^2 q'' - d^3 q''' + \text{etc.} \} \delta y \\ + \int \{ r - dr' + d^2 r'' - d^3 r''' + \text{etc.} \} \delta z \\ + (p' - dp'' + d^2 p''' - \text{etc.})\, \delta x + \\ + (p'' - dp''' + d^2 p'''' - \text{etc.})\, d\delta x \\ + (p''' - dp'''' + \text{etc.})\, dd\cdot\delta x \\ \quad \text{etc.} \\ + (q' - dq'' + d^2 q''' - \text{etc.})\, \delta y \\ + (q'' - dq''' + d^2 q'''' - \text{etc.})\, d\delta y \\ + (q''' - dq'''' + \text{etc.})\, dd\,.\,\delta y \\ \quad \text{etc.} \\ + (r' - dr'' + d^2 r''' - \text{etc.})\, \delta z \\ + (r'' - dr''' + d^2 r'''' - \text{etc.})\, d\delta z \\ + (r''' - dr'''' + \text{etc.})\, dd\cdot\delta z \\ \quad \text{etc.} \\ + \delta x_0 \int P_0 + d\delta x_0 \int P_0' + \text{etc.} \\ + \delta y_0 \int Q_0 + d\delta y_0 \int Q_0' + \text{etc.} \end{array} \right.$$

[redacted]

ment, les variations δa, δb, δc affecteront tous les points déterminés par $x, y, z, x_{,}, y_{,}, z_{,}$; et seront, par rapport à la nouvelle origine, soustractives des variations δx, δy, δz, $\delta x_{,}$, $\delta y_{,}$, $\delta z_{,}$, qui se rapportent à l'origine primitive.

Cependant ce changement d'origine n'aura aucune influence sur les variations des différentielles dx, ddx, etc. dy, ddy, etc. dz, ddz etc., car x et x' étant deux abscisses liées par la relation $x' - x = dx$, la variation de dx sera $\delta\{(x' - \delta a) - (x - \delta a)\} = \delta(x' - x) = \delta dx$, etc., d'où l'on voit que δdx, δddx, etc., sont des quantités indépendantes de δa, et ainsi des autres variations de même espèce.

Il suffira donc, pour rendre la valeur de $\int \delta U$ de l'art. précédent applicable au cas dont il s'agit ici, de substituer à $p\delta x, q\delta y, r\delta z, P_{,}\delta x_{,}, Q_{,}\delta y_{,}, R_{,}\delta z_{,}$, les produits respectifs $p(\delta x - \delta a)$, $q(\delta y - \delta b)$, $r(\delta z - \delta c)$, $P_{,}(\delta x_{,} - \delta a)$, $Q_{,}(\delta y_{,} - \delta b)$, $R_{,}(\delta z_{,} - \delta c)$, et de supprimer tous les termes dans lesquels se trouvent x_0, y_0, z_0, et ceux qui en dérivent, ce qui revient à substituer simplement, dans l'équation de l'art. précédent, à la collection des termes dont je viens de parler qui se rapportent à l'origine de l'intégrale, les quantités $-\delta a\int(p + P_{,})$, $-\delta b\int(q + Q_{,})$, $-\delta r\int(r + R_{,})$, sans rien changer d'ailleurs aux autres termes de cette équation.

995. Les équations des articles précédents se simplifieront si on considère une des différentielles dx, dy, dz, comme constante; soit dx cette différentielle, on pourra, sans nuire à la généralité des résultats, prendre aussi δx pour variation constante, bien entendu que tout ce que je dis ici de x s'applique également à x_0 et à $x_{,}$. On aura ainsi $p' = 0$, $p'' = 0$, etc. $P'_0 = 0$, $P''_0 = 0$, etc. $P'_{,} = 0$, $P''_{,} = 0$, etc.

Or, dans l'hypothèse de dx constant, la fonction U est de la forme $W dx$, et on a $p = \left(\frac{dU}{dx}\right) = \left\{\frac{d(W dx)}{dx}\right\} = dx\left(\frac{dW}{dx}\right)$; donc

$$\int p\,\delta x = \delta x \int p = \delta x \int dx \left(\frac{dW}{dx}\right) = W\,\delta x.$$

Ainsi, pour introduire dans l'équation de l'art. 993 la condition de $dx = constante$, il faut, à la collection de tous les termes multipliés par δx, $d\delta x$, $d^2 dx$, etc. $d\delta x_0$, $d^2\delta x_0$, etc. $d\delta x_{,}$, $d^2\delta x_{,}$, etc. substituer le terme unique $W\delta x$, les termes multipliés par δx_0, $\delta x_{,}$ ou par δa, $\delta x_{,}$, dans l'équation de l'article cité, ou dans cette même équation modifiée d'après ce qui est dit à l'article précédent, étant conservés.

996. La valeur de $\int\delta U$ donnée par l'équation de l'art. 993 est identique avec celle de $\delta\int U$; (j'avais déjà employé, art. 844, la transposition des signes δ et $\int$.) en effet, $\int U$ peut être considéré comme le terme sommatoire d'une série dont U est le terme général, les différences de chaque terme particulier à celui qui le précède et à celui qui le suit, étant infiniment petites, par rapport à ces termes qui sont en nombre infini et de même ordre entr'eux; cette série peut être représentée par

(1) . . . . $\int U = U' + U'' + U''' + \text{etc.}$

et on a la série correspondante des variations

(2) . . . . $\delta\int U = \delta U' + \delta U'' + \delta U''' + \text{etc.}$

or δU étant le terme général de la série (2) comme U est le terme général de (1), le terme sommatoire de (2) sera, par conséquent,

$$\int\delta U = \delta U' + \delta U'' + \delta U''' + \text{etc.}$$

on a donc

(3) . . . . $\int\delta U = \delta\int U$.

997. Désignant dans l'équation de l'art. 993 par σ les termes de la valeur de $\int\delta U$ qui renferment δx, δy et δz sous le signe $\int$, par ξ la collection de tous les termes qui renferment des intégrales où δx, δy et δz, ne sont pas sous le signe $\int$ (ces dernières intégrales sont celles qui ont pour facteurs δx_0, δy_0, δz_0, $\delta x_,$, $\delta y_,$, $\delta z_,$, et les différentielles de ces variations, les termes qui se rapportent à x_0, y_0, z_0, pouvant être, art. 994 remplacés par trois intégrales multipliées, respectivement, par δa, δb, δc) et par ψ la collection de tous les termes qui, ne renfermant point d'intégrales, sont multipliés par δx, δy, δz et par les différentielles de ces variations, la valeur générale de $\int\delta U$ sera

(1) . . . . $\int\delta U = \sigma + \xi + \psi + \textit{constante}.$

[redacted]

(2) . . . . *constante* $= -\psi_0$;
et la valeur générale indéterminée de $\int\delta U$ deviendra

(3) . . . . $\int\delta U = \sigma + \xi + \psi - \psi_0$.

Je vais d'abord m'occuper de la partie $\xi + \psi - \psi_0$ du 2.e membre de cette équation. Toutes les intégrales comprises dans ξ étant d'abord effectuées séparément et chaque constante particulière déterminée de manière que l'intégrale qui répond à cette constante s'évanouisse lorqu'on y fera $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, etc., il est manifeste que la partie de $\int\delta U$ exprimée par $\xi + \psi - \psi_0$ s'évanouira lorsqu'on y introduira les valeurs relatives à l'origine de l'intégrale, c'est-à-dire lorsqu'on y fera $\psi = \psi_0$, et qu'on substituera dans ξ, x_0 au lieu de x, y_0 au lieu y, z_0 au lieu de z, etc., mais $\int\delta U$ devant être prise depuis le point où $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, jusqu'à celui où $x = x_,$, $y = y_,$, $z = z_,$, pour introduire cette condition dans la partie de $\int\delta U$ représentée par $\xi + \psi - \psi_0$ il faut, dans les termes variables ξ et ψ (disposés de manière à s'évanouir quand on y fait $x = x_0$, etc.) substituer, à toutes les variables, les valeurs qui conviennent à la seconde limite de l'intégrale, c'est-à-dire faire $x = x_,$, etc.

ξ et ψ acquerront, par ces substitutions, des valeurs $\xi_,$ et $\psi_,$ et l'expression définie de la partie, que je considère, de l'intégrale $\int\delta U$, prise dans les limites ci-dessus assignées sera

$$\xi_, + \psi_, - \psi_0.$$

Ces quantités ne renferment plus que des termes de la forme

$$k\delta x_0\,;\quad k'd\delta x_0\,;\quad k''d^2\delta x_0\,;\ \text{etc.}$$
$$m\delta y_0\,;\quad m'd\delta y_0\,;\quad m''d^2\delta y_0\,;\ \text{etc.}$$
$$n\delta z_0\,;\quad n'd\delta z_0\,;\quad n''d^2\delta z_0\,;\ \text{etc.}$$
$$K\delta x_,\,;\quad K'd\delta x_,\,;\quad K''d^2\delta x_,\,;\ \text{etc.}$$
$$M\delta y_,\,;\quad M'd\delta y_,\,;\quad M''d^2 y_,\,;\ \text{etc.}$$
$$N\delta z\,;\quad N'd\delta z\,;\quad N''d^2\delta z_,\,;\ \text{etc.}$$

les termes qui se rapportent à x_0, y_0, z_0 devant être, art. 994, remplacés par trois termes de la forme $G'\delta a$, $G''\delta b$, $G'''\delta c$, lorsqu'on a $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ et tous les coëfficients des quantités affectées du signe δ étant des quantités constantes.

998. Je passe à l'intégrale σ qui renferme δx, δy, et δz sous le signe $\int$; on peut supposer que la valeur définie complète de cette intégrale

prise entre la limite où on a $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ et celle où on a $x=x_,$, $y=y_,$, $z=z_,$ est de la forme

$$\sigma=\begin{cases}\lambda_0\delta x_0+\lambda'\delta x'+\lambda''\delta x''+\ldots+\lambda_,\delta x_,\\ +\mu_0\delta y_0+\mu'\delta y'+\mu''\delta y''+\ldots+\mu_,\delta y_,\\ +\nu_0\delta z_0+\nu'\delta z'+\nu''\delta z''+\ldots+\nu_,\delta z_,;\end{cases}$$

les termes généraux des séries qui composent le 2.e membre étant représentés par $\lambda\delta x$, $\mu\delta y$, $\nu\delta z$. Il est à remarquer que λ_0, μ_0 et ν_0, $\lambda_,$, $\mu_,$, $\nu_,$, sont des coëfficients d'un ordre inférieur à celui des coëfficients k, m, n, K, M, N, de l'art. précédent et qu'ainsi $\lambda_0\delta x_0$, $\mu_0\delta y_0$, $\nu\delta z_0\lambda_,\delta x_,$, $\mu_,\delta y_,$, $\nu_,\delta z_,$, ne doivent point être compris parmis les termes dont cet article offre le tableau.

999. Il reste, maintenant, à indiquer l'objet et l'usage de l'analyse et des formules précédentes; les problêmes qu'on a à résoudre, par la méthode des variations, se réduisent, ordinairement, à trouver les relations entre x, y et z qui rendent $\int U$ un maximum ou un minimum, dans les limites ci-dessus assignées; ces relations doivent donc être telles qu'on ait $\delta\int U=0$, équation identique, art. 996, avec $\int\delta U=0$, ou qu'on ait, art. 997.

$$(1)\ \ldots\ldots\ldots\ \sigma+\xi_,+\psi_,-\psi_0=0;$$

or la partie σ de cette intégrale renferme, comme on a vu à l'article précédent, les variations de x', x'', etc. y', y'', etc. z', z'' etc., dans l'étendue entière de l'intégrale, variations qui sont et indépendantes entr'elles, et indépendantes des variations de x_0, y_0, z_0, $x_,$, $y_,$, $z_,$, qui se rapportent aux limites; on doit donc avoir séparément $\sigma=0$, mais, lorsque σ est nul, l'indépendance qui existe entre tous les termes

l'une de ces équations doit pouvoir être conclue des deux autres.

Je trouverai, dans la suite du cours, plus d'une occasion de faire sentir aux élèves l'utilité de la théorie dont je viens de leur exposer sommairement les principes généraux, en y ajoutant, même, encore quelques développements.

1000. σ étant nul séparément, on a

$$\xi_{,} + \psi_{,} - \psi_{0} = 0\,;$$

toutes les quantités qui entrent dans cette équation se rapportent aux limites de l'intégrale $\int \delta U$, où ces quantités sont, en général, liées par des relations; les variations δx_0, δy_0, δz_0, etc. $\delta x_{,}$, $\delta y_{,}$, $\delta z_{,}$, etc. ne peuvent donc pas être regardées comme indépendantes entr'elles et on devra, dans chaque cas particulier, combiner, avec l'équation précédente, celles qui expriment les relations dont je viens de parler et qui doivent former une partie des données du problème. Dans l'exemple que je présenterai bientôt on a une équation particulière pour chaque limite.

1001. L'égalité à zéro de l'expression $\delta \int U$ donne les relations entre x, y et z, d'après lesquelles $\int U$ est, entre des limites déterminées, ou un maximum ou un minimum; on a, pour distinguer le premier cas du second, des règles analogues à celles que fournit la méthode ordinaire des maxima et minima; l'analyse suivante, du problème de la plus vîte descente, offrira un exemple de l'application de ces règles.

Application des principes exposés dans le chapitre précédent à une solution du problème de la brachystochrone, plus générale que celle des articles 989 et 990.

1002. J'ai résolu, art. 989 et 990, le problème de la courbe de plus vîte descente par des considérations immédiates et élémentaires, en supposant que les points de départ et d'arrivée étaient fixes dans l'espace; je vais maintenant donner le même problème comme exemple de l'application de la méthode des variations, et, afin que les élèves retirent de cet exemple toute l'utilité possible, je substituerai, aux points fixes de départ et d'arrivée, deux courbes données et fixes, et il s'agira de trouver une troisième courbe sur laquelle le mobile pesant parvienne, dans un minimum de temps, de la première à la seconde courbe donnée en ajoutant encore aux nouvelles conditions celle d'une vîtesse initiale imprimée au

mobile. Les points respectifs, de départ et d'arrivée sur l'une et l'autre de ces deux courbes, se trouvent ici au nombre des inconnues du problème et doivent être déterminées par l'analyse.

Fig 10. Soient TV et $T'V'$ les deux courbes fixes, à simple ou double courbure, entre lesquelles on veut avoir la courbe de plus vîte descente ; je suppose d'abord que cette dernière peut être à double courbure, et je rapporte les positions de tous ses points à trois coordonnées x, y, z dont l'origine commune est au point A, le plan xy étant horizontal et l'axe des z vertical. Le plan de la planche représente celui des xz, et CMC' est la projection, sur ce plan, de la brachystochrone cherchée, AZ est l'axe vertical des z, comptés positivement de haut en bas, AX l'axe horizontal des x, et le mobile se trouvant en M au bout du temps t, on a $AP = x$, $PM = z$, arc projeté en $CM = s$.

Ce mobile part du point inconnu C avec une certaine vîtesse initiale que je suppose due à une hauteur CQ, le point Q étant placé sur une horizontale DQE dont la position dépend, ou non, de celle du point C; je désigne par K la hauteur verticale QB ou l'élévation du plan des xy au-dessus de l'horizontale DQE.

1003. Lorsque le mobile, parti du point C, est arrivé en M, sa vîtesse ($HCRH'$ étant une horizontale) est due à la hauteur $MR + RN = MN = PM - PN = z - K$, et a, pour valeur, $\sqrt{2g(z-K)}$; il parcourt, avec cette vîtesse, l'arc élémentaire de courbe ds ou $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, pendant un temps infiniment petit dt égal à

$$(1) \; \ldots\ldots \; dt = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}}{\{2g(z-K)\}^{\frac{1}{2}}};$$

[redacted]

et la quantité $\dfrac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}}{(z-K)^{\frac{1}{2}}}$ est, pour le cas dont il s'agit ici, la correspondante de celle que j'ai désignée par U dans l'analyse générale des art. 991, 992 et suivants, j'ai donc dans ce même cas

$$(3)\ldots\ldots dU=\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}}{2(z-K)^{\frac{3}{2}}}\,dz \\ +\dfrac{dx}{\{(z-K)(dx^2+dy^2+dz^2)\}^{\frac{1}{2}}}\,.\,ddx \\ +\dfrac{dy}{\{(z-K)(dx^2+dy^2+dz^2)\}^{\frac{1}{2}}}\,ddy \\ +\dfrac{dz}{\{(z-K)(dx^2+dy^2+dz^2)\}^{\frac{1}{2}}}\,.\,ddz; \end{array}\right.$$

d'où, en remettant pour $dx^2+dy^2+dz^2$ sa valeur ds et faisant

$$(4)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(z-K)^{\frac{1}{2}}=\rho,$$

on déduit

$$(5)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{llll} p=0; & p'=\dfrac{dx}{\rho\, ds}; & p''=0; & \text{etc.} \\ q=0; & q'=\dfrac{dy}{\rho\, ds}; & q''=0; & \text{etc.} \\ r=-\frac{1}{2}\dfrac{ds}{\rho^3}; & r'=\dfrac{dz}{\rho\, ds}; & r''=0; & \text{etc.} \end{array}\right.$$

et ces valeurs introduites dans l'équation générale de l'art. 993 donnent, pour la partie de $\int\delta U$ qui renferme les variations δx, δy et δz sous le signe $\int$,

$$(6)\ldots\int\delta U=\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int -d\left(\frac{dx}{\rho ds}\right)\delta x \\ +\displaystyle\int -d\left(\frac{dy}{\rho ds}\right)\delta y \\ +\displaystyle\int\left\{-\frac{1}{2}\frac{ds}{\rho^3}-d\left(\frac{dz}{\rho ds}\right)\right\}\delta z \\ +\qquad \text{etc.} \end{array}\right\}$$

Les termes ci-à côté sont les seuls necessaires pour déterminer l'espèce de la courbe parcourue.

on a donc art. 999

$$(7) \ldots \left\{ -d\left(\frac{dx}{\rho ds}\right)=0;\ -d\left(\frac{dy}{\rho ds}\right)=0;\ -\frac{1}{2}\frac{ds}{\rho^3}-d\left(\frac{dz}{\rho ds}\right)=0; \right\}$$

on tire, de la combinaison des 2 premières équations (7), $\frac{dx}{dy} = $ constante ; ainsi la projection orthogonale de la courbe sur le plan horizontal des xy est une ligne droite, la courbe est plane ayant sa trace sur le plan vertical qui renferme les points de départ et d'arrivée.

1004. Ce résultat est applicable à toutes les hypothèses qu'on peut faire sur les courbes TCV et $T'C'V'$; je suppose maintenant, pour plus de simplicité, que ces deux courbes sont tracées sur un même plan vertical qui sera le plan xz, la courbe cherchée se trouvera par conséquent dans ce même plan et les équations (1) et (2) de l'article précédent deviendront

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ dt = \frac{(dx^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}}{\{2g(z-K)\}^{\frac{1}{2}}} = U\sqrt{\frac{1}{2g}};$$

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ \int U = \int \frac{(dx^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}}{\{(z-K)\}^{\frac{1}{2}}} = minimum.$$

la fonction U ne contient que les différentielles du premier ordre de x et z; la seule quantité relative aux limites, qui s'y trouve, est K, appartenant à la première limite et égale à la différence entre l'ordonnée initiale z_0 et la hauteur due à la vîtesse initiale ; on n'y voit aucune quantité appartenant à la seconde limite. Ainsi on a, dans l'équation de l'art. 991, tous les termes relatifs à la coordonnée horizontale y étant préalablement supprimés, $p''=0$, $p'''=0$, etc. $r''=0$, $r'''=0$, etc. $P'_0=0$, $P''_0=0$, etc. $R'_0=0$, $R''_0=0$, etc. $P_{,}=0$, $P'_{,}=0$, $P''_{,}=0$, etc. $R_{,}=0$, $R'_{,}=0$, $R''_{,}=0$, et cette équation se réduit à

$$(3) \ldots\ \delta U = \left\{ \begin{array}{l} p\delta x + p' d\delta x + r\delta z + r' d\delta z \\ + P_0 \delta x_0 \qquad\qquad + R_0 \delta z_0 ; \end{array} \right.$$

d'où on déduit, en observant que δx_0 et δy_0 sont des constantes par rapport au signe $\int$, et transposant les signes δ et d, le tout conformément à ce qui est dit art. 992,

$$(4) \ldots\ldots\ \int\delta U = \int p\delta x + \int p' d\delta x + \int r\delta z + \int r' d\delta z + \delta x_0 \int P_0 + \delta z_0 \int R_0 ;$$

les intégrations par parties, art. 993, donnent $\int p' d\delta x = p'\delta x - \int dp'\delta x$; $\int r' d\delta z = r'\delta z - \int dr'\delta z$, d'où

$$(5) \ldots \int \delta U = \delta \int U = \int (p - dp')\,\delta x + \int (r - dr')\,\delta z$$
$$+ p'\delta x \qquad + r'\delta z$$
$$+ \delta x_0 \int P_0 \qquad + \delta z_0 \int R_0$$
$$+ \textit{constante}.$$

1005. Les intégrales $\int (p - dp')\,\delta x$, $\int (r - dr')\,\delta z$, $\int P_0$, $\int Q_0$, considérées d'abord comme indéfinies, doivent s'évanouir lorsqu'on y introduit les valeurs des variables qui conviennent à l'origine, et cette introduction change $p'\delta x + r'\delta z$ en $p'_0\delta x_0 + r'_0\delta z_0$, on a donc pour la valeur de la quantité correspondante à ψ_0, art. 997,

$$(1) \ldots\ldots \textit{constante} = -(p'_0\delta x_0 + r'_0\delta z_0);$$

substituant cette valeur de la constante et donnant ensuite aux variables les valeurs qui conviennent à la seconde limite de l'intégrale, ce qui change $p'\delta x + r'\delta z$ en $p'_{,}\delta x_{,} + r'_{,}\delta z_{,}$, on a la valeur définie de l'intégrale $\int \delta U$

$$(2) \ldots \int \delta U = \delta \int U = \left\{ \begin{array}{l} \int (p - dp')\,\delta x + \int (r - dr')\,\delta z \\ + (p'_{,}\delta x_{,} - p'_0\delta x_0) + (r'_{,}\delta z_{,} - r'_0\delta z_0) \\ + \delta x_0 \int P_0 \qquad\qquad + \delta z_0 \int R_0 \end{array} \right\} = 0$$

toutes les expressions affectées du signe $\int$, dans le deuxième membre, étant des intégrales définies prises dans les limites assignées par l'état de la question.

1006. Prenant les valeurs de p, p', r, r', P_0 et Q_0 déduites de l'expression $U = \frac{(dx^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}}{(z - K)^{\frac{1}{2}}}$, et observant 1°. que les coëfficients p, p', q, q' sont identiques avec ceux qu'on obtiendrait par la différentiation ordinaire de U, en regardant K comme constante, 2°. que K, fonction des coordonnées initiales, a une variation de la forme

$$(3) \ldots\ldots \delta K = \left(\frac{dK}{dx_0}\right)\delta x_0 + \left(\frac{dK}{dz_0}\right)\delta z_0;$$

on trouve

$$(4) \ldots \left\{ \begin{array}{l} p = 0\,;\; p' = \dfrac{dx}{\sqrt{(z - K)(dx^2 + dz^2)}}\,; \\ r = -\frac{1}{2}\dfrac{\sqrt{dx^2 + dz^2}}{(z - K)^{\frac{3}{2}}}\,;\; r' = \dfrac{dz}{\sqrt{(dz - K)(dx^2 + dz^2)}}\,; \\ P_0 = \frac{1}{2}\left(\dfrac{dK}{dx_0}\right)\dfrac{\sqrt{dx^2 + dz^2}}{(z - K)^{\frac{3}{2}}}\,;\; R_0 = \frac{1}{2}\left(\dfrac{dK}{dz_0}\right)\dfrac{\sqrt{dx^2 + dz^2}}{(z - K)^{\frac{3}{2}}}\,; \end{array} \right.$$

et si on veut employer la notation abrégée

$$(5) \ldots\ldots \left\{ \sqrt{z-K} = \rho\,;\ \sqrt{dx^2+dz^2} = ds\,; \right\}$$

les équations (4) se changent en

$$(6) \ldots \left\{ \begin{array}{l} p = 0\,;\ p' = \dfrac{dx}{\rho ds}\,; \\ r = -\frac{1}{2}\,\dfrac{ds}{\rho^3}\,;\ r' = \dfrac{dz}{\rho ds}\,; \\ P_o = \frac{1}{2}\left(\dfrac{dK}{dx_o}\right)\dfrac{ds}{\rho^3}\,;\ R_o = \frac{1}{2}\left(\dfrac{dK}{dz_o}\right)\dfrac{ds}{\rho^3}\,. \end{array} \right.$$

On a de plus à la première et à la deuxième limite,

$$(7) \ldots \left\{ \begin{array}{l} p'_o = \dfrac{dx_o}{\rho_o ds_o}\,;\ p'_{\prime} = \dfrac{dx_{\prime}}{\rho_{\prime} ds_{\prime}}\,; \\ r'_o = \dfrac{dz_o}{\rho_o ds_o}\,;\ r'_{\prime} = \dfrac{dz_o}{\rho_{\prime} ds_{\prime}}\,; \end{array} \right.$$

$\rho_o, ds_o, \rho_{\prime}, ds_{\prime}$ étant, respectivement, les valeurs de ρ et ds au point C et au point C'.

1007. Les quantités indépendantes à égaler à zéro dans le 2.ᵉ membre de l'équation (2) de l'art. 1005 sont, art. 999, 1.° chacun des éléments, en particulier, des intégrales $\int(p - dp')\,\delta x$ et $\int(r - dr')\,\delta z$ parce que chacun de ces éléments, en se rapportant à un δx ou un δz indépendant de tous les autres, doit être nul en particulier, ce qu'on exprime par l'équation

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ (p - dp')\,\delta x = 0\,;$$

applicable à l'un quelconque des éléments qui ont un des δx pour

[redacted]

1008. Ainsi voilà quatre équations déduites de l'égalité à zéro du 2.e membre de l'équation (2) de l'art. 1005 ; les deux premières sont posées dans l'article précédent, mais, pour obtenir tous les termes des deux dernières, il faut préalablement avoir les deux intégrales $\int P_0$ et $\int R_0$ dans les limites exigées.

Pour cela j'observe que la 2.e équation $(r - dr')\delta z = 0$, ou $-\frac{1}{2}\frac{ds}{\rho^3} - d\left(\frac{dz}{\rho ds}\right) = 0$, donne

$$(1) \ldots\ldots \int\left(\frac{ds}{\rho^3}\right) = -\frac{2dz}{\rho ds} + C';$$

or $\int P_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{dK}{dx_0}\right)\int\frac{ds}{\rho^3}$ (je mets $\left(\frac{dK}{dx_0}\right)$ hors du signe $\int$ parceque ce terme se rapporte à un point particulier de la courbe) et en substituant pour $\int\frac{ds}{\rho^3}$ la valeur qu'on vient de trouver,

$$(2) \ldots\ldots \int P_0 = \frac{dK}{dx_0}\left\{-\frac{dz}{\rho ds} + C'\right\};$$

à l'origine de l'intégrale où $\int P_0 = 0$, on a $\frac{dz}{\rho ds} = \frac{dz_0}{\rho_0 ds_0}$, d'où $C' = \frac{dz_0}{\rho_0 ds_0}$. Substituant cette valeur et faisant, ensuite $\frac{dz}{\rho ds} = \frac{dz_{,}}{\rho_{,}ds_{,}}$, on a, dans les limites exigées, l'intégrale définie,

$$(3) \ldots\ldots \int P_0 = -\left(\frac{dK}{dx_0}\right)\left(\frac{dz_{,}}{\rho_{,}ds_{,}} - \frac{dz_0}{\rho_0 ds_0}\right);$$

on trouvera, en suivant exactement la même marche de raisonnement et de calcul,

$$(4) \ldots\ldots \int R_0 = -\left(\frac{dK}{dz_0}\right)\left(\frac{dz_{,}}{\rho_{,}ds_{,}} - \frac{dz_0}{\rho_0 ds_0}\right).$$

1009. Ces intégrations faites on peut substituer, dans l'équation (2) de l'art. 1005, toutes les quantités qui appartiennent à la question, et cette équation devient

$$
0=\left\{\begin{aligned}
&\int\left\{0-d\left(\frac{dx}{\rho ds}\right)\right\}\delta x+\int\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{ds}{\rho^3}-d\left(\frac{dz}{\rho ds}\right)\right\}\delta z\\
&+\left(\frac{dx_{,}}{\rho_{,}ds_{,}}\,\delta x_{,}-\frac{dx_{0}}{\rho_{0}ds_{0}}\,\delta x_{0}\right)+\left(\frac{dz_{,}}{\rho_{,}ds_{,}}\,\delta z_{,}-\frac{dz_{0}}{\rho_{0}ds_{0}}\,\delta z_{0}\right)\\
&-\delta x_{0}\left(\frac{dK}{dx_{0}}\right)\left(\frac{dz_{,}}{\rho_{,}ds_{,}}-\frac{dz_{0}}{\rho_{0}ds_{0}}\right)\\
&-\delta z_{0}\left(\frac{dK}{dz_{0}}\right)\left(\frac{dz_{,}}{\rho_{,}ds_{,}}-\frac{dz_{0}}{\rho_{0}ds_{0}}\right).
\end{aligned}\right.
$$

1010. Il faut, art. 999 et 1007, faire quatre équations des quantités qui multiplient δx, δz, δx_0 et δz_0, $\delta x_{,}$ et $\delta z_{,}$, ce qui donne

$$(1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ d\left(\frac{dx}{\rho ds}\right)=0\,;$$

$$(2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{1}{2}\,\frac{ds}{\rho^3}+d\left(\frac{dz}{\rho ds}\right)=0$$

$$(3)\ \ldots\left\{\begin{aligned}
&\left\{\frac{dx_0}{\rho_0 ds_0}+\left(\frac{dK}{dx_0}\right)\left(\frac{dz_{,}}{\rho_{,}ds_{,}}-\frac{dz_0}{\rho_0 ds_0}\right)\right\}\delta x_0\\
+&\left\{\frac{dz_0}{\rho_0 ds_0}+\left(\frac{dK}{dz_0}\right)\left(\frac{dz_{,}}{\rho_{,}ds_{,}}-\frac{dz_0}{\rho_0 ds_0}\right)\right\}\delta z_0
\end{aligned}\right\}=0\,;$$

$$(4)\ \ldots\ldots\ \frac{dx_{,}}{\rho_{,}ds_{,}}\,\delta x_{,}+\frac{dz_{,}}{\rho_{,}ds_{,}}\,\delta z_{,}=0.$$

1011. On déduit, des deux premières équations de l'art. précé dent les deux suivantes, dont la seconde a déjà été employée art. 1008,

$$(1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{dx}{\ldots}=C\,;$$

qui a lieu au point le plus bas de la courbe, celui où la tangente est horizontale. Supposant qu'à ce point $z = A$, on a, en substituant à ρ, sa valeur $\sqrt{z-K}$, et à la constante C sa valeur $\frac{1}{\sqrt{A-K}}$

$$\frac{dx}{ds\sqrt{z-K}} = \frac{1}{\sqrt{A-K}}$$

d'où on déduit, en remplaçant dx par sa valeur $\sqrt{ds^2 - dz^2}$,

$$(3) \ldots\ldots\ldots ds = (A-K)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dz}{(A-z)^{\frac{1}{2}}}$$

et en intégrant

$$(4) \ldots\ldots\ldots s = (A-K)^{\frac{1}{2}} \{B - 2(A-z)^{\frac{1}{2}}\}$$

B étant la constante arbitraire, équation qui appartient à une cycloïde. Pour rendre ce résultat parfaitement sensible, on fera, dans l'équation (3), $A - z = w$, la nouvelle coordonnée w ayant son origine au point le plus bas de la courbe, où on peut placer aussi l'origine des arcs s, puisque le seul élément ds a été employé dans le calcul; l'équation cherchée devient alors, en observant que les valeurs simultanées $w = 0$, $s = 0$, donnent $B = 0$,

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots s^2 = 4(A-K)w$$

c'est celle d'une cycloïde, à base horizontale, dont le cercle générateur a un diamètre $= A - K$.

1012. Il faut examiner, maintenant, comment cette cycloïde est placée par rapport aux courbes limites TCV, $T'C'V'$, et ce seront les équations (3) et (4) de l'art. 1010, qui fourniront, à cet égard, les déterminations nécessaires. Mais les résultats à déduire de l'équation (3) dépendront de l'hypothèse qu'on fera sur K, quantité qui dépend elle-même de la vîtesse initiale. Si cette vîtesse qu'on suppose due à la hauteur CQ est une quantité déterminée, indépendante de la position du point de départ C, la hauteur CQ est aussi une quantité déterminée, d'où il suit que l'horizontale DQE, qui doit être à la distance CQ du point de départ C, s'élève ou s'abaisse en même temps que le point C, lorsqu'on rapporte la courbe parcourue CMC' à différentes origines C, et qu'ainsi BQ, ou K, varie dans le passage d'une courbe CMC' à une autre. Faisant, dans ce cas, la constante $CQ = H$, on a Fig. 10

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots K = z_0 - H$$

d'où on déduit

$$(2) \ldots\ldots \left\{\left(\frac{dK}{dx_0}\right)=0\,;\ \left(\frac{dK}{dz_0}\right)=1.\right\}$$

l'équation (3), de l'art. 1010, devient, en y substituant ces valeurs,

$$(3) \ldots\ldots\ldots \frac{dx_0}{\rho_0 ds_0}\,\delta x_0+\frac{dz_{,}}{\rho_{,}ds_{,}}\,\delta z_0=0$$

et on a l'équation (4) du même article

$$(4) \ldots\ldots\ldots \frac{dx_{,}}{\rho_{,}ds_{,}}\,\delta x_{,}+\frac{dz_{,}}{\rho_{,}ds_{,}}\,\delta z_{,}=0$$

La valeur générale $\frac{dx}{\rho ds}=C$, équation (1) de l'art. précédent, qui s'applique à tous les points de la courbe parcourue, convient, par conséquent, au premier et au dernier de ces points, ce qui donne

$$(5) \ldots\ldots\ldots \frac{dx_0}{\rho_0 ds_0}=\frac{dx_{,}}{\rho_{,}ds_{,}}=C$$

Substituant, respectivement, dans (3) et (4), $C\delta x_0$ et $C\delta x_{,}$ à $\frac{dx_0}{\rho_0 ds_0}\,\delta x_0$ et à $\frac{dx_{,}}{\rho_{,}ds_{,}}\,\delta x_{,}$ ces équations deviennent

$$(6) \ldots \left\{C\delta x_0+\frac{dz_{,}}{\rho_{,}ds_{,}}\,\delta z_0=0\,;\ C\delta x_{,}+\frac{dz_{,}}{\rho_{,}ds_{,}}\,\delta z_{,}=0\right\}$$

d'où on déduit, par l'élimination de $\frac{dz_{,}}{C\rho_{,}ds_{,}}$,

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\delta z_0}{\delta x_0}=\frac{\delta z_{,}}{\delta x_{,}}$$

$$(1)\ldots\left\{BQ=K=constante\,;\ \left(\frac{dK}{dx_0}\right)=0\,;\ \left(\frac{dK}{dz_0}\right)=0\right\}$$

l'équation (3) de l'art. 1010, devient, dans ce cas,

$$(2)\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \frac{\delta z_0}{\delta x_0}=-\frac{dx_0}{dz_0}$$

les incréments désignés par δ appartiennent à la courbe limite, et les incréments désignés par d à la courbe parcourue, les uns et les autres ayant lieu au point de départ.

1014. Enfin l'équation (4) de l'art. 1010 donne, pour l'un et 'autre des cas traités dans les deux articles précédents,

$$\frac{\delta z_{\prime}}{\delta x_{\prime}}=-\frac{dx_{\prime}}{dz_{\prime}}$$

les incréments désignés par δ et par d appartenants, respectivement, à la deuxième courbe limite et à la courbe parcourue, au point de rencontre de ces deux courbes.

1015. Les résultats, obtenus dans les trois articles précédents, renferment ce qu'il est nécessaire de savoir relativement aux extrémités de la courbe parcourue et à la position de cette courbe par rapport aux courbes limites, et fournissent les conclusions suivantes, savoir :

« 1°. La vîtesse initiale étant déterminée et indépendante de la posi-
« tion du point de départ, condition de laquelle on a déduit l'équation
« (7) de l'article 1012.

$$\frac{\delta z_0}{\delta x_0}=\frac{\delta z_{\prime}}{\delta x_{\prime}}$$

« les tangentes menées aux courbes limites, à leurs intersections avec
« la courbe parcourue, sont parallèles entr'elles.

« 2°. La vîtesse initiale étant due à la hauteur d'une horizontale fixe au-
« dessus du point de départ, ce qui donne l'équation (2) de l'article 1013,

$$\frac{\delta z_0}{\delta x_0}=-\frac{dx_0}{dz_0}$$

« la courbe limite, au point de départ, est perpendiculaire à la courbe
« parcourue.

« Enfin l'équation de l'article 1014.

$$\frac{\delta z_{\prime}}{\delta x_{\prime}}=-\frac{dx_{\prime}}{dz_{\prime}}$$

« applicable aux deux cas précédents, énonce que, dans l'un et l'autre « de ces deux cas, la courbe parcourue est, au point d'arrivée sur la « seconde courbe limite, perpendiculaire à cette courbe. »

Considérations générales sur le mouvement d'un point matériel qui a lieu sur une surface courbe donnée. Équations de ce mouvement. Expression générale de la vitesse. Autres propriétés générales. Principe de la moindre action. Équation différentielle de la trajectoire, lorsque le corps ne se meut qu'en vertu d'une impulsion initiale.

1016. La théorie du mouvement d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur une surface donnée, sera déduite de considérations absolument semblables à celles qui ont servi de base à l'analyse du mouvement de ce point sur une courbe donnée, considérations exposées art. 917 et 918. On imaginera donc que le point matériel mobile est une sphère d'un diamètre infiniment petit, et on concevra une seconde surface mise dans une position infiniment voisine de celle sur laquelle cette sphère est obligée de se mouvoir, de manière que quelque part que la même sphère se trouve, entre les deux surfaces ou *enveloppes*, elle soit en contact avec l'une et l'autre en même temps. Dans cet état de choses, si on imprime du mouvement au corps sphérique, il aura en général, une tendance à pénétrer l'une ou l'autre surface ou *enveloppe*, mais, comme on suppose que cette pénétration ne peut pas avoir lieu, la résistance que lui opposera, à un instant quelconque, celle des deux surfaces qui se trouvera pressée en vertu de son mouvement, pourra être assimilée à une force, normale à la surface donnée, d'intensité et de direction telles que cette force combinée avec celles

x, y et z, et par la normale à la surface, menée au point où se trouve le corps au bout du temps t, on aura, art. 820, les équations suivantes du mouvement

$$(1)\ldots\left\{\begin{aligned} d\left(\frac{dx}{dt}\right) &= dt\,(X - \Gamma \cos. n') \\ d\left(\frac{dy}{dt}\right) &= dt\,(Y - \Gamma \cos. n'') \\ d\left(\frac{dz}{dt}\right) &= dt\,(Z + \Gamma \cos. n''') \end{aligned}\right.$$

La surface présente sa convexité au plan xy, et le mobile se meut sur sa concavité, de manière que la puissance, représentée par la résistance de cette surface, a une direction et un sens d'action qui, article 25, rendent cos. n' et cos. n'' négatifs.

On déduit de ces équations, comme à l'art. 919, en faisant dt constant,

$$(2)\ldots\frac{dx\,ddx + dy\,ddy + dz\,ddz}{dt^2} = \left\{\begin{array}{l} Xdx + Ydy + Zdz \\ + \Gamma(dz \cos. n''' - dy \text{ c. } n'' - dx \text{ c. } n') \end{array}\right.$$

J'observe maintenant qu'au bout du temps t, et au commencement de l'instant dt, le mobile se trouve, par hypothèse, au point de rencontre de la surface sur laquelle il est obligé de se mouvoir, et de la normale suivant laquelle la force Γ est dirigée ; il va donc parcourir pendant l'instant dt, un arc élémentaire ds perpendiculaire à cette normale en passant de la position déterminée par les coordonnées x, y, z, à la position déterminée par les coordonnées $x+dx, y+dy, z+dz$; or cet arc parcouru ds fait avec x, y et z des angles dont les cosinus respectifs sont $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, et comme il est perpendiculaire à la ligne qui forme les angles n', n'', n''', avec les mêmes axes, on a par le théorème connu de trigonométrie

$$\frac{dz}{ds}\cos. n''' - \frac{dy}{ds}\cos. n'' - \frac{dx}{ds}\cos. n' = 0$$

en combinant cette équation avec la précédente et intégrant, on a, comme aux articles 822 et 919

$$(3)\ldots\ldots v^2 = U^2 + 2\int(Xdx + Ydy + Zdz)$$

Ainsi, l'expression générale de la vîtesse est la même, soit que le corps se meuve librement, soit qu'il se meuve sur une ligne ou une surface données et *continues*.

Le raisonnement direct, par lequel j'ai obtenu l'équation (3), est le plus élémentaire qu'on puisse employer; on arrivera aussi très-simplement

au même résultat, d'une autre manière, en représentant, par $K=0$, l'équation de la surface sur laquelle le corps est assujetti à se mouvoir, et par $pdx + qdy + rdz = 0$ la première dérivée de cette équation. Si on fait $\Omega = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$, on aura, par les théorêmes démontrés dans la géométrie analytique,

$$-\cos. n' = \frac{p}{\Omega}\ ;\ -\cos. n'' = \frac{q}{\Omega}\ ;\ \cos. n''' = \frac{r}{\Omega}$$

et ces valeurs substituées dans l'expression $\Gamma(dz\, c.n''' - dy\, c.n'' - dx\, c.n')$ la changeront en $\frac{\Gamma}{\Omega}(pdx + qdy + rdz)$ valeur nulle puisque $pdx + qdy + rdz = 0$.

1018. Si le mobile n'est sollicité par aucune puissance et que son mouvement soit dû simplement à une impulsion initiale qui lui a imprimé, au point de départ, une vîtesse tangentielle U, on aura $v = U$, comme aux articles ci-dessus cités, et le mouvement sera uniforme.

1019. Lorsque l'expression $Xdx + Ydy + Zdz$, sera la différentielle exacte d'une fonction Q de x, y et z, on démontrera, par un raisonnement absolument semblable à celui de l'art. 922, que, dans le cas où plusieurs mobiles, animés d'une même vîtesse V', partiraient de différents points d'une ligne tracée sur la surface donnée et ayant pour l'une de ses équations $Q - Q' = 0$, pour arriver à une autre ligne tracée sur la même surface et ayant pour l'une de ses équations $Q - Q'' = 0$, (Q' et Q'' sont deux constantes) ces points arrivés à la seconde ligne y seront tous animés d'une même vîtesse $V'' = \{ V'^2 + 2(Q'' - Q') \}^{\frac{1}{2}}$.

1020. En conservant la même hypothèse sur l'expression . . . . . . $Xdx + Ydy + Zdz$, on arrive à l'équation

$$\delta \int v\, ds = 0$$

qui vérifie le principe de la moindre action, lorsque le corps est assujetti à se mouvoir sur une surface donnée, et dans l'hypothèse où les quantités variées $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, se rapportent toujours à un point de la surface courbe, c'est-à-dire dans l'hypothèse où on ne compare la courbe parcourue qu'à d'autres courbes dont les traces, infiniment voisines de la sienne, se trouvent sur la surface donnée. En effet, l'équation (3) de l'art. 1018 conduit à une valeur de $\delta(v\, ds)$ déjà donnée art. 923; et substituant, dans le terme . . . .

$\Gamma dt\,(dz \cos. n''' - dy \cos. n'' - dx \cos. n')$ de cette valeur, les expressions de cos. n', cos. n'', cos. n''', qu'on trouve au même article 1018, le terme dont il s'agit devient $\frac{\Gamma dt}{\Omega}\,(p\delta x + q\delta y + r\delta z)$, ou $\frac{\Gamma dt}{\Omega}\cdot \delta K$, les coëfficients p, q et r étant les mêmes, soit qu'on fasse varier par d, soit qu'on fasse varier par δ; mais on a $K=0$, $dK=0$, $\delta K=0$, donc le terme $\Gamma dt\,(dz \cos. n''' - dy \cos. n'' - dx \cos. n')$ est nul, et la valeur de $\delta\,(v ds)$ devient identique avec celle de l'art. 844 applicable au mouvement libre, de laquelle on a déduit l'équation $\delta \int v\, ds = 0$.

Ainsi les équations du mouvement libre d'un point matériel et celles de son mouvement sur une surface donnée, vérifient également le principe de la *moindre action*, en ayant égard aux restrictions que comporte le second cas ; j'ai fait voir, article 923, que le mouvement sur une courbe donnée ne satisfesait point à ce principe, ce qui tient, ainsi que je l'ai expliqué à l'art. cité, à l'expression $\Gamma dt\,(p\delta x + q\delta y + r\delta z)$ qui n'existe pas dans l'analyse relative au mouvement libre, où on a $\Gamma = 0$; cette expression est commune à l'analyse du mouvement sur une ligne et à celle du mouvement sur une surface, et cependant les résultats fournis par l'une et l'autre analyse sont différents parceque, dans la première, les variations δx, δy, δz n'étant liées par aucune relation, chacune d'elle est arbitraire, ce qui ne permet pas de faire .... $p\delta x + q\delta y + r\delta z = 0$, au lieu que dans la seconde, ces variations sont liées par la relation $p\delta x + q\delta y + r\delta z = 0$, qui dérive de l'équation $K=0$ de la surface sur laquelle le mobile est assujetti à se mouvoir.

1021. Lorsque le point matériel assujetti à se mouvoir sur une surface donnée, ne doit son mouvement qu'à une impulsion initiale, sa vîtesse est constante (art. 1018) et l'équation $\delta \int v\, ds = 0$ devient $\delta \int ds = 0$, ou $s = minimum$; l'arc de courbe parcouru entre deux points déterminé est le plus petit de tous ceux qu'on peut tracer, entre les mêmes points, sur la surface donnée. L'équation de cette surface peut être prise pour une de celles qui déterminent la trace de la courbe dont l'arc minimum fait partie ; et si on combine cette équation avec celle par laquelle on exprime généralement que la longueur d'un arc de courbe tracé, entre deux points, sur une surface quelconque, est un minimum, la trajectoire sera complétement connue. La question se réduit donc à trouver l'équation de condition qui rend $s = minimum$, et je saisis,

avec empressement, cette occasion de donner aux élèves un nouvel exemple de l'application des formules de la méthode des *variations* démontrées article 991 et suivants.

L'équation $s = minimum$ revient à la suivante

$$\delta \int (dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0 \text{ ou } \int \delta\, (dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0$$

la fonction U de l'art. 993 est donc représentée ici par $dx^2 + dy^2 + dz^2$ et on a

$$\delta U = \frac{dx\delta.dx + dy\delta.dy + dz\delta.dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

cette valeur comparée avec l'expression générale de δU, art. 991, donne, en écrivant pour abréger, au lieu de $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, sa valeur ds

$$p = 0\,;\ p' = \frac{dx}{ds}\,;\ p'' = 0\,;\ \text{etc.}$$

$$q = 0\,;\ q' = \frac{dy}{ds}\,;\ q'' = 0\,;\ \text{etc.}$$

$$r = 0\,;\ r' = \frac{dz}{ds}\,;\ r'' = 0\,;\ \text{etc.}$$

et l'équation de l'article 993 devient

$$\int \delta U = \int - (dp' + dq' + dr') = 0$$

On ne doit avoir aucun égard aux autres termes de cette équation parce-que les limites de l'intégrale $\int \delta U$ sont ici deux points fixes.

S'il ne s'agissait que de trouver l'équation de la ligne la plus courte entre deux points fixes de l'espace, l'analyse serait fort simple, car δx, δy, δz étant alors des variations entièrement indépendantes, on aurait

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right) = 0\,;\ d\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0\,;\ d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0$$

du deuxième membre de l'équation de l'article 993, puisqu'il existe une relation entre δx, δy et δz, et il faut poser l'équation collective

$$(1) \ldots\ldots \int(-dp'\delta x - dq'\delta y - dr'\delta z) = 0$$

dans laquelle substituant, pour δz, sa valeur déduite de (1), on aura

$$(3) \ldots\ldots -dp'\delta x - dq'\delta y - dr'(\alpha\delta x + \beta\delta y) = 0$$

δx et δy doivent, dans cette dernière équation, être considérées comme indépendantes, et les égalités à zéro des facteurs qui multiplient respectivement ces variations donnent,

$$dp' + \alpha dr' = 0\ ;\quad dq' + \beta dr' = 0$$

ou en remplaçant p', q' et r' par leurs valeurs

$$(4) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} d\left(\dfrac{dx}{ds}\right) + \alpha . d\left(\dfrac{dz}{ds}\right) = 0\ ; \\ d\left(\dfrac{dy}{ds}\right) + \beta\, d\left(\dfrac{dz}{ds}\right) = 0 \end{cases}$$

L'équation de la surface sur laquelle le point matériel est assujetti à se mouvoir, et celle qu'on obtient par sa combinaison avec l'une quelconque des deux précédentes, déterminent complétement la courbe cherchée.

1022. Si on prend dx pour différentielle constante, et qu'on élimine dds entre les deux équations (4), ds s'éliminera de soi même et on obtiendra la suivante que j'ai donnée, art. 120 de ma *mécanique philosophique*, et qui tient lieu de l'une ou de l'autre de ces équations (4) pour exprimer la condition générale cherchée.

$$(1) \ldots\ldots\ldots \frac{ddz}{ddy} = \frac{dx + \alpha dz}{\alpha dy - \beta dx}\ .$$

et on trouvera, par la géométrie analytique, en appellant R le rayon de courbure de la trajectoire, la valeur

$$(2) \ldots\ldots\ldots R = \frac{ds^2\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}{d\alpha dx + d\beta dy}$$

Il ne faut pas perdre de vue que dx est prise pour différentielle constante.

1023. Voici un moyen fort simple de se faire une idée nette de la génération de la courbe du *minimum* déterminée dans l'art. précédent, ou de la trajectoire que décrit un mobile sur une surface quelconque

par le seul effet d'une impulsion initiale ; qu'on imagine deux éléments consécutifs ds et ds' de cette trajectoire pris arbitrairement, que ds soit prolongé d'une longueur infiniment petite $d\tau$, qui sera une portion élémentaire de la tangente dirigée suivant ce même élément ds, et que par l'extrémité de $d\tau$, on abaisse une perpendiculaire sur la surface courbe, le pied de cette perpendiculaire se trouvera, ou sur la direction de ds', ou à son extrémité suivant le mode de variation auquel s et τ seront assujettis. On voit, par cette génération que deux éléments consécutifs de la trajectoire sont dans un même plan normal (ce qui, par la géométrie analytique, conduit aux équations (1) et (2) de l'art. précédent) et c'est ce dont on pouvait s'assurer d'avance par un raisonnement immédiat, d'après la condition du mouvement de laquelle il résulte que la puissance représentant la résistance de la surface est toujours normale à cette surface ; si on veut mettre, dans ce raisonnement, toute la rigueur exigible, on observera que le mobile partant de l'extrémité de ds, arrive à une distance du pied de la normale, abaissée de l'extrémité de $d\tau$, mesurée par un infiniment petit du 2e. ordre, ce qui occasionne, à l'extrémité d'un arc fini, une déviation mesurée par un infiniment petit du premier ordre. Ainsi, la direction, sur la surface, d'un seul des éléments de la courbe, détermine celle de tous les autres éléments.

1024. Je remarque, en passant, que cette courbe est aussi celle suivant laquelle se plie un fil, parfaitement flexible, étendu sur la surface courbe, et tiré par deux forces égales agissant, en sens opposés, tangentiellement à deux éléments de cette surface. En effet on voit, sur-le-champ, (le frottement étant supposé nul) que deux éléments quelconques [redacted]

roïde, par le seul effet d'une impulsion initiale, perpendiculaire à un méridien d'un des points duquel il serait supposé partir.

Détermination générale de la pression qu'exerce, contre une surface courbe, un point matériel sollicité par des puissances quelconques et assujetti à se mouvoir sur cette surface.

1026. Soit, (1) .... $dz = pdx + qdy$
l'équation de la courbe sur laquelle le mobile est assujetti à se mouvoir, on aura, en prenant dx pour différentielle constante,

(2) ...... $ddz = qddy + dpdx + dqdy$

les équations de l'article 1017 donnent, en effectuant les différentiations des premiers membres, et substituant pour cos. n', cos. n'', cos. n''', leurs valeurs respectives

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

tirées de la géométrie analytique,

$$\frac{-dx\,ddt}{dt^3} = X - \frac{\Gamma p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\frac{dt\,ddy - dy\,ddt}{dt^3} = Y - \frac{\Gamma q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\frac{dt\,ddz - dz\,ddt}{dt^3} = Z + \frac{\Gamma}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

multipliant la 1re. de ces équations par $-p$, la 2e. par $-q$, la 3e. par 1, faisant, membre à membre, la somme des trois équations produits, et remarquant que ddt, dans cette somme, est multiplié par $-dz + pdx + qdy$ c'est-à-dire par une quantité nulle en vertu de l'équation (1), on aura $\dfrac{ddz - qddy}{dt^2} = Z - pX - qY + \Gamma\sqrt{1+p^2+q^2}$
substituant pour ddz sa valeur $dpdx + dqdy + qddy$ et pour dt^2 sa valeur $\dfrac{ds^2}{v^2}$ (la vîtesse est désignée par v) on a

(3) ..... $\Gamma = \dfrac{dpdx + dqdy}{ds^2\sqrt{1+p^2+q^2}}\,v^2 + \dfrac{pX + qY - Z}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$

Les deux termes de cette valeur de la pression totale Γ dépendent, le premier de la seule vîtesse et le second de l'action des puissances, ainsi qu'on a du le prévoir d'après les explications que j'ai données en

plusieurs endroits de cet ouvrage. Le terme $\frac{dpdx+dqdy}{ds^2\sqrt{1+p^2+q^2}}v^2$ exprime donc ce que nous avons appelé *force centrifuge ;* on voit que ce terme est égal au quarré de la vîtesse divisé par le second membre de l'équation (2) de l'art. 1022, les coëfficients p et q ayant, ici, la même signification que α et 6 à l'art. cité.

Application de la théorie démontrée dans le chapitre précédent, à la recherche des lois du mouvement d'un point matériel pesant, assujetti à se mouvoir sur une surface sphérique. Pendule à oscillations coniques.

1027. Concevons, pour fixer les idées, une sphère creuse, immobile dans l'espace; faisons passer un plan horizontal par son centre et suprimons la demi-sphère qui est au-dessus de ce plan, la surface concave de la demi-sphère inférieure sera celle sur laquelle le point matériel, que je considère comme une sphère d'un diamètre infiniment petit, sera censé se mouvoir.

Je place l'origine des x, y et z au centre de la surface sphérique concave ; le plan horizontal passant par ce centre est celui des x, y, et je prends, pour plan des xz, le plan vertical passant par le même centre et par le point de départ du mobile, celui où ce mobile se trouve lorsque $t=0$; les z positifs se comptent du haut en bas.

Au premier instant du mouvement, c'est-à-dire lorsque $t=0$, le mobile reçoit une impulsion capable de lui imprimer une vîtesse finie et à laquelle on peut supposer une direction quelconque assujettie à la seule condition de ne pas écarter le mobile de la surface sphérique; mais si on conçoit cette force impulsive initiale comme décomposée en deux

au point de départ du mobile, et cherchant d'abord l'expression générale de la vîtesse, applicable à un instant quelconque du mouvement, je déduis immédiatement cette expression de l'équation (3) de l'article 1017, en y introduisant les valeurs $X=0$, $Y=0$, $Z=g$, (je continue à représenter par g la force accélératrice de la pesanteur) données par l'état de la question. On a, par ces substitutions, $v^2=U^2+2g\int dz$, et faisant attention que, d'après les valeurs initiales $v=I$ et $z=r\cos.f$, la constante $U^2=I^2-2gr\cos.f$, on a

$$(1) \;\ldots\ldots\; v^2=I^2+2g(z-r\cos.f)$$

ou, si la vîtesse initiale I est due à la hauteur H

$$(2) \;\ldots\ldots\; v^2=2g(z+H-r\cos.f)$$

1029. Je vais maintenant examiner ce que devient la pression totale Γ dont j'ai donné la valeur générale dans l'article 1026 équation (3); si on fait attention aux positions différentes de la convexité de la surface par rapport au plan xy dans le cas général traité à l'article cité, et dans le cas particulier dont il s'agit ici, (voyez l'article 1017), il sera manifeste que le terme du 2e. membre de l'équation (3), article 1026, qui exprime la pression opposée et égale à la force centrifuge, a pour valeur $-\frac{v^2}{r}$; introduisant ensuite, dans l'autre terme de la même équation, les valeurs $X=0$, $Y=0$, $Z=g$, ce terme deviendra $\frac{-g}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$; enfin l'équation $dz+\frac{y}{z}dy+\frac{x}{z}dx=0$, de la surface, comparée avec l'équation générale $dz=qdy+pdz=0$, employée article 1026, donne $p=-\frac{x}{z}$, $q=-\frac{y}{z}$ ce qui réduit le second terme de l'équation (3) de cet article à $\frac{-gz}{r}$ et on a la valeur complète

$$(1) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; \Gamma=-\left(\frac{v^2}{r}+\frac{gz}{r}\right)$$

Substituant, pour v^2, sa valeur donnée à l'article précédent, on a

$$\Gamma=-\frac{g}{r}(3z+2H-2r\cos.f).$$

1030. En prenant dt pour différentielle constante, effectuant les différentiations indiquées des premiers membres des équations (1) article 1017, substituant pour X, Y, Γ, n', n'', les valeurs qui conviennent au problême particulier dont il s'agit ici, multipliant la 1re. par y, la

2°. par x, et retranchant les équations produits l'une de l'autre, on a

$$(1) \ldots\ldots \frac{yddx - xddy}{dt^2} = 0$$

mais $yddx - xddy = d(ydx - xdy)$, donc, en intégrant,

$$(2) \ldots\ldots\ldots ydx - xdy = Cdt$$

C étant la constante arbitraire qui se détermine par les valeurs initiales des coordonnées x et y et des vîtesses $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, ces vîtesses étant données lorsqu'on connaît les angles formés par l'impulsion initiale et par chacun des trois axes coordonnés, l'équation (2) est celle que fournirait le principe des aires; $\frac{1}{2}(ydx - xdy)$ est l'aire instantanée décrite par la projection orthogonale du rayon vecteur sur le plan xy.

1031. La solution du problême considéré sous le point de vue le plus général, dépend de l'intégration des trois équations suivantes, savoir :

L'équation des aires, démontrée dans l'article précédent,

$$(1) \ldots\ldots\ldots \frac{ydx - xdy}{dt} = C$$

celle qui donne la vîtesse, art. 1028, et qui, en y substituant, à v^2, son équivalent $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$ devient

$$(2) \ldots\ldots \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2g(z + H - r\cos. f)$$

et celle de la surface sur laquelle le point matériel est assujetti à se mouvoir

$$(3) \ldots\ldots xdx + ydy + zdz = 0$$

1032. L'équation (1) de l'art. précédent, $ydx - xdy = Cdt$, et celle

[redacted]

$$(a) \ldots\ldots \frac{dz}{dt} = \frac{1}{r}\sqrt{2g(r^2-z^2)(z+H-r\cos.f)-C^2}$$

en égalant à zéro la quantité qui est sous le radical on aura les valeurs de z qui rendent nulle la valeur de $\frac{dz}{dt}$, c'est-à-dire qui indiquent à quelles distances du plan xy l'élément de courbe parcouru par le mobile est parallèle à ce plan, ou horizontal, ce qui est la propriété d'un maximum ou d'un minimum. On voit qu'il doit exister trois valeurs de z propres à rendre $\frac{dz}{dt}$ nul ; ainsi il y en a au moins une de réelle, mais il est manifeste, par la nature du problême, que z doit avoir un maximum et un minimum, donc deux des valeurs dont nous venons de parler, sont réelles, et par conséquent elles le sont toutes trois.

1033. En faisant, pour abréger, $2g(H-r\cos.f)=G$ posons l'équation hypothétique

$$(r^2-z^2)(2gz+G)-C^2=(z-a)(b-z)(2gz+c)$$

dont les constantes a, b, c se déterminent par les équations

$$c=\frac{2g(r^2+ab)}{a+b}\ ;\ G=\frac{2g(r^2-a^2-ab-b^2)}{a+b}\ ;\ C^2=\frac{2g(r^2-a^2)(r^2-b^2)}{a+b}$$

quantité a sera la plus petite valeur de z, b sera la plus grande, et ces eux quantités doivent être regardées comme données. Faisant de plus

$$\theta=\sqrt{\frac{a-z}{a-b}} \quad \text{d'où} \quad (1) \ldots\ldots z=a\cos.^2\theta+b\sin.^2\theta$$

roduisant les quantités a, b, c, G et θ dans l'équation

$$(2) \ldots\ldots dt=\frac{r\,dz}{\sqrt{2g(r^2-z^2)(z+H-r\cos.f)-C^2}}$$

uite de l'équation (a) de l'article précédent, et faisant, pour abréger,

$$\frac{\sqrt{2(a+b)}}{\sqrt{g\{(a+b)^2+r^2-b^2\}}}=\varepsilon\ ;\quad \frac{a^2-b^2}{(a+b)^2+r^2-b^2}=\eta^2$$

obtient la valeur $(3) \ldots\ldots dt=\frac{r\varepsilon\,d\theta}{\sqrt{1-\eta^2\sin.^2\theta}}$

oit χ l'angle formé par l'axe des x et par la projection orthogonale yon vecteur sur le plan xy, le double de l'aire élémentaire ins-née engendrée sur le même plan, par cette projection, aura pour r, $(r^2-z^2)\,d\chi$; et comme cette aire double est aussi égale à $-xdy$ on aura $ydx-xdy=(r^2-z^2)\,d\chi$ et en

substituant à $ydx - xdy$ sa valeur tirée de l'équation (2) de l'art. 1030

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots d\chi = \frac{Cdt}{r^2 - z^2}$$

Substituant, dans cette équation, pour dt sa valeur en fonction de θ, donnée par l'équation (3) ci-dessus, et pour z sa valeur donnée par l'équation (1) et supposant, dans cet état, les équations (3) et (4) intégrées, t et χ seraient exprimées en fonction de θ; et comme l'équation (1) donne aussi z en fonction de θ, on aurait χ et z en fonction de t, au moyen de quoi on pourrait déterminer la position absolue du mobile à un instant quelconque. Si on veut l'angle formé par le rayon vecteur et par l'axe des z, on aura $\frac{z}{r}$ = cosinus de cet angle.

1034. Le problême résolu dans les articles précédents, est évidemment le même que celui par lequel on se proposerait de déterminer le mouvement d'un pendule simple, auquel on aurait imprimé une vîtesse initiale dans une direction inclinée sur le plan vertical passant par le point de suspension et par le fil; ce pendule décrirait, en formant des oscillations coniques, une courbe qu'on pourrait concevoir tracée sur une sphère concave, d'un rayon égal à la longueur du fil. Je me contente d'avoir posé les équations fondamentales du problême, car il n'est pas nécessaire, pour l'objet d'instruction que j'ai en vue, d'entrer ici dans des détails analytiques correspondants à ceux que j'ai donné, article 949 et suivants, lorsqu'il s'agissait du pendule simple ordinaire, dont la théorie a des applications utiles à l'Astronomie, la Physique, la Géodésie etc.

Il n'est pas difficile d'obtenir une intégralle définie de l'équation (3) de l'art. précédent entre les limites $\theta = 0$ et $\theta = \frac{1}{2}\pi$ qui donnerait le [redacted]

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE DYNAMIQUE.

SECTION III.

THÉORIE GÉNÉRALE DU MOUVEMENT SOIT D'UN SYSTÊME DE POINTS MATÉRIELS, SOIT D'UN CORPS SOLIDE CONTINU, EN AYANT ÉGARD A LEUR ÉTENDUE ET A LEUR FORME, ET EN SUPPOSANT LEUR FORME INVARIABLE.

Observations préliminaires. Principe général du mouvement applicable, sans exception, à tous les problêmes de Dynamique.

1035. J'AI introduit successivement, dans les leçons de dynamique qui précèdent, les notions et les propriétés abstraites qu'on peut regarder comme les matériaux primitifs de la science de l'équilibre et du mouvement, à l'exception de deux, qui sont, l'*étendue* et la *figure ;* il est temps d'ajouter ces deux propriétés à celles que j'ai employées jusqu'à présent ; de nouvelles combinaisons, qui peuvent être variées à l'infini, vont fournir matière à des recherches, souvent difficiles, mais toujours intéressantes et utiles.

Je suivrai, en traitant du mouvement des corps ou systêmes de corps,

étendus et *figurés*, le même plan d'exposition auquel j'ai assujéti la théorie de l'*équilibre* de ces corps, en considérant d'abord la forme comme *invariable*, et supposant ensuite qu'elle peut varier sous diverses conditions ; les questions, relatives à cette dernière hypothèse, constituent l'objet spécial de la quatrième section, mais je traiterai quelques problêmes qui s'y rapportent, dans les premiers chapitres de la présente section, afin de familiariser les élèves avec l'usage du principe général du mouvement.

Je m'attacherai à bien faire concevoir aux élèves la marche générale de raisonnement et d'analyse qu'il faut suivre dans les études nouvelles auxquelles nous allons nous livrer ; ils devront, d'abord, revoir ce que j'ai dit précédemment (première partie du cours) sur les systêmes *étendus*, en général, et sur les *équations de conditions* auxquelles leurs *formes* sont assujéties, après quoi ils donneront une attention particulière au principe fondamental dont je vais faire l'exposition et qui est applicable, sans exception, à tous les problêmes de dynamique.

1036. Quels que soient la figure (variable ou non), l'étendue et le mouvement d'un corps ou d'un systême de corps, la vîtesse, désignée par u, de l'un quelconque des points matériels, désigné par m, de ce corps ou de ce systême, doit être, à un instant déterminé, modifiée par deux causes, savoir : 1°. Par l'action d'une force (la résultante de toutes celles qui sont censées appliquées à la masse m) agissant dans une direction qu'il faut, en général, supposer différente de la direction de u, et qui est capable d'imprimer à m une vîtesse finie ou infiniment petite, désignée par ϖ, 2°. par la liaison du point matériel m aux autres points matériels du systême.

Or, quelque soit la loi de cette dépendance, on peut toujours imaginer une quantité de mouvement km, laquelle composée avec ρm, donnerait rm pour résultante, de telle manière que ρm et km, appliquées dans les directions qu'elles doivent avoir, remplaceraient les quantités de mouvement um et ωm, ou leur résultante rm.

On a donc, pour les différents points matériels m', m'', etc. du corps ou du système, des couples de composantes

$$\rho' m', \ k' m' ; \ \rho'' m'', \ k'' m'' \text{ etc.}$$

équivalentes aux quantités de mouvement

$$u' m', \ \omega' m' ; \ u'' m'', \ \omega'' m'', \text{ etc.}$$

mais, par hypothèse, $\rho' m'$, $\rho'' m''$, etc. sont les seules qui doivent avoir lieu, donc les autres, savoir $k' m'$, $k'' m''$, etc. se détruisent ou se font équilibre

Ayant les expressions analytiques, connues ou inconnues, de $k' m'$, $k'' m''$, etc.; on pourra, d'après la nature du système et les principes de la statique, énoncer, par un nombre convenable d'équations, les conditions de l'équilibre entre $k' m'$, $k'' m''$, etc.; et ces équations d'équilibre, qui renfermeront les inconnues du mouvement, serviront à en déterminer tous les phénomènes.

1037. On évitera des décompositions, souvent pénibles et embarrassantes, en établissant immédiatement les conditions de l'équilibre entre les quantités de mouvement

$$u' m', \ \omega' m' ; \ u'' m'', \ \omega'' m'', \text{ etc.}$$

prises dans les directions qu'elles doivent avoir, et les quantités de mouvement qui ont lieu.

$$\rho' m' ; \ \rho'' m'' ; \text{ etc.}$$

prises dans des directions contraires à celles qu'elles doivent avoir. En effet, il est manifeste que si les quantités de mouvement $\rho' m'$, $\rho'' m''$, etc. qui ont lieu étaient détruites par des quantités de mouvement, égales et directement opposées, $-\rho' m'$, $-\rho'' m''$, etc. le corps ou le système serait réduit à l'état de repos; donc les quantités de mouvement $u' m'$, $\omega' m'$; $u'' m''$, $\omega'' m''$, etc., tant existantes qu'imprimées, à l'instant où nous considérons l'état du système, seraient détruites, donc il doit y avoir équilibre entre ces dernières et les quantités de mouvement $-\rho' m'$, $-\rho'' m''$, etc.

Le procédé que je viens d'indiquer, ne diffère pas, dans le fond, de celui de l'article précédent, ils se déduisent réciproquement l'un de l'autre, et chacun d'eux n'est que la conséquence, différemment énoncée, des mêmes considérations générales sur l'effet de la liaison des parties d'un système.

1038. J'ai supposé, en énonçant les règles précédentes, et afin de ne rien omettre de ce qui constituait l'état de mouvement du système, qu'on faisait entrer, dans les équations fournies par le principe général, les vîtesses finies actuelles des différents corps ou points matériels de ce système, lesquelles doivent, en effet, y être introduites, et s'y conserver, lorsque les changements instantanés de mouvement en dépendent ou en sont fonction; c'est ce qui arrive dans les phénomènes du choc des corps auxquels nous ferons les premières applications du principe général. Mais lorsque les puissances, qui font varier les mouvements des points du système, sont indépendantes des vîtesses actuelles de ces points, les inconnues du problême peuvent se déduire, d'après le principe général, des équations qui expriment les conditions d'équilibre entre les *forces motrices* imprimées et celles qui ont lieu, ces dernières étant prises avec des sens d'actions opposés à ceux suivant lesquels elles agissent réellement; il est évident, en effet, que si on faisait agir, en même temps, ces deux systêmes de *forces motrices*, dans les directions que je leur attribue, aucune variation de vîtesse n'aurait lieu, l'état de mouvement du système de corps ne changerait pas, et, qu'ainsi, les conditions de l'équilibre existeraient entre les deux systêmes de forces. Rien n'empêche, cependant, qu'on n'introduise, si on le veut, les vîtesses finies actuelles dans les équations d'équilibre, mais elles s'éliminent

Exemples de l'application du principe général du mouvement, au choc des corps jouissant d'un degré quelconque d'élasticité.

1039. Je vais faire une première application du principe général du mouvement aux problêmes fondamentaux résolus article 758 et suivants. Ces problêmes se rapportent aux phénomènes du choc de deux points matériels qui se meuvent sur une même ligne droite ; leurs distances sont, en général, variables, soit avant soit après le choc, mais le cas de la parfaite dureté, peut être ramené à celui des systêmes de forme invariable, en supposant que les corps sont en contact au moment où on leur imprime les vîtesses en vertu desquelles ils doivent agir l'un sur l'autre, pour prendre, après ces actions réciproques, une vîtesse commune. On y ramène aussi, fort aisément, comme on le verra ci-après, le cas de l'élasticité de degré quelconque.

Soient, comme aux articles 758 et suivants, M' et M'' les masses de deux corps, ou points matériels parfaitement durs, qui se meuvent, sur une même ligne droite, avec des vîtesses respectives V' et $\pm V''$ de manière à se rencontrer, les quantités de mouvement $V'M'$ et $\pm V''M''$ étant supposées telles que la vîtesse commune v, après le choc, ait lieu dans le sens de V'. Si on suppose que les deux corps soient en contact au moment où ils reçoivent les vîtesses V' et V'', ce qui ne change rien au problême et aux conséquences à tirer de sa solution, on a article 1036, $u'=0$, $u''=0$; $\omega'=V'$, $\omega''=V''$; $\rho'=\rho''=v$ et d'après le principe général, article 1037, l'équilibre devra exister entre les quantités de mouvement $V'M'$, $\pm W''M''$, $-vM'$, $-vM''$, ou leurs équivalentes $(V'-v)M'$, et $(\pm V''-v)M''$, les mouvements ayant lieu sur une même ligne droite, ce qui donne, article 756, l'équation $(V'-v)M'+(\pm V''-v)M''=0$, d'où l'on déduit celle de l'art. 758.

1040. On a vu, article 762 que cette équation avait lieu entre deux corps jouissant d'un degré quelconque d'élasticité, avant que, par l'effet de cette élasticité, les corps se séparassent ; ils ont donc, au moment où cet effet se produit, une vîtesse commune, et, d'après ce qui est expliqué aux articles 762 et 763, chaque corps, en vertu de son élasticité, a une tendance à s'éloigner de l'autre avec une vîtesse égale à la partie de la quantité de mouvement qu'il a perdue, en le choquant, divisée par sa masse, et dont le rapport à la quantité totale a été sup-

posé celui de $n : 1$, le nombre n étant < 1 ; on a donc, en considérant isolément le corps M', au moment où l'élasticité produit son effet, faisant attention que la quantité de mouvement consommée par ce corps dans le choc, laquelle peut être considérée, en ce moment, comme une impulsion qui tend à lui donner un mouvement rétrograde, est $M'(V-v)$, on a, dis-je, $u=v$, $\varpi=-n(V'-v)$, $\rho=v'$ (Je désigne par v', comme aux articles cités, la vîtesse finale de M') et, d'après l'article 1037, on obtient l'équation d'équilibre . . . . $-M'v'+M'v-M'n(V'-v)=0$, de laquelle on déduit la première équation (1) de l'article 763.

On a, pour le corps M'', que l'impulsion représentative de l'effet de l'élasticité, pousse dans le sens suivant lequel le mouvement actuel du système animé de la vîtesse v, a lieu, $u=v$, $\varpi=n(v\mp V'')$, $\rho=w'$ (Je désigne par w', la vîtesse finale de M'') ce qui donne l'équation d'équilibre $-M''w'+vM''+M''n(v\mp V'')=0$, ou la seconde équation (1) de l'article 763.

On remarquera que les raisonnements fondés sur l'hypothèse du plan mobile, des articles 760 et 762, reviennent, au fond, à ceux que nous venons de faire immédiatement d'après le principe général du mouvement, et conduisent aux mêmes équations d'équilibre obtenues dans le présent article et dans le précédent. Les questions que nous allons traiter, feront sentir, plus particulièrement, le grand avantage qu'a l'emploi du principe général, sur les divers artifices de raisonnement dont on peut s'aider pour les solutions des problêmes.

Mouvement de deux corps posés sur deux plans inclinés adossés, en suppo-

[redacted]

d'ailleurs le système disposé de manière que chaque fil soit parallèle au plan sur lequel se meut le corps que tient ce fil, on n'a aucun égard aux déviations latérales dues aux enroulements et aux déroulements, et les masses des fils et du treuil sont censées n'avoir pas une influence sensible sur le mouvement.

Désignant par A et a, respectivement, le rayon de la roue du treuil et celui de l'arbre, et conservant d'ailleurs la notation des articles cités, je remarque qu'après le temps t, la vîtesse du corps m'' ne sera pas v comme celle du corps m', mais $\frac{a}{A}v$; à ce même instant, le corps m', animé de la vîtesse v, éprouve, en outre, de la part de la pesanteur, une action qui, s'il n'était pas lié à l'autre corps, ajouterait, dans le sens de son mouvement actuel, à sa vîtesse v, une vîtesse élémentaire $gdt \sin. \theta'$, ensorte que, sans cette circonstance, la vîtesse v deviendrait $v + gdt \sin. \theta'$, mais, à cause de la liaison des deux corps, l'incrément effectif dv diffère de l'incrément hypothétique $gdt \sin. \theta'$.

Pareillement, sans la liaison dont je viens de parler, la vîtesse actuelle $\frac{a}{A}v$, de M'', deviendrait $\frac{a}{A}v - gdt \sin. \theta''$, et sa variation réelle est une quantité élémentaire $\frac{a}{A}dv$ différente de $gdt \sin. \theta''$, soit par la quantité soit par le signe.

Ainsi, d'une part, les quantités de mouvement, tant actuelles qu'imprimées, au bout du temps t, sont, pour le corps m', $m'(v + gdt \sin. \theta')$. et, pour le corps m'', $m''\left(\frac{a}{A}v - gdt \sin. \theta''\right)$.

D'une autre part les quantités de mouvement qui auront effectivement lieu, eu égard à la liaison des parties du système, seront $m'(v + dv)$, $\frac{a}{A}m''(v + dv)$, et, d'après le principe général, article 1037, ces dernières, prises dans un sens contraire à celui de leurs actions réelles, doivent faire équilibre aux premières, et les conditions de cet équilibre, d'après le mode de composition du système et les principes posés dans la première partie du cours, s'énoncent, articles 368 et suivants, par une équation unique exprimant l'égalité à zéro de la somme des moments par rapport à l'axe fixe, on a donc, en faisant les réductions relatives aux termes qui se détruisent, lesquelles réductions font disparaître les

termes renfermant la vîtesse finie actuelle v, ainsi que cela doit être, article 1038,

$$Am'(gdt\sin.\theta'-dv)-am''\left(gdt\sin.\theta''+\frac{a}{A}\,dv\right)=0$$

d'où on déduit la valeur suivante de la *force accélératrice* du corps m'

(1).. $\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}=\dfrac{Ag(Am'\sin.\theta'-am''\sin.\theta'')}{A^2m'+a^2m''} \\ \text{la force accélératrice du corps } m'' \text{ étant égale au produit de} \\ \text{celle qu'on vient de trouver par le nombre } \dfrac{a}{A}\text{, c'est-à-dire} \\ \text{ayant pour valeur} \\ \dfrac{dv'}{dt}=\dfrac{ag(Am'\sin.\theta'-am''\sin.\theta'')}{A^2m'+a^2m''} \end{cases}$ La vîtesse de m' est désignée par $v'=\dfrac{a}{A}v$.

1042. Si on imagine un point placé à l'unité de distance de l'axe du treuil, et lié à ce treuil, de manière à avoir un mouvement de rotation commun avec lui, la vîtesse du point dont il s'agit sera $\frac{v}{A}$ ou $\frac{v'}{a}$, et au bout du temps t cette vîtesse aura pour valeur $\frac{gt(Am'\,s.\theta'-am''\,s.\theta'')}{A^2m'+a^2m''}$ la vîtesse initiale, ou correspondante à $t=0$ étant supposée nulle ; c'est à l'égard du treuil, l'expression de ce que nous avons appelé, article 897, *vîtesse angulaire ;* la *force accélératrice angulaire* se déduit de l'une ou l'autre des équations (1), en divisant chaque membre, ou par A ou par a, et a pour valeur, $\frac{g(Am'\sin.\theta'-am''\sin.\theta'')}{A^2m'+a^2m''}$ c'est-

[redacted]

assimilés à des forces ayant pour expressions $fm'g$ cos. θ', $fm''g$ cos. θ'', (f étant la tangente de l'angle du frottement, ou le rapport du frottement à la pression), dont l'effet serait de diminuer les vîtesses actuelles v et v', et, en conséquence il faut, aux quantités de mouvement, tant actuelles qu'imprimées, $m'(v+gdt\,\text{sin.}\,\theta')$ et $m''\left(\frac{a}{A}v-gdt\,\text{sin.}\,\theta''\right)$ substituer $m'\{v+gdt(\text{s.}\,\theta'-f\text{c.}\,\theta')\}$ et $m''\left\{\frac{a}{A}v-gdt(\text{s.}\,\theta''+f\text{c.}\,\theta'')\right\}$, et on aura les valeurs de $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{dv'}{dt}$ applicables au cas dont il s'agit, en remplaçant simplement, dans les équations (1) de l'art. 1041, sin. θ' par sin. $\theta'-f$ cos. θ' et sin. θ'' par sin. $\theta''+f$ cos. θ''.

1044. La force accélératrice étant, pour chacun des cas examinés dans les trois articles précédents, égale au produit de la force accélératrice g, due à la pesanteur, par une quantité constante, le mouvement est uniformément varié, et les phénomènes de ce mouvement se détermineront en substituant, dans les formules données art. 696 et suivants, à g, le produit, de cette quantité g, par la constante dont nous venons de parler.

Mouvement de deux corps pesants suspendus respectivement à la roue et à l'arbre d'un treuil, en ayant égard à la masse du treuil et à celles des cordes.

1045. Le problême dont je vais donner la solution, dans ce chapitre, fournira aux élèves un sujet d'exercice fort instructif, et les conduira à des résultats extrêmement utiles par les conséquences qu'on en tire.

L'axe horizontal d'un treuil ayant une position fixe, et la machine pouvant tourner librement autour de cet axe, deux cordes pesantes, dont l'une s'enroule autour de la roue et l'autre autour de l'arbre, tiennent, respectivement, suspendus deux corps pesants, m' et m'', les masses de ces corps et leurs distances, au plan vertical passant par l'axe, étant telles que le corps m', suspendu à la roue, est prépondérant, et détermine, par sa descente, l'ascension du corps m'' suspendu à l'arbre. Or le poids de la partie verticale de la corde, qui tient le corps m' suspendu, s'ajoute au poids de ce corps pour faire monter, tant le corps m'', que la partie verticale de corde qui le tient suspendu à l'arbre; les lon-

gueurs et les poids de ces parties verticales varient continuellement, et des portions de corde, enroulées sur la roue et l'arbre, fournissent des *moments* par rapport à l'axe ; enfin la masse du treuil et des cordes qui l'enveloppent, consomment, pour leur mouvement de rotation, une certaine quantité de force motrice.

Il s'agit d'avoir égard à ces diverses circonstances dans la détermination des phénomènes du mouvement, et je vais d'abord donner des signes aux quantités qui entreront dans le calcul.

1046. Masse suspendue à la roue, et qu'on suppose prépondérante, représentée par . . . . m'

Masse suspendue à l'arbre et dont m' détermine l'ascension, par son poids . . . . m''

Masse de l'unité de longueur de la corde . . . . μ

Masse d'une des molécules, soit du treuil, soit des parties de cordes enroulées au premier instant du mouvement, laquelle masse est censée variable d'un point à l'autre du système . . . dm

Distance de la molécule dm à l'axe du treuil . . . . ρ

Rayon de la roue . . . . R

Rayon de l'arbre . . . . r

Distance au plan horizontal passant par l'axe commun de la roue et de l'arbre.	du corps m'	lorsque $t=0$	a
		au bout du temps t . . .	$a+z$
	du corps m''	lorsque $t=0$	b
		au bout du temps t . .	$b-\frac{r}{R}z$

Longueur absolue de l'arc décrit, depuis le commencement du mouvement, par un des | de la roue . . $R(2n\pi+\omega)$

[redacted]

Je suppose, pour plus de simplicité et pour fixer les idées, qu'on a, au premier instant du mouvement, $t=0$, $v=0$, $z=0$ et que, de plus, à ce premier instant, il y a un nombre exact de circonférences de cordes enroulées sur la roue et une demi-circonférence enroulée sur l'arbre au-dessus du plan horizontal passant par l'axe.

Au bout du temps t, toutes les parties du systême ont différentes vîtesses, dont les rapports, avec la vîtesse v du corps m', se déduisent du mode de composition de ce systême, et qui sont modifiées par la pesanteur, laquelle tend à imprimer aux points matériels animés de ces vîtesses, des quantités de mouvement élémentaires savoir,

1°. Corps m' et masse $\mu\,(a+z)$ de la partie verticale de la corde à laquelle il est suspendu . . $gdt\{m'+\mu(a+z)\}$

2°. Corps m'' et masse $\mu\left(b-\frac{r}{R}z\right)$ de la partie verticale de la corde à laquelle il est suspendu. $gdt\left\{m''+\mu\left(b-\frac{r}{A}z\right)\right\}$

3°. Masse du treuil et parties de cordes enroulées sur un nombre exact de circonférences, pour ce qui concerne la roue, et auxquelles il faut ajouter, pour ce qui concerne l'arbre, la demi-circonférence enroulée au premier instant du mouvement, le tout formant un systême sur lequel les actions de la pesanteur s'annullent réciproquement, ou qui peut être regardé comme non pesant. . . . . . . *zéro.*

4°. Longueur $R\,(2\pi-\omega)$ de corde enroulée sur la roue, et ne faisant pas partie de celle qui est enroulée sur un nombre exact de circonférences. . . $gdt.\,R\mu\,(2\pi-\omega)$

5°. Longueur $r\omega$ de corde enroulée sur l'arbre et se trouvant dans le même cas que la précédente, quant aux circonférences entières et à la demi-circonférence initiale. . . . . $gdt.\,r\mu\omega$

Les quantités de mouvement élémentaires qui ont lieu, et en vertu desquelles se produisent les variations effectives de vîtesses, sont :

1°. Corps m' et masse $\mu\,(a+z)$ de la partie verticale de la corde à laquelle il est suspendu. . . . $\{m'+\mu(a+z)\}\,dv$

2°. Corps m'' et masse $\mu\left(b-\frac{r}{R}z\right)$ de la partie verticale de la corde à laquelle il est suspendu. $\left\{m''+\mu\left(b-\frac{r}{R}z\right)\right\}\frac{r}{R}dv$

3°. Masse du treuil et des parties de corde qui se trouvaient enroulées au premier instant du mouvement, en supposant que cette masse n'ait pas varié, $\Sigma\left(\frac{\rho}{R} dv dm\right)$ qu'on peut mettre sous la forme $\frac{dv}{R}\,\Sigma(\rho dm)$, la différentielle dv, qui se rapporte au temps, et qui est une quantité commune à tous les éléments de masse dm, pouvant être mise hors du signe Σ, qui se rapporte à la composition géométrique et physique du Système.

Cette intégrale $\frac{dv}{R}\,\Sigma(\rho dm)$ doit être diminuée de la quantité $\mu R(2n\pi+\omega)\,dv$, et augmentée de la quantité $\mu r(2n\pi+\omega)\,\frac{r}{R}dv$, respectivement, pour la partie de corde qui s'est déroulée de la roue, et pour celle qui s'est enroulée sur l'arbre; et on a pour cette partie des quantités élémentaires de mouvement imprimées

$$\left\{\frac{\Sigma(\rho dm)}{R} - \mu(2n\pi+\omega)\left(R-\frac{r^2}{R}\right)\right\}dv = ..\left\{\Sigma(\rho dm) - \mu z\left(R-\frac{r^2}{R}\right)\right\}\frac{dv}{R}$$

en faisant attention que $2n\pi+\omega = \frac{z}{R}$.

[redacted]

$2R\sin.\frac{\omega}{2}$ et $2r\sin.\frac{\omega}{2}$. Le centre de gravité de $R(2\pi-\omega)$ est, art. 309,

à une distance de l'axe de la roue égale à $\frac{R.2R\sin.\frac{\omega}{2}}{R(2\pi-\omega)}$ ou à $\frac{2R\sin.\frac{\omega}{2}}{2\pi-\omega}$

et ce centre étant placé sur un rayon qui fait, avec l'horizon, un angle $=\frac{1}{2}(2\pi-\omega)$, sa distance au plan vertical passant par l'axe de rotation sera $\frac{2R\sin.\frac{\omega}{2}.\cos.\frac{2\pi-\omega}{2}}{2\pi-\omega}$, ou $-\frac{2R\sin.\frac{\omega}{2}\cos.\frac{\omega}{2}}{2\pi-\omega}$, ou $-\frac{R\sin.\omega}{2\pi-\omega}$, et le moment de la quantité de mouvement élémentaire $gdtR\mu(2\pi-\omega)$ sera $-gdt.R\mu(2\pi-\omega).\frac{R\sin.\omega}{2\pi-\omega}$, ou $-gdt.R^2\mu\sin.\omega$, on trouvera, par un raisonnement et un calcul semblables, que le moment de la quantité de mouvement élémentaire $gdt.r\mu\omega$, a pour valeur $gdt.r^2\mu\sin.\omega$.

D'après la manière dont la question est posée, et d'après les données initiales, le moment de la quantité de mouvement élémentaire $gdt\{m'+\mu(a+z)\}$ étant pris positivement, la somme des deux moments qu'on vient de trouver doit être négative ou positive, respectivement, suivant qu'on aura $\omega<\pi$ ou $\omega>\pi$, et, de plus, nulle dans le cas de $R=r$; ces conditions sont évidemment satisfaites par la valeur $-\mu(R^2-r^2)\,gdt\sin.\omega$; mais, vu l'égalité des longueurs z et $R(2n\pi+\omega)$ et des sinus des arcs $2n\pi+\omega$ et ω, on a $\sin.\omega=\sin.\frac{z}{R}$,

en prenant $\sin.\frac{z}{R}$ positivement si $z<R\pi$, ou négativement si $z>R\pi$; et la somme des deux moments ci-dessus déterminés devient

$-\mu(R^2-r^2)\,gdt\sin.\frac{z}{R}$.

1047. Ainsi l'équation d'équilibre à poser en vertu du principe général et d'après la nature du système sera

$$\left.\begin{array}{l} g\,dt\left[R\left\{m'+\mu(a+z)\right\}-r\left\{m''+\mu\left(b-\frac{r}{R}z\right)\right\}\right] \\ \qquad -g\,dt.\mu(R^2-r^2)\sin.\frac{z}{R} \\ -dv\left[R\left\{m'+\mu(a+z)\right\}+\frac{r^2}{R}\left\{m''+\mu\left(b-\frac{r}{R}z\right)\right\}\right] \\ -\frac{dv}{R}\left\{\Sigma(\rho^2 dm)-\mu z\left(R^2-\frac{r^3}{R}\right)\right\}\end{array}\right\}=0$$

tirant la valeur de $\frac{dv}{dt}$, réduisant et faisant, pour abréger

$m'+\mu a=p'; m''+\mu b=p''; \frac{(R^2+r^2)}{R}=k$; $(R^2-r^2)=n^2$ on a

$$(A)\ldots\frac{dv}{Rdt}=\frac{g\left\{Rp'-rp''+\mu\left(kz-n^2\sin.\frac{z}{R}\right)\right\}}{R^2p'+r^2p''+\Sigma(\rho^2 dm)}$$

telle est l'expression de la force accélératrice de m', qui n'est variable, qu'à raison du terme $\mu(kz-n^2\sin.\frac{z}{R})$, ou de l'introduction du poids de la corde dans le calcul, le terme $\Sigma(\rho^2 dm)$, qui se rapporte à la masse du treuil, exprimant une intégrale *définie*, ou une quantité déterminée et constante. Ainsi lorsque le poids μ de l'unité de longueur de la corde sera très-petit, le mouvement pourra être considéré comme un mouvement uniformément varié, même en ayant égard au poids du treuil.

[redacted]

1049. En mettant l'équation (A) sous la forme

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dw}{dt}-A\sin.\frac{z}{R},$$

on voit que, depuis la valeur $z=2Rn\pi$, jusqu'à la valeur $z=R(\pi+2n\pi)$, la quantité $A\sin.\frac{z}{R}$ dont le maximum répond à $z=R(\frac{1}{2}\pi+2n\pi)$, est continuellement soustractive, $\sin.\frac{z}{R}$ ne cessant pas d'être positif entre ces deux limites ; d'où il résulte, quant à ce qui concerne particulièrement le terme $A\sin.\frac{z}{R}$, une diminution continuelle de vîtesse, commençant à la première limite, et atteignant son maximum à la seconde.

Des effets absolument contraires ont lieu depuis la limite $z=(\pi+2n\pi)R$ jusqu'à la limite $z=(2\pi+2n\pi)R$, les diminutions tant de la force accélératrice que de la vîtesse se changeant en accroissements, parce que entre ces limites $\sin\frac{z}{R}$ est négatif, ce qui rend additif le terme $A\sin.\frac{z}{R}$ de soustractif qu'il était.

Ces résultats peuvent aussi se déduire tant de l'examen des positions des portions de cordes enroulées qui donnent le terme $A\sin.\frac{z}{R}$, que du mode de variation du terme $Rn^2\left(1-\cos.\frac{z}{R}\right)$ de l'équation (B), lequel, à partir de sa valeur zéro, qui a lieu lorsque $z=2Rn\pi$, va continuellement en croissant depuis cette limite jusqu'à la limite $z=R(\pi+2n\pi)$, après quoi il diminue depuis celle-ci, jusqu'à la limite $z=R(2\pi+2n\pi)$.

1050. J'ai introduit, dans l'analyse du problème que je viens de résoudre, les poids des fractions de circonférences de cordes qui fournissent des *moments* par rapport à l'axe, afin d'en rendre l'étude plus utile aux élèves, mais, les poids de ces portions de cordes ont, en général, une si petite influence sur le mouvement, qu'on peut les négliger sans erreur sensible ; dans ce cas la valeur de la vîtesse prend la forme

$v = \sqrt{Bz + Cz^2} = \frac{dz}{dt}$ d'où on déduit $dt = \frac{dz}{\sqrt{Bz + Cz^2}}$;

intégrant cette équation et déterminant la constante par la condition des valeurs simultanées $t = 0$ et $z = 0$.

$$(3) \ldots t\sqrt{C} = \log.\left[\frac{B + 2\{Cz + \sqrt{C(Bz + Cz^2)}\}}{B}\right]$$

(Voyez le calcul intégral de Lacroix, article 162).

Théorie de la machine d'Atwood, en faisant entrer en considération la masse de la corde ou du fil et celle de la poulie.

1051. Après avoir donné, art. 790 et suivants, la théorie de l'utile et ingénieuse machine d'Atwood (*), j'ai fait voir, art. 812 et suivants, comment on pouvait l'employer à vérifier, par l'expérience, les principes généraux de la Dynamique. Il est convenable, en faisant un usage aussi important de cette machine, de ne pas laisser le moindre sujet

(*) Je crois qu'il est convenable de faire connaître aux élèves quelques particularités de la vie d'un homme qui a enrichi les sciences physiques et mathématiques d'une invention également curieuse et utile. Voici sa notice biographique, extraite d'un nouveau Dictionnaire Historique, dont on n'a encore publié que quelques volumes;

« Atwood (Georges) physicien anglais, né vers 1745, étudia à l'école de « Westminster et au collége de la Trinité de Cambridge, où il fut ensuite « professeur. Le célèbre Pitt ayant assisté à un cours de physique qu'il faisait, « conçut une si grande idée de ses talents, qu'il l'employa dans le ministère « des finances. Ce ministre lui fit obtenir une pension qui s'éteignit à sa mort, « arrivée en 1806, un an avant celle d'Atwood. Ses ouvrages, écrits en anglais,

d'objection contre les conséquences tirées des observations. Je vais, d'après ces motifs, présenter sa théorie d'une manière plus complète que je ne l'ai fait aux articles ci-dessus cités, en introduisant, dans l'analyse, les masses de la corde, du fil, et de la poulie, négligées dans ces articles; on pourra ainsi dégager les calculs des anomalies dues à ces masses, mais on reconnaîtra qu'une partie de ces anomalies est si faible, lorsque la machine est bien construite, qu'elle n'a pas d'influence sensible sur les résultats.

Je pourrais déduire immédiatement les formules qui donnent les phénomènes du mouvement, dans la machine d'Atwood, de celles auxquelles je suis parvenu dans la solution du problême de l'art. 1045, mais il est convenable, pour l'intérêt de l'instruction, de chercher ces formules sans égard à ce qui précède, sauf à examiner ensuite leur accord avec celles des art. 1047 et 1048.

1052. La composition du système étant celle qui est décrite à l'article 790, soient

La masse suspendue à une des extrémités du fil, et qui est supposée prépondérante, égale à . . . . m'

La masse suspendue à l'autre extrémité du fil dont l'ascension est déterminée par la descente de m' . . . . m''

La masse de l'unité de longueur de la corde . . . . μ

La masse d'une des molécules soit de la poulie, soit de la portion de la corde qui est enroulée sur cette poulie . . . . dm

La distance de la molécule dm à l'axe de la poulie . . . . ρ

Le rayon de la poulie . . . . R

Le temps . . . . t

La vîtesse commune de m' et m'' au bout du temps t v

La force accélératrice de la pesanteur . . . . g

Distance au plan horizontal passant par l'axe de la poulie,	du corps m'	lorsque $t=0$	a
		au bout du temps t	$a+z$
	du corps m''	lorsque $t=0$	b
		au bout du temps t	$b-z$

La corde peut être enroulée, autour de la poulie, ou sur un demi-tour, ou sur un nombre quelconque de tours plus un demi; dans l'un et l'autre cas, les actions de la pesanteur sur le système entier de la poulie et

de la partie de corde enroulée se détruisent réciproquement, de sorte qu'on peut regarder ce système comme non pesant, en n'ayant égard qu'à son inertie, en vertu de laquelle il consomme une portion des forces motrices imprimées à m', m'' et aux parties verticales de la corde. Nous n'avons point ici, comme dans le problême de l'art. 1045, des parties de corde enroulées, dont les centres de gravité ne passent pas par l'axe.

Je suppose qu'au premier instant du mouvement on a $t=0$, $v=0$, $z=0$, et passant à l'évaluation des quantités de mouvement élémentaires imprimées par la pesanteur au bout du temps t, j'ai

1°. Masse m' et masse $\mu\,(a+z)$ de la partie verticale de la corde à laquelle m' est suspendue $gdt\{m'+\mu(a+z)\}$

2°. Masse m'' et masse $\mu\,(b-z)$ de la partie verticale de la corde à laquelle m'' est suspendue $gdt\{m''+\mu(b-z)\}$

3° Masse de la poulie et de la partie de corde enroulée sur cette poulie .... zéro

Les quantités de mouvement élémentaires qui ont lieu, et en vertu desquelles se produisent les variations effectives de vitesse sont:

1°. Masse m' et masse $\mu\,(a+z)$ de la partie verticale de la corde à laquelle m' est suspendue $\{m'+\mu(a+z)\}\,dv$

2°. Masse m'' et masse $\mu\,(b-z)$ de la partie verticale de la corde à laquelle m'' est suspendue $\{m''+\mu(b-z)\}\,dv$

3°. Masse de la poulie et de la partie de corde enroulée autour de cette poulie, masse qui est constamment la même pendant la durée du

$$(1)\ldots 0=\begin{cases} gRdt\{m'+\mu(a+z)-m''-\mu(b-z)\} \\ -Rdv\{m'+\mu(a+z)+m''+\mu(b-z)\}-\dfrac{dv}{R}\Sigma(\rho^2dm) \end{cases}$$

tirant la valeur de la force accélératrice $\frac{dv}{dt}$,

$$(2)\ldots\ldots\ldots\frac{dv}{dt}=\frac{gR^2\{m'-m''+\mu(a-b+2z)\}}{R^2\{m'+m''+\mu(a+b)\}+\Sigma(\rho^2dm)}$$

Si dans l'équation de l'article 104, on fait $R=r$, ce qui donne $n=0$, $k=2R$, on retrouve l'équation précédente ainsi qu'on devait s'y attendre.

1054. Pour obtenir l'expression finie de la vîtesse, en multipliera le premier membre par v, le second par la valeur $\frac{dz}{dt}$ de v, et intégrant, dans l'hypothèse des valeurs initiales $v=0$ et $z=0$, on aura

$$(1)\ldots\ldots\ldots v^2=\frac{2gR^2\{[m'-m''+\mu(a-b)]z+\mu z^2\}}{R^2\{m'+m''+\mu(a+b)+\Sigma(\rho^2dm)\}}$$

équation qui peut se mettre sous la forme

$$(2)\ldots\ldots\ldots v^2=Bz+Cz^2$$

et d'où on tire, en substituant pour v sa valeur $\frac{dz}{dt}$,

$$(3)\ldots\ldots\ldots dt=\frac{dz}{\sqrt{Bz+Cz}}$$

équation de même forme que celle de l'article 1050, laquelle intégrée dans l'hypothèse des valeurs initiales $t=0$ et $z=0$, donne comme à l'article cité,

$$(4)\ldots t=\frac{1}{\sqrt{C}}\log.\left(\frac{2Cz+B+2\sqrt{C(Bz+Cz^2)}}{B}\right)$$

Observations sur les applications de la théorie de la machine d'Atwood, exposée dans le chapitre précédent.

1055. Je puis maintenant faire connaître, en valeurs absolues, le degré d'exactitude qu'on obtient lorsqu'on ca cule les expériences faites avec la machine d'Atwood, par les formules données à la fin de la première section, et pour cela, il faut déterminer, d'après les formules rigoureuses

du chapitre précédent, l'influence des masses du fil et de la poulie sur le mouvement des poids. Les élèves auront un premier exemple de l'utilité des théories qui font entrer en considération, dans les problêmes du mouvement, l'étendue et la figure des corps.

La machine qui m'a fourni les données des calculs suivants est sortie des atteliers de M. Dumotiez, l'un des plus habiles artistes de Paris, pour la construction des instruments de physique. Le fil, qui tient les poids suspendus, pèse un peu moins de $\frac{1}{10}$ de gramme par mètre de longueur; ainsi on peut négliger sa masse sans crainte d'erreur sensible. La poulie pèse 0,^{kil}.2706, son rayon, pris depuis l'axe jusqu'au fond de la rainure dans laquelle on place le fil, est de 0,^{m}050; le rayon de son axe, aux points où cet axe pose sur les quatre roulettes de friction, est de 0,^{m}0022; le rayon de chaque roulette de friction est de 0,^{m}053, son poids de 0,^{kil}.0896, et les extrémités de l'axe qui la supportent, sont taillées en forme conique.

On s'assure, aisément, d'après ces données, qu'on peut négliger non-seulement la masse du fil, mais encore la résistance due au frottement; en effet, désignant par R et R', respectivement, le rayon de la poulie, et celui d'une roulette de friction, par r et r' le rayon de l'axe de la poulie et le *rayon moyen* de la pointe, engagée, de l'extrémité conique de l'axe de la roulette de friction, par P le poids total que supportent les quatre axes des roulettes de friction, par Π la force tangentielle à la poulie, qui ferait équilibre au frottement exercé sur les quatre appuis, et par f le rapport du frottement à la pression, on a, d'après les principes posés dans la quatrième section de la première partie du cours,

$$\Pi = \frac{0{,}0022 \times 0{,}0005}{0{,}05 \times 0{,}053} \times 0{,}1129 = 0^{\text{kil.}},00004686$$

Ainsi la résistance due au frottement pour la puissance qui agit à la surface de la poulie, est un peu moindre que $\frac{1}{20}$ de gramme, dans le cas du maximum de charge de la machine.

1056. l'équation (2) de l'art. 1053 peut, d'après ce qui précède, se réduire à la suivante,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{gR^2(m' - m'')}{R^2(m' + m'') + \Sigma(\rho^2 dm)}$$

sans perdre sensiblement de son exactitude. Ainsi la force accélératrice $\frac{dv}{dt}$ est constante et le mouvement uniformément accéléré; mais les phénomènes de ce mouvement ne dépendent plus uniquement, comme on l'avait supposé à la fin de la première section, du rapport $\frac{m' - m''}{m' + m''}$, parce que le terme $\Sigma(\rho^2 dm)$, dû à la masse de la poulie, entre dans l'expression de $\frac{dv}{dt}$; j'ajouterai qu'à la rigueur il faudrait aussi avoir égard aux masses des roulettes de friction, qui se meuvent en même temps que la poulie; mais je ferai bientôt voir qu'on peut négliger les termes qui en résultent, et je vais, d'abord, donner le moyen d'exprimer en nombre la valeur de $\Sigma(\rho^2 dm)$.

Les masses m' et m'' étant représentées dans le calcul, par leur poids, l'intégrale définie $\Sigma(\rho^2 dm)$ sera équivalente à un produit Mk^2, M étant égale à $\Sigma(dm)$ et k étant une quantité linéaire; et, pour déterminer, par l'expérience, la valeur numérique de Mk^2, on emploiera le procédé suivant : « Faites osciller la poulie autour d'un « axe horizontal, auquel l'axe propre de cette poulie soit parallèle, la « suspension étant opérée par le moyen d'un fil dont le poids puisse « être regardé comme nul par rapport à celui de la poulie, et les « amplitudes des oscillations étant très-petites. Soient a la distance « de l'axe de suspension à l'axe de la poulie, n et τ, respectivement, « le nombre total et le temps total des oscillations, g la force accé- « lératrice de la pesanteur, π la demi-circonférence qui a l'unité pour « rayon, la valeur $\Sigma(\rho^2 dm)$ ou Mk^2 se calculera par la formule

$$\Sigma\,(\rho^2\,dm) = Ma\left(\frac{g\tau^2}{n^2\,\pi^2} - a\right)$$

formule que je démontrerai lorsque j'aurai exposé la théorie des moments d'inertie.

1057. Les mesures que j'ai prises et une expérience que j'ai faite sur la machine dont il est ques- tion à l'article 1055, m'ont donné

$$a = 0^{\text{m}},2595$$
$$\tau = 60''$$
$$n = 117$$
$$M = 0^{\text{kil}}.2706$$

introduisant ces quantités dans la formule de l'article précédent avec la quantité $\frac{g}{\pi^2} = 0,99384$, le logarithme de ce nombre étant $\bar{1},9973160$, on a

$$\Sigma\,(\rho^2\,dm) = 0,2706 \times 0,2595 \times \{(\tfrac{60}{117})^2 \times 0,99384 - 0,2595\} = 0,00013$$

or en faisant comme ci-dessus $m' + m'' = 0^{\text{kil}}.,5$, $R = 0^{\text{m}}.,05$, on a $R^2\,(m' + m'') = 0,0025 \times 0,5 = 0,00125$, d'où . . . .

$$\frac{R^2\,(m' + m'')}{R^2\,(m' + m'') + \Sigma\,(\rho^2\,dm)} = \tfrac{125}{138} = \tfrac{13}{14}$$ à-peu-près. On voit que l'expression de la force accélératrice calculée par les formules de la première section, est plus forte d'environ $\frac{1}{13}$ que celle qu'on trouve en ayant égard à la masse de la poulie; mais cette circonstance ne change rien à la vérité de tout ce que j'ai dit, article 812 et suivants, sur la conformité des principes généraux de la Dynamique aux phénomènes observés, puisque c'est d'après ces mêmes principes que le mouvement [redacted]

dues aux masses des roulettes de friction, seraient de la forme....
$\frac{r}{R} \cdot \frac{\rho_{\prime}}{R^{\prime}} dv\, dm_{\prime}$, en désignant par $\rho_{\prime}$ la distance de la molécule $m_{\prime}$ d'une roulette de friction à l'axe de cette roulette; et vu la petitesse de la fraction $\frac{r}{R}$ elles pourraient être négligées vis-à-vis des premières. Au reste les élèves feront bien de s'exercer à déterminer la valeur générale de $\frac{dv}{dt}$, art. 1053, en y introduisant le terme dû aux masses des roulettes de friction.

Mouvement d'un corps sollicité par des puissances quelconques et assujéti à se mouvoir autour d'un axe fixe.

1059. Les exercices des chapitres précédents ont commencé à familiariser les élèves avec l'usage du principe général du mouvement. Je vais maintenant appliquer ce principe, à un premier problême général et fondamental, sur le mouvement de rotation d'un corps solide ou d'un systême de forme invariable.

Soit un systême de points matériels m', m'', etc., dont les distances respectives sont invariables, assujéti à tourner autour d'un axe fixe. Ces points matériels peuvent être sollicités par des puissances d'intensités et de directions quelconques, mais comme les actions de ces puissances, dans le sens parallèle à l'axe de rotation, n'ont aucune influence sur le mouvement, nous représenterons, par p', p'', etc. leurs actions respectives sur m', m'', etc., dans des plans perpendiculaires à l'axe.

Soient r', r'', etc. les perpendiculaires menées de l'axe fixe sur les directions respectives de p', p'', etc.; ρ', ρ'', etc., les distances de m', m'', etc. à ce même axe, et ϑ la *vîtesse angulaire* du systême au bout du temps t, c'est-à-dire la vîtesse absolue de chacun des points placés à l'unité de distance de l'axe de rotation ; les quantités de mouvement élémentaires, imprimées par les puissances, au bout du temps t, seront

$$p' m' dt;\ p'' m'' dt;\ \text{etc.}$$

Ce sont celles qui tendent à faire varier les vîtesses absolues $\vartheta\rho'$, $\vartheta\rho''$, etc. des points matériels m', m'', etc., ou la vîtesse angulaire ϑ, commune à

tout le système; mais eu égard à la liaison des parties de ce système, les variations de vîtesse ne seront pas $p'dt$, $p''dt$, etc., mais $\rho d\vartheta$, $\rho'' d\vartheta$, etc. et si on imprimait, en sens contraire de ces dernières, aux points matériels m', m'', etc. des quantités de mouvements élémentaires $-m'\rho' d\vartheta$, $-m''\rho'' d\vartheta$, etc. les variations de mouvement n'auraient pas lieu, et, par conséquent, les quantités de mouvement élémentaires imprimées $p'm'dt$, $p''m''dt$, etc. resteraient sans effet; la vîtesse angulaire existante ϑ se conserverait sans altération. La condition de l'équilibre a donc lieu, art. 1038, entre les quantités de mouvement élémentaires,

$$p'm'dt,\; p''m''dt, \text{ etc.}$$
$$-m'\rho' d\vartheta,\; -m''\rho'' d\vartheta, \text{ etc.}$$

et, pour énoncer cette condition, il suffit de dire que la somme des moments de ces quantités de mouvement, par rapport à l'axe de rotation, est égale à zéro, ce qui donne l'équation

$$o = (p'm'r' + p''m''r'' + \text{etc.})\,dt - (m'\rho'^2 + m''\rho''^2 + \text{etc.})\,d\vartheta$$

et la valeur générale

$$(A) \ldots \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\Sigma(pmr)}{\Sigma(m\rho^2)}$$

en désignant, par $\Sigma(pmr)$ et $\Sigma(m\rho^2)$, respectivement, la somme des termes $p'm'r'$, $p''m''r''$, etc. et celle des termes $m'\rho'^2$, $m''\rho''^2$, etc. Si on examine les équations. (A) et (2) des art. 1047 et 1055, on verra qu'elles ne sont que des cas particuliers de celle-ci.

1060. Telle est l'expression de la *force accélératrice angulaire*; son numérateur est, comme on voit, la somme des moments des puissances sollicitantes, par rapport à l'axe de rotation; son dénominateur est la

tion est parallèle à l'axe des x, 2°. que ce dernier axe passe par le centre de gravité du système. Désignons par b et c les distances respectives de l'axe de rotation aux plans des xz et des xy.

On aura, pour une une molécule quelconque m,

$$\rho^2 = (b-y)^2+(z-c)^2, \text{ d'où}$$

$$\Sigma(m\rho^2)=\Sigma\{m(y^2+z^2)\}-2b\Sigma(my)-2c\Sigma(mz)+(b^2+c^2)\Sigma(m)$$

on a, par la propriété du centre de gravité, $\Sigma(my)=0$, $\Sigma(mz)=0$, et, M étant la masse totale du corps, $\Sigma(m)=M$, d'où

$$\Sigma(m\rho^2)=\Sigma\{m(y^2+z^2)\}+M(b^2+c^2)$$

or $\Sigma\{m(y^2+z^2)\}$ est le moment d'inertie, par rapport à l'axe des x, ou à l'axe qui passe par le centre de gravité du système, et b^2+c^2 est le quarré de la distance de cet axe des x à celui auquel appartient le moment $\Sigma(m\rho^2)$; on a donc le théorême général.

« Connaissant le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe « de position déterminée, et passant par le centre de gravité de ce « corps, on en déduira le moment d'inertie par rapport à un second « axe, parallèle au premier, et dont il est à une distance connue, en « ajoutant au moment donné, le produit de la masse totale du corps « par le carré de la distance entre les deux axes. »

1062. On conclut d'abord, de ce théorême, que l'axe dirigé par le centre de gravité du corps, qui, parmi tous les axes passant par le même centre, a le plus petit moment d'inertie, jouit de cette propriété par rapport à tous les axes menés dans l'espace.

1063. P étant une force accélératrice, et R une quantité linéaire, et M continuant à désigner la masse totale du corps, on peut poser l'équation hypothétique

$$\Sigma(prm) = MPR.$$

On peut aussi, k étant une quantité linéaire, représenter par Mk^2, la valeur du moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à l'axe de rotation et passant par le centre de gravité du corps ou du système; ensorte que, λ étant la distance entre les deux axes, on aura, d'après le théorême de l'article précédent, $\Sigma(m\rho^2)=M(k^2+\lambda^2)$ et la valeur de $\frac{d\vartheta}{dt}$, donnée à l'art. 1059 deviendra

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{PR}{k^2+\lambda^2}$$

Des moments d'inertie considérés par rapport aux axes et par rapport aux plans.

1064. J'ai donné, art. 1060, 1061 et 1062, la définition et deux des principales propriétés des *moments d'inertie*, je vais, maintenant, entretenir les élèves de ce qu'il y a de plus important à savoir sur leur théorie.

Je continue à désigner, par m, l'élément de masse, et je rapporte les positions de tous les points du corps à trois coordonnées x, y et z, parallèles à des axes fixes. On aura, art. 1060, les valeurs suivantes du moment d'inertie par rapport à chacun des trois axes, valeurs qui sont toujours positives ; savoir;

$$\text{moment d'inertie pris par rapport à l'axe} \left\{ \begin{array}{l} \text{des } x \ldots\ldots \Sigma\{m(y^2+z^2)\} \\ \text{des } y \ldots\ldots \Sigma\{m(x^2+z^2)\} \\ \text{des } z \ldots\ldots \Sigma\{m(x^2+y^2)\} \end{array} \right.$$

Posons pour abréger,

$$\Sigma(mx^2)=A;\ \Sigma(my^2)=B;\ \Sigma(mz^2)=C$$
$$\Sigma(myz)=D;\ \Sigma(mxz)=E;\ \Sigma(mxy)=F$$
$$\Sigma\{m(x^2+y^2+z^2)\}=R.$$

Les valeurs précédentes des moments d'inertie deviendront, respectivement, $B+C$, $A+C$, $A+B$, ou $R-A$, $R-B$, $R-C$.

1065. Chaque expression d'un des moments, mise sous la forme $R-A$, $R-B$, $R-C$, se compose d'une quantité commune R, qui se déduit, uniquement, de la position de l'origine des x, y, z, par rapport au corps, et qui est tout-à-fait indépendante des positions des axes et des plans coordonnées, et d'une des quantités $-A$, $-B$, $-C$, laquelle est la somme des produits des molécules du corps par les quarrés de leurs distances à l'un des plans coordonnés ; on pourrait donner à

l'origine, est déterminée par les angles θ et η,) les $y_,$ sur une perpendiculaire à la direction de $x_,$, menée dans le plan xy, les $z_,$ sur un plan pendiculaire au plan $x_,y_,$.

On aura par les formules de la géométrie analytique, les relations suivantes entre $x, y, z, x_,, y_,, z_,$;

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} x_, = (x \cos.\eta + y \sin.\eta)\cos.\theta + z \sin.\theta \\ y_, = y \cos.\eta - x \sin.\eta \\ z_, = z \cos.\theta - (x \cos.\eta + y \sin.\eta)\sin.\theta \end{array} \right.$$

équations desquelles on déduit les suivantes

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} x_, = -\dfrac{dz_,}{d\theta} \\ y_, = \dfrac{1}{\cos.\theta}.\dfrac{dx_,}{d\eta} = -\dfrac{1}{\sin.\theta}.\dfrac{dz_,}{d\eta} \\ z_, = \dfrac{dx_,}{d\theta} \end{array} \right.$$

1067. Ces formules vont nous fournir les moyens de résoudre un premier problême très-important, celui de déterminer la position de la ligne droite passant par l'origine. par rapport à laquelle le moment d'inertie est un maximum ou un minimum; on peut supposer que cette ligne droite est l'axe des $z_,$, et, puisque le moment d'inertie, par rapport à cet axe, a pour valeur, art. 1064, $R - \Sigma(mz_,^2)$; on n'a à faire varier, dans l'analyse du problême, que le seul terme $\Sigma(mz_,^2)$.

On déduit de la troisième équation (1) de l'article précédent, en désignant, pour abréger, $\Sigma(mz_,^2)$ par L, et en faisant attention que les angles θ et η doivent être considérés comme constants relativement aux intégrales par Σ, qui donnent les quantités A, B, C, etc.

$$L = \left\{ \begin{array}{l} A \cos.^2\eta \sin.^2\theta + B \sin.^2\eta \sin.^2\theta + C \cos.^2\theta \\ \qquad - 2D \sin.\eta \sin.\theta \cos.\theta \\ \qquad - 2E \cos.\eta \sin.\theta \cos.\theta \\ \qquad + 2F \sin.\eta \cos.\eta \sin.^2\theta \end{array} \right.$$

Cette quantité L, qui, art. 1065, est le moment d'inertie par rapport au plan $x_,y_,$ dépend de la position de ce plan $x_,y_,$ par rapport au corps, et par conséquent de la position de l'axe des $z_,$, laquelle est déterminée par les angles θ et η. Le moment L, ou $\Sigma(mz_,^2)$; varie donc avec θ et η et ses différences partielles par rapport à ces deux indéterminées sont, en différentiant sous le signe

$$2d\theta\,\Sigma\left\{m z_{,}\left(\frac{dz_{,}}{d\theta}\right)\right\},\ \text{et}\ 2d\eta\,\Sigma\left\{m z_{,}\left(\frac{dz_{,}}{d\eta}\right)\right\}$$

qui se changent, par les équations (2) de l'art. précédent en

$$-2d\theta\,\Sigma\,\{m z_{,}x_{,}\},\ \text{et}\ -2d\eta.\sin.\theta\,\Sigma\,\{m z_{,}y_{,}\}$$

la condition du *maximum* ou du *minimum* de L doit donc s'exprimer par les équations

$$\Sigma\,(m z_{,}x_{,})=0\ ,\ \Sigma\,(m z_{,}y_{,})=0;$$

Il est facile de voir que deux équations de même forme auraient encore lieu, en prenant, avec le même axe des $z_{,}$, dans le plan des $x_{,}y_{,}$, deux autres axes rectangulaires quelconques, qu'on appellerait axes des $x_{,,}$ et des $y_{,,}$; en effet, en désignant par ι, l'angle que formerait l'axe des $x_{,,}$ avec celui des $x_{,}$ on aurait

$$x_{,,}=x_{,}\cos.\iota+y_{,}\sin.\iota$$
$$y_{,,}=y_{,}\cos.\iota-x_{,}\sin.\iota$$

et par conséquent

$$\Sigma\,(m z_{,}x_{,,})=\cos.\iota\,\Sigma(m z_{,}x_{,})+\sin.\iota\,\Sigma\,(m y_{,}z_{,})$$
$$\Sigma\,(m z_{,}y_{,,})=\cos.\iota\,\Sigma(m z_{,}y_{,})-\sin.\iota\,\Sigma\,(m z_{,}x_{,})$$

quantités qui sont nulles, puisque $\Sigma\,(m z_{,}x_{,})=0$ et $\Sigma\,(m z_{,}y_{,})=0$.

1068. Il reste maintenant, pour avoir la position de l'axe qui satisfait aux équations $\Sigma(m z_{,}x_{,})=0, \Sigma(m z_{,}y_{,})=0$, ou $\frac{dL}{d\theta}=0, \frac{dL}{d\eta}=0$, à déterminer, par ces équations, les valeurs des angles θ et η. Faisons

$$\text{tang.}\,\theta=f;\ \text{tang.}\,\eta=h$$

l'équation de l'art. précédent qui donne la valeur de L ou de $\Sigma\,(m z_{,}^{2})$ deviendra, en faisant attention que $\sin.^2\theta=\frac{\text{tang.}^2\theta}{1+\text{tang.}^2\theta}$, $\cos.^2\theta=\frac{1}{1+\text{tang.}^2\theta}$

prenons la valeur de f, que détermine cette équation, et substituons-la dans la précédente, nous aurons, après avoir divisé par le facteur $1+h^2$,

$$\{(B-L)h^2+2Fh+A-L\}(C-L)-(Dh+E)^2=0$$

équation qui peut se mettre sous la forme

$$(3)\ldots\ldots\ \left.\begin{array}{r}\{(B-L)(C-L)-D^2\}h^2+2\{(C-L)F-DE\}h\\ +(C-L)(A-L)-E^2\end{array}\right\}=0.$$

Si actuellement on différentie cette équation par rapport à h, sans faire varier L, le résultat, qui remplacera l'équation $\frac{dL}{d\eta}=0$, sera

$$(4)\ldots\ldots\{(B-L)(C-L)-D^2\}h+(C-L)F-DE=0.$$

Substituant la valeur de h déduite de cette équation, dans l'équation (3) on aura

$$(5)\ldots\ldots\ \left.\begin{array}{r}\{(B-L)(C-L)-D^2\}\times\{(C-L)(A-L)-E^2\}\\ -\{F(C-L)-DE\}^2\end{array}\right\}=0.$$

Cette équation est divisible par $C-L$, effectuant la division, on a l'équation du troisième degré.

$$(6)\ldots\ldots 0=\left\{\begin{array}{l}(A-L)(B-L)(C-L)\\ -D^2(A-L)-E^2(B-L)-F^2(C-L)\\ +2DEF\end{array}\right.$$

Cette équation a, nécessairement, une racine réelle; si on prend cette racine pour valeur de L, et qu'on la substitue soit dans l'équation (3), soit dans l'équation (4), on aura la valeur de h; sur quoi il faut observer que les deux racines de l'équation (3), du 2e. degré par rapport à h, doivent être égales, car si on représente par Q la somme des quantités qui composent son premier membre, les deux conditions $Q=0$ et $\frac{dQ}{dh}=0$, doivent, par l'état de la question, avoir lieu ensemble; lorsque h sera ainsi déterminée, on substituera sa valeur avec celle de L, dans l'équation (1), ou dans l'équation (2), afin d'avoir l'autre inconnue f, par rapport à laquelle (1) est du deuxième degré. J'ajouterai que les deux racines de (1) sont encore égales, car si on représente par Q' la somme des quantités qui composent son premier membre, les deux conditions $Q'=0$ et $\frac{dQ'}{df}=0$ doivent avoir lieu ensemble, et c'est d'après ces conditions et les précédentes $Q=0$, $\frac{dQ}{dh}=0$ que la quantité L est déterminée.

1069. J'ai dit que l'équation (6) de l'art. précédent avait, nécessairement, une racine réelle, ce qui se déduit, tout simplement, de la théorie des équations, mais on peut s'assurer, par des considérations particulières à la question dont il s'agit, que les trois racines sont réelles; et, d'abord, on peut dire, d'après la définition de l'art. 1060, que tous les moments d'inertie par rapport aux axes qui ont leur intersection commune à l'origine, étant des quantités positives et finies, il y en a nécessairement un qui est le plus grand et un autre qui est le plus petit; voilà donc l'existence constatée de deux racines réelles de l'équation (6), d'où l'on conclut qu'elles sont toutes trois réelles.

Voici une autre manière d'arriver à ce résultat, qui fournit, en même temps, des détails instructifs sur les questions que nous traitons. Le plan des $x_{,}y_{,}$ ayant été déterminé dans l'article précédent, par les angles θ et η, ou par les valeurs de f et h, et par la condition de rendre le moment d'inertie par rapport à l'axe des $z_{,}$ un *minimum* ou un *maximum*, prenons dans ce plan, deux axes désignés, respectivement, par les noms d'axe des $x_{,,}$ et d'axe des $y_{,,}$; l'axe des $x_{,,}$ étant supposé faire un angle ι avec l'axe des $x_{,}$, on aura comme à l'art. 1067

$$(1)\ldots\ldots\begin{cases} x_{,,}=x_{,}\cos.\iota+y_{,}\sin.\iota \\ y_{,,}=y\cos.\iota-x_{,}\sin.\iota \end{cases}$$

d'où on déduira

$$(2)\ldots\ldots\ \Sigma(mx_{,,}^{2})=\cos^{2}\iota\,\Sigma(mx_{,}^{2})+\sin.^{2}\iota\,\Sigma(my_{,}^{2}) + 2\sin.\iota\cos.\iota\,\Sigma(mx_{,}y_{,})$$

on a $\left\{\dfrac{d\Sigma(mx_{,,}^{2})}{d\iota}\right\}=2\,\Sigma\left(mx_{,,}\dfrac{dx_{,,}}{d\iota}\right)$, et, par les équations (1),

$$\frac{dx_{,,}}{d\iota}=y_{,,}\ \text{d'où}\ \left\{\frac{d\Sigma(mx_{,,}^{2})}{d\iota}\right\}=2\,\Sigma(m\,x_{,,}y_{,,}).$$

La condition d'après laquelle le plan $x_{,}y_{,}$ est déterminé rend, art. 1067, la somme $\Sigma(m\,x_{,,}\,z_{,})$ nulle, et si on déduit des équations (1) la valeur de $\Sigma(m\,x_{,,}y_{,,})$, en supposant cette valeur égale à zéro, on aura la valeur de ι qui convient à cette hypothèse. Attribuons cette valeur à ι, les équations $\Sigma(m\,x_{,,}z_{,})=0$ et $\Sigma(m\,x_{,,}y_{,,})=0$ seront, art. 1067, celles qui rendent $\Sigma(mx_{,,}^{2})$ égal à un *minimum* ou à un *maximum*, et si nous faisons $\Sigma(m\,x_{,,}^{2})=L_{,}$, $\Sigma(mx_{,}^{2})=A_{,}$,

$\Sigma(m y_{,}^2)=B_{,}$, $\Sigma(m x_{,} y_{,})=F_{,}$, tang. $\iota = i$, on aura, d'après l'équation (2) ci-dessus,

$$(3)\ldots\ldots (1+i^2)L_{,}=A_{,}+B_{,}i^2+2iF_{,}$$

mais on a, de plus, $\left(\frac{dL_{,}}{di}\right)=0$, ce qui est une conséquence de $\Sigma(mx_{,,}^2)=$ *maximum* ou *minimum*, donc $iL_{,}=B_{,}i+F_{,}$, et

$$(4)\ldots\ldots i=\frac{-F_{,}}{B_{,}-L_{,}}$$

Cette valeur de i, substituée dans l'équation (3) donne

$$(5)\ldots\left\{\begin{array}{l}(A_{,}-L_{,})(B_{,}-L_{,})-F_{,}^2=0\\ L_{,}=\frac{A_{,}+B_{,}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{A_{,}-B_{,}}{2}\right)^2+F_{,}^2}\end{array}\right.$$

Faisant $\Sigma(my_{,,}^2)=L_{,,}$ on aura, en $L_{,,}$, la même équation donnée ci à côté en $L_{,}$

l'équation du deuxième degré en $L_{,}$ a ses deux racines réelles.

Reprenons, maintenant, l'équation (6) de l'article précédent

$$0=\left\{\begin{array}{l}(A-L)(B-L)(C-L)\\ -D^2(A-L)-E^2(B-L)-F^2(C-L)\\ +2DEF\end{array}\right.$$

et faisant attention que les valeurs déterminées de L, fournies par cette équation, sont indépendantes des positions absolues, des plans, passant par l'origine, auxquels se rapportent les moments d'inertie A, B, C, etc., supposons que ces moments sont relatifs aux plans des $x_{,}y_{,}$, $x_{,}z_{,}$, $y_{,}z_{,}$ deux desquels donnent, par leur intersection, l'axe des $z_{,}$, ci-dessus déterminé; désignons par $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$, $D_{,}$, $E_{,}$, $F_{,}$, les quantités qui se rapportent à ces plans, et qui sont analogues à A, B, C, etc. de l'art. 1064; observons que, puisque $\Sigma(mz_{,}^2)$ est un *maximum* ou un *minimum*, on a $D_{,}=0$, $E_{,}=0$, ce qui réduit l'équation précédente à

$$(6)\ldots\ldots (A_{,}-L)(B_{,}-L)(C_{,}-L)-F_{,}^2(C_{,}-L)=0$$

et cette équation divisée par le facteur $C_{,}-L_{,}$, qui répond à la racine $C_{,}$ qu'elle doit nécessairement avoir, devient identique avec l'équation (5) ci-dessus, laquelle détermine deux autres moments d'inertie, ayant leurs différentielles nulles, dont l'un $\Sigma(mx_{,,}^2)$ se rapporte au plan des $y_{,,}z_{,}$, l'autre, qui est le moment $\Sigma(my_{,,}^2)$, se rapportant au plan des $z_{,}x_{,,}$; ce dernier est celui pour lequel on a $\Sigma(my_{,,}z_{,})=0$, et $\Sigma(my_{,,}x_{,,})=0$.

On voit, ainsi, 1°. que les trois racines de l'équation (6) de l'article précédent sont réelles, 2°. Que les axes auxquels se rapportent ces trois racines, sont les lignes d'intersection de trois plans dont l'un quelconque est perpendiculaire sur les deux autres.

1070. Je désignerai, par le nom de *plan principal*, le plan par rapport auquel le moment d'inertie est un *maximum* ou un *minimum*, ou, en d'autres termes, celui par rapport auquel la différence du moment d'inertie est égale à zéro. Les équations données à l'art. 1068 assignent les valeurs de f et h qui rendent le plan $x_{,}y_{,}$ *plan principal*; or l'équation générale de ce plan $x_{,}\, y_{,}$, abstraction faite de toute propriété particulière, se trouve en faisant $z_{,}=0$ dans la 3e. équation (1) de l'art. 1066 ce qui donne

$0=z\cos.\theta-(x\cos.\eta+y\sin.\eta)\sin.\theta$ d'où $z=(x\cos.\eta+y\sin.\eta)\,\text{tang}.\theta$ et en employant f et h, avec les valeurs assignées art. 1068.

$$(1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots z=\frac{f}{\sqrt{1+h^2}}(x+hy).$$

Pour introduire, dans cette équation, les conditions qui rendent le plan $x_{,}y_{,}$ *plan principal*, on a, d'abord, l'équation (2) de l'art. 1068. qui donne

$\dfrac{f}{\sqrt{1+h^2}}=\dfrac{Dh+E}{(B-L)h^2+2Fh+A-L}$; or d'après l'équation dont on a déduit l'équation (3), article 1068, le dénominateur ....

$(B-L)h^2+2Fh+A-L=\dfrac{(Dh+E)^2}{C-L}$, et l'équation précédente devient, en y substituant cette valeur,

[redacted]

$\frac{f}{\sqrt{1+h^2}}$ et h dans l'équation (1), on aura l'équation du plan principal

$$(2)\ldots x\{(B-L)(C-L)-D^2\}-y\{(C-L)F-DE\}-z\{(B-L)E-FD\}=0.$$

Si on multiplie le coefficient $(B-L)(C-L)-L^2$ par la quantité $(A-L)D-EF$, on a le produit

$$D\{(A-L)(B-L)(C-L)-D^2(A-L)\}$$
$$-(B-L)(C-L)EF+D^2EF$$

et si de ce produit on retranche l'équation (6) de l'article 1068 multipliée par D, le résultat sera

$$-(B-L)(C-L)EF$$
$$+E^2D(B-L)+F^2D(C-L)-D^2EF$$

pouvant se mettre sous la forme

$$-[(B-L)E-DF][(C-L)F-DE]$$

quantité qui est égale à $[(B-L)(C-L)-D^2][(A-L)D-EF]$ moins la somme des termes formant l'équation (6) de l'art. 1068, c'est-à-dire moins une quantité nulle, on a donc

$$(B-L)(C-L)-D^2=-\frac{[(B-L)E-DF][(C-L)F-DE]}{(A-L)D-EF}$$

et cette valeur, substituée dans l'équation (2), donne l'équation suivante du plan principal, plus régulière que (2)

$$(3)\ldots\ 0=\begin{cases} x:\{(A-L)D-EF\} \\ +y:\{(B-L)E-FD\} \\ +z:\{(C-L)F-DE\} \end{cases}$$

1071. Le plan dont on vient de donner l'équation change avec le moment principal L qui s'y rapporte, et, comme l'équation (6) de l'art. 1068 donne trois valeurs pour ce moment L, on a, ainsi, les équations particulières de trois plans principaux, dont chacun, d'après l'article 1069, est à angles droits sur les deux autres.

Les intersections de ces trois plans sont trois axes rectangulaires qui se rencontrent à l'origine commune des $x, y, z, x_{,}, y_{,}, z_{,}; x_{,,}, y_{,,};$ de plus il est manifeste, d'après les valeurs données art. 1065, 1068 et 1069, que la différentielle du moment d'inertie par rapport à chacun de ces axes est nulle, puisque la différentielle du moment d'inertie par rapport au

plan, passant par l'origine, qui lui est perpendiculaire, est égale à zéro.

1072. La valeur générale de $\Sigma\,(m z_{,}^{2})$ trouvée art. 1067 pour un moment d'inertie relatif à un plan quelconque des $x_{,}$, $y_{,}$, déterminé par deux angles θ et η était

$$A \cos.^2 \eta \sin.^2 \theta + B \sin^2 \eta \sin.^2 \theta + C \cos.^2 \theta$$
$$-2 D \sin.\eta \sin.\theta \cos.\theta - 2 E \cos.\eta \sin.\theta \cos.\theta + 2 F \sin.\eta \cos.\eta \sin.^2 \theta$$

et on a, art. 1070, pour l'équation de ce plan

$$z \cos.\theta - (x \cos.\eta + y \sin.\eta) \sin.\theta = 0.$$

Les cosinus des angles formés par le même plan et par ceux des $y\,z$, $x\,z$, et $x\,y$, sont respectivement

$$-\cos.\eta \sin.\theta;\ -\sin.\eta \sin.\theta;\ \cos.\theta$$

dont les quarrés sont les coefficients de A, B, C dans la valeur précédente de $\Sigma\,(m z_{,}^{2})$.

Ces résultats ont lieu quels que soient les axes des coordonnées primitives, mais, si ces axes sont *principaux*, on aura, art. 1067 et 1069 $D=0$, $E=0$, $F=0$, et l'expression du moment d'inertie relatif à un plan de position quelconque sera

$$A \operatorname{css.}^2 \eta \cos.^2 \theta + B \sin.^2 \eta \sin.^2 \theta + C \cos.^2 \theta$$

en sorte que désignant par α, β et γ les angles respectifs que le plan quelconque dont il s'agit forme avec les plans $y\,z$, $x\,z$ et $x y$, lorsque les axes des x, y et z sont *principaux*, l'expression du même moment deviendra,

$$A \cos.^2 \alpha + B \cos.^2 \beta + C \cos.^2 \gamma.$$

[redacted]

et on trouvera de la même manière, en désignant par B', C', D', etc. les quantités analogues à B, C, D, etc. art. 1064,

$$\begin{aligned}
B' &= B - 2\,b\,\nu\,M + b^2\,M\\
C' &= C - 2\,c\,\zeta\,M + c^2\,M\\
D' &= D - (b\,\zeta + c\,\nu)\,M + b\,c\,M\\
E' &= E - (c\,\xi + a\,\zeta)\,M + a\,c\,M\\
F' &= F - (a\,\nu + b\,\xi)\,M + a\,b\,M
\end{aligned}$$

mais, pour simplifier les calculs suivants, supposons que l'origine des coordonnées primitives soit au centre de gravité, et que les axes primitifs des coordonnées qui se croisent à ce centre, soient *principaux*, on aura, par cette double condition,

$$\xi = 0,\ \nu = 0,\ \zeta = 0,\ D = 0,\ E = 0,\ F = 0.$$

et par conséquent,

$$A' = A + a^2\,M;\ B' = B + b^2\,M;\ C' = C + c^2\,M$$
$$D' = b\,c\,M;\ E' = a\,c\,M;\ F' = a\,b\,M.$$

Désignons encore par L le moment d'inertie principal qui se rapporte à l'origine dont la position est déterminée par les coordonnées a, b, c, on aura la valeur de ce moment, en substituant dans l'équation (6) de l'art. 1068 aux quantités A, B, C, etc. leurs correspondantes A', B', C', etc. ou les valeurs de ces correspondantes, ce qui donnera

$$0 = \left\{\begin{array}{l}
(A + a^2 M - L)\,(B + b^2 M - L)\,(C + c^2 M - L)\\
-(A + a^2 M - L)\,b^2\,c^2\,M^2\\
-(B + b^2 M - L)\,a^2\,c^2\,M^2\\
-(C + c^2 M - L)\,a^2\,b^2\,M^2\\
+2\,a^2\,b^2\,c^2\,M^3
\end{array}\right.$$

équation qui peut, visiblement, se mettre sous la forme

$$(L)\ldots\ldots\, 0 = \left\{\begin{array}{l}
\quad (A - L)\,(B - L)\,(C - L)\\
+a^2\,(B - L)\,(C - L)\,M\\
+b^2\,(C - L)\,(A - L)\,M\\
+c^2\,(A - L)\,(B - L)\,M
\end{array}\right.$$

1074. La quantité L se détermine par cette équation lorsque a, b c sont connues ; mais si L est donné, et que l'on considére a, b et c comme les coordonnées d'une surface courbe, à chaqne point de cette surface, la valeur d'un des moments d'inertie principaux sera la valeur

donnée de L; cette surface est du second ordre; et on peut mettre son équation sous la forme

$$(S) \ldots\ldots \left\{ \frac{a^2}{L-A} + \frac{b^2}{L-B} + \frac{c^2}{L-C} \right\} M = 1.$$

On a l'équation suivante du plan principal relativement auquel le moment d'inertie a la valeur donnée L, équation rapportée aux axes principaux du centre de gravité,

$$0 = \frac{x-a}{(A'-L)D'-E'F'} + \frac{y-b}{(B'-L)E'-F'D'} + \frac{z-c}{(C'-L)F'-D'E'}$$

ou en substituant, pour A', B', etc. leurs valeurs,

$$\frac{x-a}{(A-L)bcM} + \frac{y-b}{(B-L)acM} + \frac{z-c}{(C-L)abM} = 0$$

équation qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{a(x-a)}{L-A} + \frac{b(y-b)}{L-B} + \frac{c(z-c)}{L-C} = 0$$

et qui est celle d'un plan tangent à la surface dont j'ai donné l'équation (S) ci-dessus, au point de cette surface qui a a, b et c pour coordonnées.

1075. La surface dont je viens de parler a, pour plans diamétraux, les plans même des coordonnées, qui sont les plans principaux du corps, passant par son centre de gravité, et en supposant entre A, B et C, l'ordre de grandeur $A < B < C$, cette surface sera un ellipsoïde
pour toutes les valeurs de.......................... $L > C$
un hyperboloïde a une nappe lorsqu'on aura............ $C > L > B$
un hyperboloïde a deux nappes lorsqu'on aura.......... $B > C > A$

Enfin elle serait imaginaire si on avait $L < A$, ce qui conduit à la conclusion déja tirée du théorême de l'art. 1061, savoir, que le plus petit de tous les moments d'inertie qui répondent au centre de gravité est, en même temps, le plus petit de tous les moments d'inertie du corps.

1076. Supposons que L prenne toutes les valeurs qu'il peut recevoir, depuis A jusqu'à l'infini, et concevons toutes les surfaces d'hyperboloïdes à deux nappes, d'hyperboloïdes à une nappe et d'ellipsoïdes correspondantes à ces valeurs; ces trois séries de surfaces auront

les mêmes foyers, pour leurs sections principales, puisque les quarrés des excentricités de ces sections seront

$$\frac{C-B}{M}, \frac{C-A}{M}, \frac{B-A}{M}$$

il résnlte de là que l'une de ces surfaces étant donnée, aucune de celles de son espèce ne peut la rencontrer; mais qu'elle est coupée par toutes celles d'espèces différentes; d'où l'on peut tirer, comme conséquences, que, des trois moments d'inertie des plans principaux, qui répondent à un point quelconque de l'espace pris pour origine, il y en a nécessairement un dont la valeur est comprise entre A et B, un autre dont la valeur est entre B et C, et que le troisième surpasse C; et, comme les plans principaux, relatifs à ces moments, sont à angles droits les uns sur les autres, et qu'ils touchent respectivement les surfaces d'ellipsoïde et celles d'hyperboloïdes à une ou deux nappes, il s'ensuit que ces surfaces se coupent à angle droit, ce qui résulte, d'ailleurs, de l'observation faite ci-dessus, qu'elles ont même foyer pour leurs sections principales. On peut même aisément reconnaître qu'elles se pénètrent réciproquement selon leurs lignes de courbure, de telle manière, par exemple, que le système de tous les hyperboloïdes, à une nappe, rencontre l'un quelconque des ellipsoïdes selon les lignes d'une de ses courbures, et le système des hyperboloïdes à deux nappes coupe le même ellipsoïde selon le second système de ses lignes de courbure; et les tangentes à ces lignes de courbure sont précisément les axes principaux des corps qui répondent au point de l'espace où elles se croisent.

Telle est la distribution des axes principaux d'un corps autour de ceux qui répondent à son centre de gravité; en un point quelconque de l'espace, ces axes remarquables ne sont que des cas particuliers de certains systêmes d'axes obliques que l'on a nommés *conjugués*, et qui les comprennent d'une manière analogue à celle dont les axes principaux rectangulaires des lignes et surfaces du deuxième degré sont compris parmi leurs diamètres conjugués. Les élèves qui voudront faire une étude plus approfondie de ces intéressantes théories les trouveront exposées, avec plusieurs des propriétés générales que nous venons d'exposer, dans un excellent mémoire de M. Jacques Binet, inséré au tome IX du Journal de l'École Polytechnique.

Considérations particulières sur les moments d'inertie pris par rapport aux axes.

1077. La théorie du mouvement des corps emploie particulièrement les *moments d'inertie*, pris par rapport aux axes, et je vais, en conséquence, présenter aux élèves des considérations particulières à cette espèce de *moments*.

Les positions des différents points matériels m, du corps, ou du système étant déterminées par les coordonnées x, y et z et faisant, comme à l'article 1064,

$$\Sigma(mx^2)=A;\ \Sigma(my^2)=B;\ \Sigma(mz^2)=C$$
$$\Sigma(myz)=D;\ \Sigma(xz)=E;\ \Sigma(mxy)=F;$$

si on mène par l'origine, un nouvel axe de coordonnées, qu'on suppose être celui des $x_{,}$, faisant un angle θ avec le plan xy, et dont la projection orthogonale, sur ce plan xy, fasse un angle η avec l'axe des x; si, de plus, on prend pour axe des $y_{,}$ la perpendiculaire à l'axe des $x_{,}$ menée dans le plan xy et pour axe des $z_{,}$ la perpendiculaire au plan $x_{,}y_{,}$ menée par l'origine des x, y et z; il résultera de cette construction que les plans des xy et $x_{,}y_{,}$ formeront entre eux un angle égal à θ, et que leur ligne d'intersection formera avec l'axe des x un angle complément de η, et on aura, comme à l'art. 1066,

$$x_{,}=(x\cos.\eta+y\sin.\eta)\cos.\theta+z\sin.\theta$$
$$y_{,}=y\cos.\eta-x\sin.\eta$$
$$z_{,}=z\cos.\theta-(x\cos.\eta+y\sin.\eta)\sin.\theta$$

et on déduira de ces équations la valeur suivante du moment d'inertie, $\Sigma\{m(x_{,}^2+y_{,}^2)\}$, par rapport à l'axe des $z_{,}$, ou, en général, par rapport à une droite, menée par l'origine, et perpendiculaire à un plan

[redacted]

1078. En égalant séparément à zéro les différentielles de l'équation (M) de l'article précédent, prises, respectivement, par rapport à θ et à η, on a les valeurs de ces angles θ et η qui donnent la position du plan $x_{,}y_{,}$ perpendiculaire à l'axe des $z_{,}$ par rapport auquel la différentielle du moment d'inertie est égale à zéro. Le même calcul conduirait à ce résultat auquel on est parvenu fort simplement, article 1067, savoir, que la condition $d\Sigma\{m(x_{,}^2+y_{,}^2)\}=0$ (qui équivaut à la condition $d\Sigma(m z_{,}^2)=0$, ainsi qu'on l'a vu à l'art. cité) est satisfaite lorsque chacune des sommes $\Sigma(mz_{,}x_{,})$, et $\Sigma(mz_{,}y_{,})$ est égale à zéro.

Opérant ensuite sur l'équation (M) de l'article précédent, comme on a fait sur celle qui donne la valeur de L, art. 1067, ou sur son équivalente (1), art. 1068, on arriverait à une équation qui ne renfermerait plus que $\Sigma\{m(x_{,}^2+y_{,}^2)\}$ et les quantités A, B, C, D, E, F, Mais cette équation peut se déduire immédiatement, et avec facilité, de l'équation analogue (6) de l'art. 1068,

$$0=\begin{cases}(A-L)(B-L)(C-L)\\ -D^2(A-L)-E^2(B-L)-F^2(C-L)\\ +2DEF\end{cases}$$

faisant pour abréger $\Sigma\{m(x_{,}^2+y_{,}^2)\}=M$, on aura............
$M+L=\Sigma\{m(x_{,}^2+y_{,}^2+z_{,}^2)\}=\Sigma\{m(x^2+y^2+z^2)\}=A+B+C$
d'où $L=A+B+C-M$, et l'équation précédente devient, lorsqu'on y substitue cette valeur,

$$(\mu)\ldots 0=\begin{cases}(M-\overline{B+C})(M-\overline{A+C})(M-\overline{A+B})\\ -D^2(M-\overline{B+C})-E^2(M-\overline{A+C})-F^2(M-\overline{A+B})\\ +2DEF\end{cases}$$

le moment d'inertie M, par rapport à l'axe des z, est donné par les moments d'inertie $A+B$, $A+C$, $B+C$ pris par rapport aux axes des z, y et x.

On trouverait, pour l'équation précédente, trois racines réelles comme on les a trouvées pour l'équation (6) de l'art. 1068; et l'existence de ces racines réelles, de (μ), peut se déduire, immédiatement, de ce qui a été dit, art. 1069; on a vu, dans cet article, que la condition $d\Sigma(m z_{,}^2)$ qui équivaut à $dL=0$, en comportait deux autres, savoir, $d\Sigma(my^2_{,,})=0$ et $d\Sigma(m x^2_{,,})=0$, les axes des $x_{,,}$ et des $y_{,,}$ étant renfermés dans le plan $x_{,}y_{,}$, perpendiculaires l'un sur l'autre, et se rencontrant à l'origine commune; or ces trois équations donnent,

par leurs combinaisons, $d\Sigma\{m(x_{,,}^2+y_{,,}^2)\}=0$, $d\Sigma\{m(x_{,,}^2+z_{,}^2)\}=0$, $d\Sigma\{m(y_{,,}^2+z_{,,}^2)\}=0$, résultat qu'on obtiendrait aussi, art. 1065 et 1067, en considérant les 1ers. membres de ces dernières équations, comme les différentielles respectives de $R-\Sigma(mz^2_{,})$, $R-\Sigma(my^2_{,,})$, $R-\Sigma(mx^2_{,,})$; donc lorsque la différentielle du moment d'inertie... $\Sigma\{m(x_{,,}^2+y_{,,}^2)$, pris par rapport à l'axe des $z_{,}$, est nulle, il existe deux autres axes, passants par l'origine, perpendiculaires entre eux et à l'axe des z, qui jouissent de la même propriété.

1079. J'ai désigné, art. 1070, par le nom de *plans principaux*, les trois plans par rapport auxquels les différentielles des moments d'inertie sont nulles; les axes qui sont les lignes d'intersections de ces plans, et qui jouissent de la même propriété relativement aux moments d'inertie qui les concernent, ont été appelés *axes principaux*. Ainsi, pour un point quelconque de l'espace, il y a en général trois droites passant par ce point, dont l'une quelconque est perpendiculaire au plan renfermant les deux autres, et qui ont, par rapport à un corps de position fixe, les propriétés qui constituent des axes principaux; on verra bientôt que dans les cas particuliers où le nombre de ces droites excède trois il est infini.

1080. Pour déduire les positions inconnues des axes principaux, des positions connues de trois axes coordonnés il est, en général, indispensable de résoudre une équation du troisième degré; mais les calculs deviennent beaucoup plus faciles lorsqu'un de ces axes principaux est donné, et qu'on a, seulement, à déterminer les positions des deux autres.

Tous les points du corps étant étant rapportés aux trois axes des x,

[redacted]

désignant par ι l'angle formé par l'un de ces axes et par l'axe des $x_{,}$, par i la tangente de cet angle, donnant, d'ailleurs, à $A_{,}$, $B_{,}$, $F_{,}$, la même signification qu'à l'art. 1069, on aura par l'élimination de $L_{,}$ entre les équations (3) et (4) de l'article cité, les deux valeurs de i qui résolvent la question; cette élimination donne

$$\frac{1}{i}-i=\frac{A_{,}-B_{,}}{F_{,}}$$

$$\frac{1}{i}-i=\text{cot.}\,\iota-\text{tang.}\,\iota=2\,\text{cot.}\,2\iota,\ \text{donc}$$

$$(T)\ldots\ldots\ \text{tang.}\ 2\iota=\frac{2F_{,}}{A_{,}-B_{,}}$$

Une même tangente appartient toujours à deux angles différants, entre eux, d'une demi-circonférence, et dont, par conséquent, les moitiés diffèrent, entre elles, d'un quart de circonférence; et on voit, par là, que l'équation précédente, en donnant la position de celui des deux axes principaux cherchés, qui doit faire l'angle ι avec l'axe des $x_{,}$, indique en même temps l'existence d'un autre axe principal, coupant le premier à angle droit.

1081. On peut faire subir à l'équation (5) de l'art. 1069,

$$(A_{,}-L_{,})(B_{,}-L_{,})-F_{,}^{2}=0$$

une transformation analogue à celle qu'a éprouvée l'équation (6) de l'art. 1068, pour devenir l'équation (μ) de l'art. 1078; par cette transformation l'équation (5), art. 1069, au lieu de donner la valeur du moment d'inertie $L_{,}$, ou $\Sigma(mx_{,,}^{2})$, pris par rapport au plan $y_{,,}z_{,}$, perpendiculaire à l'axe des $x_{,,}$, donnera le moment d'inertie...., $\Sigma\{m(y_{,,}^{2}+z_{,}^{2})\}$ pris par rapport à cet axe des $x_{,,}$.

Faisant $\Sigma\{m(y_{,,}^{2}+z_{,}^{2})\}=M_{,}$, on aura $M_{,}+L_{,}=A_{,}+B_{,}+C_{,}$, équation qui dérive de $x_{,}^{2}+y_{,}^{2}+z_{,}^{2}=x_{,,}^{2}+y_{,,}^{2}+z_{,}^{2}$, d'où

$$L_{,}=A_{,}+B_{,}+C_{,}-M_{,}$$

et substituant cette valeur dans l'équation (5) de l'art. 1069, après avoir fait,

$$A_{,}+C_{,}=\mu_{,};\ B_{,}+C_{,}=\mu_{,,}$$

cette équation se chongera en

$$(\mu')\ldots\ldots\ldots\ldots\begin{cases}(M_{,}-\mu_{,,})(M_{,}-\mu_{,})-F_{,}^{2}=0\\[2ex] M_{,}=\dfrac{\mu_{,}+\mu_{,,}}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{\mu_{,,}-\mu_{,}}{2}\right)^{2}+F_{,}^{2}}\end{cases}$$

$\mu_{,}$ $\mu_{,,}$ sont, respectivement, les moments d'inertie par rapport à l'axe des $x_{,}$ et des $y_{,}$; et on peut à $\mu_{,,}-\mu_{,}$ substituer la différence équivalente $B_{,}-A_{,}$.

On serait parvenu à la même équation, si au lieu de chercher la valeur de $\Sigma\{m(y_{,,}^2+z_{,}^2)\}$ on eût cherché celle de $\Sigma\{m(x_{,,}^2+z_{,}^2)\}$, c'est-à-dire, le moment d'inertie par rapport à l'axe de $y_{,,}$; les deux moments sont donnés par les racines réelles de l'équation (μ') qui a, avec l'équation (μ) de l'art. 1078, les mêmes relations qui lient l'équation (5) de l'art. 1069 avec l'équation (6) de l'art. 1068.

Quant à la tangente i de l'angle ι sa valeur et la forme de son expression restent les mêmes qu'à l'article précédent.

1082. l'hypothèse de l'égalité des deux racines de l'équation (μ) de l'article précédent, ou de l'égalité des moments d'inertie pris par rapport aux axes des $x_{,,}$ et des $y_{,,}$, donne

$$\sqrt{\left(\frac{\mu_{,,}-\mu_{,}}{2}\right)^2+F_{,}^2}=0$$

et les deux quarrés qui se trouvent sous le radical étant essentiellement positifs, cette équation ne peut être satisfaite que par les valeurs $F_{,}=0$ et $\mu_{,}=\mu_{,,}$ cette dernière égalité étant équivalente à $A_{,}=B_{,}$. Ces valeurs substituées dans l'équation (μ') de l'article précédent et dans les équations (5) et (4) de l'art. 1069, donnent

$$M_{,}=\mu_{,}=\mu_{,,};\ L_{,}=A_{,}=B_{,};\ i=\frac{0}{0}.$$

D'où on conclut que lorsque deux axes principaux, qui se coupent en un point désigné par a, ou deux plans principaux dont la ligne d'intersection est désignée par λ, ont leurs moments d'inertie égaux, les [redacted]

1083. On a vu, à l'article cité, qu'en supposant que les plans xy, xz, yz, étaient principaux, et en désignant, par K, le moment d'inertie pris relativement à un plan quelconque, faisant avec les plans des yz, des xz et des xy, les angles respectifs α, β, γ, on avait l'équation.

$$K = A \cos.^2 \alpha + B \cos.^2 \beta + C \cos.^2 \gamma.$$

A, B et C représentant les quantités $\Sigma(mx^2)$, $\Sigma(my^2)$, $\Sigma(mz^2)$, c'est-à-dire les moments d'inertie par rapport aux plans principaux.

Si on retranche le premier membre de $A+B+C$ et le deuxième de $(A+B+C)(\cos.^2\alpha+\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma)$, ce qui ne change pas l'égalité des deux membres, vu que $(\cos.^2\alpha+\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma)=1$; on aura, en faisant $A+B+C-K=N$

$$(\phi)\ldots\ldots N=(B+C)\cos.^2\alpha+(A+C)\cos.^2\beta+(A+B)\cos.^2\gamma.$$

N est la valeur du moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire au plan qui forme les angles α, β, γ avec les plans principaux des yz, xz et xy, et cet axe forme, par conséquent, les mêmes angles avec les axes des x, des y et des z, respectivement perpendiculaires aux plans yz, xz et xy. De plus $B+C$, $A+C$, et $A+B$ sont les moments d'inertie respectifs, pris par rapport aux axes des x, des y et des z; donc le moment d'inertie, par rapport à une droite quelconque passant par l'origine, se compose des produits des moments d'inertie pris par rapport à chacun des axes coordonnés (lorsque ces axes sont principaux) par les quarrés des cosinus des angles respectifs que chacun de ces axes fait avec la droite passant par l'origine.

1084. Les axes coordonnés continuant à être des axes principaux, si les trois moments d'inertie par rapport à ces axes sont égaux entre eux, on aura

$$A+B=A+C=B+C$$

ce qui suppose $A=B=C$, et la valeur de N, déduite d'après cette hypothèse, de l'équation ϕ de l'article précédent sera............. $N=2A(\cos.^2\alpha+\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma)=2A$ puisque $\cos.^2\alpha+\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma=1$; d'où on conclut que lorsque les moments d'inertie, pris par rapport aux trois axes principaux rectangulaires, sont égaux entre eux, la valeur commune de ces moments est celle du moment d'inertie pris par rapport à toute droite qui passe par le point unique où les trois

axes principaux sont censés se couper; tout axe mené par ce point, est un axe principal.

La même propriété a lieu pour les plans principaux, on a, art. 1072, par la condition de $A=B=C$, $K=A\,(\cos.^2\alpha+\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma)=A$. Le moment d'inertie, par rapport à tout plan passant par l'origine, a une valeur constante.

1085. Je terminerai ce chapitre par l'analyse d'un problême très-curieux, sur les moments d'inertie, dont MM. Poisson et Jacques Binet ont trouvé, en même temps, la solution. Il s'agit de déterminer les points d'un corps, si toutes fois il en existe, par rapport auxquels les trois moments d'inertie principaux, et, par conséquent, tous les moments d'inertie soient égaux.

Soit m l'élément de masse, et supposons que les axes des coordonnées x, y et z, qui déterminent sa position, soient des axes principaux, dont l'intersection commune se trouve au centre de gravité; on a, d'après ces deux conditions,

$$\Sigma(xm)=0;\ \Sigma(ym)=0;\ \Sigma(zm)=0$$
$$\Sigma(xym)=0;\ \Sigma(xym)=0;\ \Sigma(yzm)=0.$$

Représentons les moments d'inertie respectifs, pris relativement aux axes des x, y et z, par

$$a=\Sigma\{m(y^2+z^2)\};\ b=\Sigma\{m(x^2+z^2)\};\ c=\Sigma\{m(x^2+y^2)\}$$

désignons par ξ, η et ζ, les coordonnées inconnues d'un des points demandés, rapportées aux axes des x, y et z, de manière qu'on ait, pour ce point demandé,

$$x=\xi;\ y=\eta;\ z=\zeta.$$

Transportons l'origine à ce même point, sans changer la direction des [redacted]

et, en vertu des propriétés du centre de gravité et des axes principaux, ces équations se réduisent à

$$\xi\eta M=0;\ \xi\zeta M=0;\ \eta\zeta M=0,$$

en désignant par M la masse entière du corps.

Or, pour satisfaire à ces trois dernières équations, il est nécessaire que deux des trois quantités ξ, η et ζ soient nulles; si donc le point demandé existe, il ne peut se trouver que sur l'un des axes des coordonnées x, y, z. Je fais $\eta=0$ et $\zeta=0$ et je laisse ξ indéterminé, ce qui revient à supposer le point demandé sur l'axe des x, à une distance η de l'origine ou du centre de gravité. Alors les moments d'inertie du corps, relatifs à ce point, seront a, par rapport à l'axe des x, et, art. 1061, $b+M\xi^2$ et $c+M\xi^2$ par rapport aux axes parallèles à ceux des y et des z. On aura donc, d'après les conditions du problême,

$$a=b+M\xi^2=c+M\xi^2$$

mais, pour que ces équations soient possibles, il faut qu'on ait $b=c$, et l'égalité de ces deux quantités donne

$$\xi^2=\frac{a-c}{M}.$$

Il faudra donc encore que $a>c$ afin que la quantité ξ soit réelle; cela étant, on aura, pour ξ, deux valeurs réelles égales et de signes contraires, savoir;

$$\xi=\sqrt{\frac{a-c}{M}};\ \xi=-\sqrt{\frac{a-c}{M}}.$$

Par conséquent il existera deux points qui auront la propriété demandée, et qui seront situés sur l'axe des x, à égales distances de part et d'autre du centre de gravité.

1086. On déduit de cette analyse les conséquences suivantes;

1°. Quand les trois moments d'inertie a, b, c, relatifs aux axes principaux qui se coupent au centre de gravité d'un corps, sont inégaux, il n'existe aucun point par rapport auquel les moments d'inertie de ce corps soient tous égaux.

2°. Si deux des trois moments a, b, c sont égaux, et que le moment inégal soit le plus grand des trois, il existe deux points par rapport auxquels tous les moments d'inertie sont égaux, ces points sont situés sur l'axe principal qui se rapporte au plus grand des trois moments

a, b, c et sont placés symétriquement de part et d'autre du centre de gravité.

3°. Lorsque les trois moments a, b, c sont égaux, il n'y a pas d'autre point que le centre de gravité par rapport auquel tous les moments d'inertie soient égaux.

Formules pour le calcul des moments d'inertie de différents corps.

1087. Les solides de révolution sont ceux qui se présentent le plus fréquemment dans les applications qu'on a à faire des formules des moments d'inertie; et, en conséquence, je vais les donner pour exemple de ces applications.

Fig. 11. nos. 1 et 2. Soit DKE, n°. 1, la courbe génératrice d'un solide homogène de révolution, la droite AF l'axe de ce solide; et $QRST$, n°. 2, sa section faite par un plan perpendiculaire à AF et passant par le point P. Concevons une autre section, faite parallèlement à la première, à une distance infiniment petite PP'; ces deux sections comprendront, entre elles, une tranche élémentaire du solide, dont le cercle $QRST$ sera la base, et PP' l'épaisseur.

Supposons que le centre de gravité de la partie du solide, comprise entre les sections perpendiculaires à AF, faites aux points A et B, soit en I, élevons les perpendiculaires AD, IK, PR, $P'R'$, et BC sur AB; soient, dans la section, n°. 2, les diamètres QS et TR perpendiculaires l'un sur l'autre; menons les rayons PV et PW formant, entre eux, un angle infiniment petit, traçons dans cet angle les deux arcs Nn et $N'n'$, concentriques à VW, et, du centre du trapèze élémentaire $Nn\,n'N'$, abaissons la perpendiculaire qM sur le dia-

[redacted]

1088. D'après l'état des choses qu'on vient d'exposer, le trapèse $Nnn'N'$ est la base d'un prisme élémentaire, dont PP' est la hauteur et dont le volume $= dr.rd\phi.d\xi = m$; et puisque la densité $= 1$, ce volume représentera la masse du prisme élémentaire.

Les théorêmes connus sur la cubature des solides de révolution et sur les centres de gravité, fournissent les équations,

$$M = \pi\int(\eta^2\, d\xi)\,;\, f = \frac{\pi\int(\eta^2\xi\, d\xi)}{M}.$$

d'où on conclut

$$(1)\ldots Mf^2 = \pi f^2\int(\eta^2 d\xi) = \pi f\int(\eta^2\xi\, d\xi).$$

$\int(\eta^2 d\xi)$ et $\int(\eta^2\,\xi\, d\xi)$ sont les intégrales définies prises dans l'étendue entière de M.

La génération du solide donne $\int(my^2) = \int(m\,z^2)$ et, faisant, comme à l'article 1064, $A = \int(m\,x^2)$, on aura $B = \int(my^2 = \int(mz^2)$.

Cherchant d'abord la valeur de A, on a $\int(mx^2) =$

$$\int\{m(\xi - f)^2\} = \int\!\!\int\!\!\int\{(\xi - f)^2\, rdrd\xi d\phi\}.$$

L'intégrale prise, d'abord, par rapport à ϕ, depuis $\phi = 0$ jusqu'à $\phi = 2\pi$, (on désigne, par π, la demi-circonférence dont le rayon $= 1$) a pour valeur.............................. $2\pi\int\!\!\int\{(\xi - f)^2\, rdrd\xi\}$ elle se rapporte à un anneau circulaire dont le rayon $= r$, la largeur dans le sens du rayon $= dr$, et l'épaisseur dans le sens de l'axe $= d\xi$.

Intégrant, ensuite, par rapport à r, on a, pour la valeur indéfinie de cette deuxième intégrale, $\pi\int\{(\xi - f)^2\, r^2\, d\xi\}$ et, pour sa valeur définie depuis $r = 0$, jusqu'à $r = \eta$........... $\pi\int\{(\xi - f)^2\eta^2\, d\xi\}$

Cette intégrale s'applique à une tranche élémentaire du solide comprise entre deux plans perpendiculaires à l'axe, et coupant cet axe en deux points infiniment près l'un de l'autre; on a donc

$$A = \pi\int\{(\xi - f)^2\eta^2 d\xi\} = \pi\{f^2\int(\eta^2 d\xi) - 2f\int\eta^2\xi d\xi) + \int(\eta^2\xi^2 d\xi)\}$$

équation qui, combinée avec les équations (1), devient

$$(1')\ldots\ldots\ldots\ldots\quad A = M\left\{\frac{\int(\eta^2\,\xi^2\, d\xi)}{\int(\eta^2\, d\xi)} - f^2\right\}$$

Cherchant ensuite la valeur de B, on a..............................
$B = \int(my^2) = \int\!\!\int\!\!\int(rdrd\xi\, d\phi.r^2\cos.^2.\phi)$. pour intégrer par rapport à ϕ, on observera que $\int d\phi\,\cos.^2\phi = \int d\phi\,(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos.\,2\phi) = \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{4}\sin.\,2\phi$

et cette intégrale, prise depuis $\phi = 0$ jusqu'à $\phi = 2\pi$, se réduit à π, à cause de $\sin.(4\pi) = 0$, on a donc $B = \pi\int\int(r^3 dr d\xi)$; intégrant par rapport à r, et prenant l'intégrale depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \eta$, on a $B = \frac{1}{4}\pi\int(\eta^4 d\xi)$, ou en multipliant par M et divisant par la valeur $\pi\int\eta^2 d\xi$, de M,

$$(3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B = C = \frac{\frac{1}{4}M\int(\eta^4 d\xi}{\int(\eta^2 d\xi)}$$

Toutes les expressions qui ne renferment plus que η, ξ et $d\xi$ sont intégrables, ou immédiatement, ou par les quadratures, parce que ξ et η étant les coordonnées de la courbe génératrice, η est une fonction de ξ donnée par l'équation de cette courbe.

1089. D'après ces valeurs on a l'expression du moment d'inertie par rapport à l'axe des x, ou à l'axe de révolution,

$$= B + C = 2B = \frac{1}{2} \cdot \frac{M\int(\eta^4 d\xi}{\int(\eta^2 d\xi)}$$

Et l'expression du moment d'inertie, par rapport à une des droites IK perpendiculaires à l'axe de révolution, et passant par le centre de gravité $= A + B = M\left\{\frac{\int\eta^2(4\xi^2 + \eta^2)d\xi}{4\int(\eta^2 d\xi)} - f^2\right\}$

Le moment d'inertie par rapport à l'axe ID perpendiculaire à l'axe de rotation, et passant par l'origine A, se trouve, art. 1061, en ajoutant au moment d'inertie pris par rapport à IK, c'est-à-dire à $A + B$, le produit Mf^2 de la masse M par le quarré de la distance entre les deux axes. On a donc

moment d'inertie par rapport à $AD = \frac{\int\eta^2(4\xi^2+\eta^2)d\xi}{4\int\eta^2 d\xi} . M.$

Cette quantité augmentée de Ma^2 donne, art. 1061, le moment d'inertie par rapport à un diamètre quelconque d'une des bases du cylindre, moment qui, par conséquent, a pour valeur $M(\frac{4}{3}a^2 + \frac{1}{4}c^2)$

La masse M du cylindre, proportionnelle à son volume, peut être, dans l'usage, représentée ou par ce volume, ou par le poids du corps.

En faisant, dans ces formules, $c = 0$, on a le moment d'inertie d'une ligne droite matérielle, ou d'un fil rectiligne homogène, dont la longueur $= 2a$, par rapport à un axe qui lui serait perpendiculaire, moment égal à $\frac{Ma^2}{3}$, ou à $\frac{4}{3}Ma^2$ suivant que l'axe coupe la ligne au milieu ou à une des extrémités de sa longueur.

M représente la masse du fil, proportionnelle à sa longueur, qui dans l'usage peut être représentée, ou par cette longueur, ou par le poids du corps.

Pour avoir le moment d'inertie d'un disque très-mince, ou d'un plan matériel circulaire et homogène, dont la masse M, proportionnelle à la surface, peut être représentée dans l'usage, ou par cette surface, ou par le poids du corps, il faut faire $a = 0$ dans les valeurs précédentes, et on a

Moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire au plan du cercle et passant par son centre $= \frac{1}{2}Mcc$.

Moment d'inertie par rapport à un diamètre $= \frac{1}{4}Mcc$,

1091. Soit un cône droit à base circulaire ; prenons l'origine de ξ au sommet, a étant la hauteur du cône, l'origine des x sera, art. 321 et 322, à une distance $= \frac{3}{4}a$ de l'origine des ξ. On aura, en désignant le rayon de la base par c,

$$\eta = \frac{c}{a}\,\xi\,;\; f = \tfrac{3}{4}\,a\,;\; M = \tfrac{1}{3}\,a\,.\,\pi c^2$$

et par les formules générales des art. 1088 et 1089, on a d'abord le moment d'inertie, par rapport à l'axe du cône,

$$B + C = 2B = \tfrac{1}{2}M \cdot \frac{\frac{c^4}{a^4}\int \xi^4\, d\xi}{\frac{c^2}{a^2}\int \xi^2\, d\xi} = \tfrac{3}{10}\,Mc^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{L'intégrale étant} \\ \text{prise depuis } \xi = 0 \\ \text{jusqu'à } \xi = a \end{array} \right.$$

et pour avoir ensuite le moment d'inertie par rapport au diamètre de

la section, parallèle à la base, faite par le centre de gravité, on commencera par calculer $A = M \left\{ \frac{\frac{c^2}{a^2}\int \xi^4 d\xi}{\frac{c^2}{a^2}\int \xi^2 d\xi} - \frac{9}{16} a^2 \right\} = \frac{3}{80} M a^2$

Les intégrales étant prises depuis $\xi = 0$ jusqu'à $\xi = a$, et on aura le moment d'inertie cherché $= A + B = \frac{3}{80} M (a^2 + 4c^2)$

Le moment d'inertie par rapport à un diamètre de la base, se trouve par le théorême de l'art. 1061, en ajoutant $\frac{1}{16} M a^2$ au résultat qu'on vient de trouver.

1092. Enfin soit une sphère dont le rayon $= a$, on aura

$$f = a;\ \eta^2 = 2a\xi - \xi^2;\ M = \tfrac{4}{3}\pi a^3;\ A = B = C.$$

$$B = \frac{\int (2a\xi - \xi^2)^2 d\xi}{4\int (2a\xi - \xi^2) d\xi} M = \frac{\int (4a^2\xi^2 - 4a\xi^3 + \xi^4) d\xi}{4\int (2a\xi - \xi^2) d\xi}$$

prenant les intégrales depuis $\xi = 0$ jusqu'à $\xi = 2a$, on trouve

$$B = \tfrac{1}{5} M a^2.$$

Le moment d'inertie par rapport à un diamètre quelconque étant double de la valeur de B, a, par conséquent, pour valeur $\frac{2}{5} M a^2$.

1093. La détermination du moment d'inertie d'une portion de cône droit dont les deux bases sont perpendiculaires sur l'axe, d'un secteur ou d'un segment sphérique, etc. s'obtient par l'emploi convenable des valeurs qui appartiennent aux limites des intégrales, fait de manière à obtenir exactement les expressions définies de ces intégrales, depuis une certaine valeur déterminée de ξ jusqu'à une autre valeur déterminée de la même variable. Il n'y a rien d'ailleurs à changer aux [redacted]

forme quelconque, assujetti à tourner autour d'un axe fixe horizontal, que je désigne par le nom d'*axe de suspension*. Les phénomènes du mouvement de ce pendule offrent un sujet de recherches important et curieux, et un premier exemple, fort instructif, de l'application des formules du mouvement de rotation d'un corps, en ayant égard à l'*étendue* et la *figure*.

1096. Je mène, par le centre de gravité du corps, une droite perpendiculaire à l'axe de suspension, droite que j'appelle *ligne des centres*, et je désigne, par θ, l'angle que cette ligne des centres fait au bout du temps t, avec le plan vertical passant par l'axe de suspension, angle qui peut représenter l'inclinaison générale du corps.

Soient, de plus, a la distance du centre de gravité du corps à l'axe de suspension, ou le rayon du cercle que décrit ce centre pendant son mouvement, M la masse du corps, et Mk^2 le moment d'inertie de ce corps par rapport à un axe parallèle à l'axe de suspension, et passant par le centre de gravité, le moment d'inertie par rapport à l'axe de suspension sera, art. 1061, égal à $M(a^2+k^2)$.

Il faut encore, pour avoir l'expression de la force accélératrice angulaire, au bout du temps t, trouver la somme des moments, par rapport à l'axe de suspension, de toutes les puissances qui agissent snr M; or la pesanteur, qui, seule, agit sur ce corps, imprime à chaque molécule m, une force motrice gm (en désignant par g la force accélératrice due à la pesanteur) dont le moment par rapport à l'axe de suspension. est, au bout du temps t, égal au produit gm, par la distance horizontale de m au plan vertical passant par l'axe de suspension. Cette distance étant représentée par ξ, on a, art. 273, $\Sigma(\xi m) = Ma \sin.\theta$, en faisant attention que $a \sin.\theta$ est, au bout du temps t, la distance du centre de gravité de M au plan vertical passant par l'axe de suspension.

Ces déterminations fournissent, art. 1059, l'équation

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{ag \sin.\theta}{a^2+k^2}$$

ϑ étant la vitesse angulaire, ou la vitesse d'un des points placés à l'unité de distance de l'axe de suspension.

Multipliant le premier membre de cette équation par ϑ et le deuxième membre par la valeur $\dfrac{d\theta}{dt}$ de ϑ, faisant attention que $d\theta$ et dt doivent

avoir des signes contraires, parceque θ diminue pendant que t augmente, et intégrant, après avoir multiplié, de part et d'autre, par dt, on a $\frac{1}{2}\vartheta^2 = \frac{ag\cos.\theta}{a^2+k^2} + C.$

Pour déterminer la constante, il faut d'abord faire une hypothèse sur la vîtesse initiale, et je la supposerai nulle; désignant, ensuite, par f, la valeur initiale de θ, on aura, au premier instant du mouvement, $t=0$, $\vartheta=0$, et $\theta=f$, d'où $C=-\frac{ag\cos.f}{a^2+k^2}$, et

$$(2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ \vartheta = \frac{2ag}{a^2+k^2}(\cos.\theta-\cos.f)$$

Désignant par η la hauteur verticale dont le centre de gravité est descendu, lorsque la ligne des centres a décrit l'angle θ, on a...... $\eta = a(\cos.\theta-\cos.f)$ et l'équation précédente devient

$$(3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ \vartheta^2 = \frac{2g\eta}{a^2+K^2}$$

Si on fait dans l'équation (2), $k=0$, on retrouve l'éqnation (2)' de l'art. 951 donnant la vîtesse angulaire du pendule simple. La raison de cette identité est que l'hypothèse de $k=0$, réduit la masse M, qui n'est pas supposée nulle, à n'être qu'un point matériel.

1097. Pour peu qu'on ait présente à la mémoire la théorie du pendule simple, dont je viens de parler, on conçoit aisément que les différents points matériels du corps M, qui, en vertu de leurs liaisons réciproques, ont une vîtesse angulaire commune, tendent, à raison de [redacted]

de l'axe de suspension, n pourra être tel qu'on ait...............

$\frac{2ag}{a^2+k^2} > \frac{2g}{na}$, ou $\frac{na^2}{a^2+k^2} > 1$, et, au bout du temps t, la vîtesse angulaire de M surpassera celle qu'aurait ce dernier point, dans le cas où, séparé de M, et assujetti aux mêmes conditions initiales, il se mouverait, comme pendule simple. Ainsi en considérant toujours, sur la ligne des centres, afin de fixer les idées, la suite des points matériels qui s'y trouvent, on voit que ces points sont en partie retardés, et en partie accélérés, dans leurs mouvements; la série de ceux qui sont retardés, étant du côté de l'axe de suspension par rapport à la série de ceux qui sont accélérés ; ce sont des compensations de mouvements perdus et gagnés, opérées dans le système, par la liaison des points matériels qui le composent, et il est naturel de penser que sur une droite quelconque, partant de l'axe de suspension, il y a, à la séparation des deux séries de points retardés et de points accélérés, un point qui se meut comme s'il était séparé de tous les autres et assujetti à tourner seul autour de l'axe de suspension en conservant sa distance à cet axe.

1098. Cherchons sur la ligne des centres la position du point jouissant de la propriété dont nous venons de parler, c'est-à-dire, cherchons la position du point de cette ligne des centres qui se meut autour de l'axe de suspension, comme s'il ne tenait pas aux autres points du corps, et qu'il fut simplement lié à l'axe ; en désignant, par λ, la distance de ce point à l'axe de suspension, on aura, art. 951, d'après la condition que nous venons d'énoncer, la valeur $\sqrt{\frac{2g}{\lambda}(\cos.\theta-\cos.f)}$ de la vîtesse angulaire de ce point, au bout du temps t; mais puisque le même point fait partie du corps M, il a la vîtesse angulaire.....

$\sqrt{\frac{2ag}{a^2+k^2}(\cos.\theta-\cos.f)}$, commune à tous les points du corps, ce qui fournit l'équation

$$\sqrt{\frac{2g}{\lambda}(\cos.\theta-\cos.f)} = \sqrt{\frac{2ag}{a^2+k^2}(\cos.\theta-\cos.f)},$$

de laquelle on conclut

(A)................... $\lambda = a + \frac{k^2}{a}$

1099. Le point de la ligne des centres que nous venons de déterminer, et qui se trouve à une distance $a + \frac{k^2}{a}$ de l'axe de suspension, s'appelle *centre d'oscillation ;* il est plus abaissé de la quantité $\frac{k^2}{a}$, que le centre de gravité, et on voit que longueur $a + \frac{k^2}{a}$ est celle du pendule simple qui serait *synchrone* au pendule composé, en supposant l'un et l'autre pendule assujetti aux mêmes conditions initiales.

Propriétés et usages du pendule composé ; appareil nouveau pour mesurer la longueur du pendule simple qui bat les secondes.

1100. J'ai dit, art. 1097, qu'il se faisait, dans le mouvement du pendule composé, une compensation de mouvements gagnés et de mouvements perdus ; ainsi, lorsque le pendule a décrit un certain angle, une molécule quelconque m, descendue de la hauteur h, et, qui, sans son état de liaison avec le corps, gagnerait, par cette descente, une quantité de mouvement $m\sqrt{2gh}$, en aura une effective plus grande ou plus petite que $m\sqrt{2gh}$, suivant la position de m ; mais la compensation ne sera pas telle que la somme des *quantités de mouvement* gagnées dans l'étendue entière du corps, soit égale à la somme des quantités de mouvement perdues. En effet, lorsque la ligne des

dule composé, une ligne droite matérielle, et homogène, perpendiculaire à l'axe de suspension, les longueurs des différentes parties de cette ligne pourront représenter leurs masses, et ρ étant la distance de l'élément de masse $d\rho$, à l'axe de suspension, on aura, en désignant la longueur totale du pendule par r, $a^2+k^2=\frac{\int\rho^2 d\rho}{r}=\frac{1}{3}r^2$, l'intégrale étant prise dans l'étendue entière de r; l'intégrale $\Sigma(m\rho)$, prise dans la même étendue, est $\frac{1}{2}r^2$, et la somme des quantités de mouvement effectives, lorsque le centre de gravité est descendu de la hauteur η, est $\left(\frac{2g\eta}{\frac{1}{3}r^2}\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{r^2}{2}$ ou $r\sqrt{\frac{3}{2}g\eta}$; d'un autre côté, on a

$$h=\frac{\rho}{a}\eta \text{ et } \Sigma(m\sqrt{2gh})=\Sigma\left\{d\rho\sqrt{\frac{2g.\eta\rho}{a}}\right\}=\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2g\eta}{a}}$$

(l'intégrale étant prise dans l'étendue entière du corps) valeur qui se réduit $\frac{4}{3}r\sqrt{g\eta}$, vu que $a=\frac{1}{2}r$. Le rapport $\frac{r\sqrt{\frac{3}{2}g\eta}}{\frac{4}{3}r\sqrt{g\eta}}$ se réduit à......

$\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{27}{32}}$, quantité plus petite que l'unité, ainsi la somme des *quantités de mouvement* simples, perdues, excède la somme des quantités de mouvement gagnées, la compensation, à cet égard, n'est pas complète.

1101. Il n'en sera pas de même si on substitue à la somme des *quantités de mouvement* simples $\Sigma(m\sqrt{2gh})$ que les molécules m gagneraient, en descendant librement des hauteurs h, la somme des *forces vives*, $\Sigma(2gmh)$ qui seraient engendrées par les mêmes descentes libres; cette dernière somme est égale à la somme des *forces vives* effectives, en sorte qu'à cet égard la compensation des pertes et des gains est exacte dans tout le système. En effet, on a, par la propriété du centre de gravité, $\Sigma(2gmh)$ ou $2g\Sigma(mh)=2gM\eta$, et, d'une autre part, la somme des forces vives effectives a, pour valeur,

$$\Sigma(\theta^2 m\rho^2)=\frac{2g\eta}{a^2+k^2}\Sigma(m\rho^2),$$ quantité qui se réduit à $2Mg\eta$, en substituant à $\Sigma(m\rho^2)$ sa valeur $M(a^2+k^2)$, et qui est identique avec la première.

1102. Une autre propriété du pendule composé est la *réciprocité* de l'axe de de suspension et d'un axe qui lui serait parallèle, et qui passerait par le centre d'oscillation, c'est-à-dire, l'égalité des longueurs des pendules synchrones, lorsqu'on emploie l'axe de suspension dans la position qui lui a été assignée ci-dessus, ou lorsqu'on lui substitue un axe passant par le centre d'oscillation, les deux axes étant supposés parallèles et compris dans le plan qui renferme le premier axe et le centre de gravité; pour démontrer cette *réciprocité*, il faut adapter l'expression $a+\frac{k^2}{a}$ de la longueur du pendule synchrone, qui a lieu lorsque l'axe de suspension est à la distance a du centre de gravité, au cas où cette distance serait celle du centre de gravité au centre d'oscillation et deviendrait, par conséquent, ..., $a+\frac{k^2}{a}-a$, ou $\frac{k^2}{a}$; substituant donc $\frac{k^2}{a}$ à a, dans $a+\frac{k^2}{a}$, cette expression devient $\frac{k^2}{a}+\frac{ak^2}{k^2}=\frac{k^2}{a}+a$; ainsi une même longueur λ, de pendule synchrone, convient et à l'axe placé à une distance a du centre de gravité, et à une autre axe placé à une distance $\lambda-a$ de ce centre, parallèle au premier, et situé avec lui dans un plan passant par le centre de gravité.

1103. Un axe situé dans le même plan que les axes réciproques dont je viens de parler, qui leur serait parallèle, et qui traverserait le corps, du côté opposé à celui de l'axe primitif de suspension, par rapport au centre de gravité, à la distance a de ce centre, serait évi-

[redacted]

de gravité, prenons cette ligne pour axe de deux surfaces cylindriques, à bases circulaires, dont l'une aurait a, et l'autre $\frac{k^2}{a}$ pour rayons, chacune des génératrices de ces deux surfaces, employée comme axe de suspension, répondra, d'après ce qui précède, à une même longueur $a+\frac{k^2}{a}$ du pendule synchrone.

1104. Voici des propriétés encore plus générales. Soient α, δ et γ les angles formés par la droite, parallèle à l'axe de suspension qui passe par le centre de gravité, et par les axes principaux du corps, rapportés au même centre, et soient de plus ϖ', ϖ'' et ϖ'' les moments d'inertie respectifs par rapport à chacun de ces axes, on aura, art. 1072,

$$Mk^2 = \varpi' \cos.\alpha + \varpi'' \cos.\delta + \varpi''' \cos.\gamma$$

ce qui change l'équation $\lambda = a + \frac{k^2}{a}$, en

$$(l) \ldots\ldots\ldots \lambda = a + \frac{\varpi' \cos.\alpha + \varpi'' \cos.\delta + \varpi''' \cos.\gamma}{aM}$$

les quantités ϖ', ϖ'', ϖ''' et M ont des valeurs dépendantes uniquement de la constitution du corps, et les quantités λ, a, α, δ et γ sont seules susceptibles de changement; on a, entre les trois dernières, la relation $\cos.^2\alpha + \cos.^2\delta + \cos^2\gamma = 1$. Or, quelle que soit la position, par rapport au corps, de la ligne passant par le centre de gravité et parallèle à l'axe de suspension, si cette position est donnée, on aura une longueur λ du pendule synchrone, pareillement donnée, en déterminant a par l'équation $(\varpi' \cos.\alpha + \varpi'' \cos.\delta + \varpi''' \cos.\gamma) : M - a\lambda + a^2 = 0$. Il y a donc une infinité de surfaces cylindriques, de différents rayons, dont tous les axes se coupent au centre de gravité, et dont toutes les génératrices peuvent être des axes de suspension correspondants à une même longueur de pendule synchrone. (*Voyez*, sur cette matière, un Mémoire de M. Biot, publié dans le XIII[e] cahier du Journal de l'École Polytechnique.)

1105. On peut se demander sous quelles conditions la longueur du pendule synchrone sera un *minimum*, en supposant, pour fixer les idées, que les oscillations de ce pendule sont très-petites, ou que leurs

durées ne dépendent pas de leurs amplitudes, a, α, 6 et γ étant considérées comme les variables; l'existence du *minimum*, par rapport à a, est manifeste puisque $\lambda=\infty$, soit qu'on fasse $a=0$, soit qu'on fasse $a=\infty$; ensuite soit ω' la plus petite des quantités ω', ω'' et ω''', le *minimum* du 2me. membre de l'équation (l) de l'article précédent, considéré par rapport aux variables α, 6 et γ, et dans l'hypothèse de a constant, sera immédiatement obtenu en faisant $\alpha=0$, $6=\frac{1}{2}\pi$, $\gamma=\frac{1}{2}\pi$, et ce 2me. membre deviendra, par la substitution de ces valeurs, $a+\dfrac{\omega}{aM}$; il ne restera donc plus qu'à égaler à zéro la différentielle de cette expression, prise par rapport à a, ce qui donnera $1-\dfrac{\omega' M}{a^2 M^2}=0$ et $a=\sqrt{\dfrac{\omega'}{M}}$. Ainsi l'axe de suspension, qui jouit de la propriété cherchée, est parallèle à celui des axes principaux, passant par le centre de gravité, auquel se rapporte le plus petit moment d'inertie, et la distance entre ces deux axes est égale à $\sqrt{\dfrac{\omega'}{M}}$.

1106. Je vais, maintenant, démontrer la formule que j'ai donnée, art. 1056, pour déterminer le moment d'inertie rapporté à un axe passant par le centre de gravité, lorsqu'on connaît, par l'observation, le nombre d'oscillations, très-petites, que fait le corps, dans un temps donné, autour d'un axe horizontal parallèle à celui dont je viens de parler, et qu'on a mesuré la distance a eutre les deux axes. Soit n le nombre d'oscillations pendant le temps τ, la durée d'une oscillation

[redacted]

de la longueur du pendule simple, qui bat les secondes, (les 86400es ou les 100000es du jour moyen) fut un des objets de détermination qu'on eut particulièrement en vue; je conçus, à cette époque, l'idée de substituer, au petit corps, suspendu à un fil, dont on se servait pour les expériences relatives à cette détermination, un corps solide de grandeur et de figure arbitraires, c'est-à-dire, d'employer le *pendule composé* au lieu du *pendule simple*. Cette préférence avait, pour motifs principaux, la solidité de l'appareil, la possibilité de le transporter, au loin, sans qu'il subisse la moindre altération, de l'employer, par conséquent, à répéter les expériences à différentes latitudes, et, sur-tout, enfin, l'excès très-considérable de la durée du mouvement d'un grand corps solide, mis en oscillation, sur la durée du mouvement oscillatoire d'une petite sphère attachée à un fil. J'ai éprouvé qu'un *pendule composé*, du poids de dix à douze kilogrammes, et d'environ un mètre de longueur, pouvait, la suspension étant faite avec beaucoup de soin, osciller pendant le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs d'un astre par le même méridien, ou pendant un jour sydéral, ce qui est une propriété fort importante dans ce genre de recherches.

Pour arriver au degré de précision que je voulais obtenir, il était nécessaire de rendre les mesures et les calculs indépendants de la connaissance, *a priori*, tant de la position du centre de gravité, que de la valeur du moment d'inertie et de celle de la force accélératrice due à la pesanteur, de manière que toutes les données nécessaires pour arriver au résultat, pussent être obtenues par des mesures de distances entre des points du corps, extérieurs et apparents, par les observations des amplitudes des oscillations et de leurs nombres pendant des temps donnés; j'y suis parvenu en adaptant, au corps, trois axes de suspension parallèles entre eux, et placés de manière que, lorsque ce corps était, dans l'état d'équilibre, retenu par l'un des axes, ils fussent tous trois dans le même plan vertical.

1108. Supposons, pour fixer les idées, que la même extrémité du corps soit constamment l'extrémité inférieure lorsque le corps est suspendu à l'un quelconque de ses axes, nommons $\xi_{,}$ et $\xi_{,,}$, respectivement, les distances de l'axe supérieur à l'axe moyen et à l'axe inférieur, distances qui peuvent se mesurer avec la plus parfaite exactitude, z la distance inconnue de l'axe supérieur au centre de gravité, μ le moment

d'inertie par rapport à la droite horizontale menée, par ce centre, parallèlement aux axes, et g la force accélératrice due à la pesanteur, laquelle force est censée une des inconnues du problême; déterminant, par observation, les temps correspondants à des nombres donnés d'oscillations sur chaque axe, on connaîtra pour les axes supérieur, moyen et inférieur, respectivement, les quantités $n_{,}^2$, $n_{,,}^2$ et $n_{,,,}^2$, dont chacune représente une quantité n de la forme $\frac{T^2}{\pi^2 N^2}$ dans laquelle T est le temps employé à faire un nombre N d'oscillations (on suppose que, par les méthodes connues, on a déduit, des observations des oscillations d'amplitudes finies, les quantités relatives aux oscillations infiniment petites) et π la demi-circonférence dont le rayon $= 1$. Le produit, par g, de chacune de ces quantités, représente, art. 964, la longueur d'un des pendules simples synchrones aux trois *pendules composés* ainsi formés avec le même corps, et on a,

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} g n^2_{,} = z + \dfrac{\mu}{z}, & \text{pour l'axe supérieur} \\[2ex] g n^2_{,,} = z - \xi_{,} + \dfrac{\mu}{z - \xi_{,}}, & \text{pour l'axe moyen} \\[2ex] g n^2_{,,,} = z - \xi_{,,} + \dfrac{\mu}{z - \xi_{,,}}, & \text{pour l'axe inférieur} \end{cases}$$

équations desquelles on déduit la suivante,

$$\left.\begin{array}{l} z^2 \{ 2(\xi_{,} \nu_{,} - \xi_{,,} \nu_{,,,}) \} \\ - z \{ \xi_{,}^2 \nu_{,} - \xi_{,,}^2 \nu_{,,,} + 2 \xi_{,} \xi_{,,} \nu_{,,} \} \\ + \xi_{,} \xi_{,,} (\xi_{,} n_{,,,}^2 - \xi_{,,} n_{,,}^2) \end{array}\right\} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

[redacted]

et on aura 1°. toutes les données nécessaires pour déterminer les longueurs

$$z+\frac{\mu}{z},\; z-\xi_{,}+\frac{\mu}{z-\xi_{,}},\ \text{et}\ z-\xi_{,,}+\frac{\mu}{z-\xi_{,,}}$$ des pendules simples

synchrones aux trois pendules composés dont un même corps tient lieu, en oscillant sur chacun de ses trois axes; 2°. La valeur de la force accélératrice g de la pesanteur, ce qui peut fournir une vérification curieuse et importante des anciens résultats connus sur cette valeur; il est hors de doute qu'avec un pendule dont le mouvement peut durer 24 heures, au moins, ces diverses déterminations doivent être très-précises.

Connaissant, par l'observation, la durée $\pi n_{,}$, $\pi n_{,,}$, ou $\pi n_{,,,}$ d'une oscillation d'un des trois pendules simples synchrones dont on vient de déterminer les longueurs, en fraction ou de jour sydéral ou de jour moyen, on en conclura aisément, art. 964, la longueur du pendule simple synchrone qui bat les 100000[es] ou les 86400[es] d'un jour moyen.

1109. J'ai supposé que les trois axes de suspension étaient d'un même côté par rapport au centre de gravité, mais il peut être avantageux d'avoir deux de ces axes respectivement placés près de chacune des extrémités du corps, et qui deviendraient, alternativement, axe supérieur et axe inférieur. Désignant, par $\zeta_{,,}$, la distance entre ces axes extrêmes, par $\zeta_{,}$, la distance de l'axe moyen à l'axe extrême qui est du même côté que lui, par rapport au centre de gravité; par $gn_{,}^2$, $gn_{,,}^2$ et $gn_{,,,}^2$ les longueurs respectives des pendules synchrones correspondants à l'axe extrême, qui est du même côté que l'axe moyen par rapport au centre de gravité, à l'axe moyen, et à l'autre axe extrême; faisant

$$n_{,,,}^2+n_{,}^2=\nu_{,};\quad n_{,,,}^2+n_{,,}^2=\nu_{,,};\quad n_{,,}^2-n_{,}^2=\nu_{,,,}$$

on a l'équation suivante correspondante à l'équation (2) de l'art. 1107,

$$(i)\ \ldots\ldots\ 0=\begin{cases} z^2\; 2(\zeta_{,}\nu_{,}+\xi_{,,}\nu_{,,,}) \\ -z(\zeta_{,}^2\nu_{,}+2\zeta_{,}\zeta_{,,}\nu_{,,}+\zeta_{,,}^2\nu_{,,,}) \\ +\zeta_{,}\zeta_{,,}(\zeta_{,}n_{,,}^2+\zeta_{,,}n_{,,}^2) \end{cases}$$

1110. Il est facile, en plaçant un axe de suspension près de chaque extrémité du corps, de s'arranger de manière que le centre de gravité se trouve exactement au milieu de ces deux axes; cette disposition est très-avantageuse, abrège et simplifie considérablement les observations;

z est alors une quantité donnée, et les seules inconnues du problême sont g et μ qui se déterminent par les équations

$$(2) \ldots\ldots\ldots g = \frac{\zeta_{,}(2z-\zeta_{,})}{\zeta_{,}n_{,,}^2 - z\nu_{,,,}} = \frac{\zeta_{,,}(2z-\zeta_{,,})}{z\nu_{,}-\zeta_{,,}n_{,,,}^2}$$

$$(3) \ldots\ldots\ldots \mu = z(gn_{,}^2 - z)$$

Après quoi on calcule aisément les longueurs des pendules synchrones correspondants à l'un des axes extrêmes et à l'axe moyen, lesquelles longueurs ont, pour valeurs respectives, $z+\frac{\mu}{z}$ et $z-\zeta_{,}+\frac{\mu}{z-\zeta_{,}}$.

J'ai indiqué les moyens de concilier, avec la condition à laquelle se rapportent ces formules, celle de rendre l'axe moyen le *réciproque* de l'un des axes extrêmes ; j'emploie, pour les ajustements qu'exigent ces diverses conditions, un poids curseur dont j'ai exposé les propriétés dans un mémoire publié avec *la Connaissance des Temps* de 1817, et dont je parlerai en traitant du mouvement des systêmes de formes variables.

J'ai lu, pour la première fots, à l'Académie des Sciences de Paris, au mois de mars 1792, le Mémoire contenant la théorie, les propriétés et l'usage du pendule à triple suspension dont il vient d'être question ; la description et les dessins des appareils étaient joints à ce mémoire que je destine à l'impression.

Suite de ce qui a été dit, dans la première section de cette seconde partie du Cours, sur la conformité des principes généraux de la Dynamique aux phénomènes observés.

[redacted]

données de fait, constatées par des observations auxquelles on ne pourrait opposer aucune objection raisonnable. La première et la deuxième de ces lois supposent, *d'après la théorie,* art. 840 et 841, l'action d'une force unique émanant du centre du soleil; on est parti de cette induction *théorique,* tirée des *faits,* pour chercher le mode d'action de la force centrale à laquelle sont dus les phénomènes observés, soumis aux deux premières lois, en combinant ces lois avec d'autres principes de dynamique, aussi purement rationnels, principes qui ont fourni l'équation (2) de l'art. 887, laquelle est déduite de l'expression générale de la vîtesse, art. 822, qui est elle-même une conséquence immédiate des formules générales du mouvement, et des règles établies sur sa décomposition. On a conclu, de ces rapprochements, que la force centrale était réciproque au quarré de la distance, et voilà un nouveau fait, une nouvelle loi dont celles de Kepler, séparées des considérations théoriques, ne nous auraient point appris l'existence; et comme tous les faits célestes connus, depuis l'antiquité la plus reculée jusqu'à nos jours, s'accordent pour prouver que cette loi est vraiment observée dans la nature, on ne saurait douter que les principes qui l'ont fait découvrir ne soient aussi des lois de la nature; la troisième loi de Kepler donne une confirmation de cette vérité, liée à des points de théorie et de faits connus des élèves; ils ont vu, art. 890. qu'en combinant la loi dont il s'agit avec des valeurs purement *théoriques,* déduites d'une double expression de la force centrale, on arrivait à cette conséquence remarquable que la force accélératrice résultante de l'action d'une planète sur un corps ou point matériel, était indépendante de la masse de ce corps, et relative seulement à la distance, et les expériences du pendule simple ont prouvé, art. 969 et 970, que la terre agissait de cette manière sur les corps soumis à son attraction.

Galilée a découvert les lois du mouvement des graves, près de la surface de la terre, par des considérations de dynamique absolument spéculatives; or ce grand philosophe, d'une part, n'avait que des notions très-incomplettes sur les *valeurs absolues* des quantités qui devaient donner les preuves de *fait* de sa théorie, et, de l'autre, il ignorait que la même cause motrice qui détermine la chute des graves, à la surface de la terre, retient la lune dans son orbite; les preuves *de fait* ont été acquises, et le mouvement de la lune a fourni à Newton, art. 934 et 935,

sa première vérification du principe de la pesanteur universelle ; une théorie qui devine ainsi la nature, a nécessairement ses bases dans la nature.

1112. Le contenu de l'article précédent se rapporte à l'action isolée d'une force unique sur un corps ; mais une partie des phénomènes du système du monde n'a pu s'expliquer que par la considération des actions simultanées de deux, ou un plus grand nombre de forces, sur un même corps, et, parmi les grands problêmes qui exigent cette considération, je citerai celui des *marées* dues aux actions combinées du soleil et de la lune : les solutions de ces problêmes comportent nécessairement l'application des principes posés, art. 718 et suivants, sur la comparaison des forces entre elles, et la conformité des résultats théoriques, auxquels on parvient, avec les phénomènes observés, est une garantie assurée de la vérité des principes d'où on est parti pour obtenir ces résultats.

1113. Les lois de l'équilibre et de la communication du mouvement entre les corps qui agissent les uns sur les autres, par *chocs* ou *pressions*, ont aussi été déduites, art. 755 et suivants, des principes posés sur les rapports et sur la mesure des forces. La machine d'Atwood a déja fourni une première vérification importante de ces lois, et par conséquent, des principes qui leur servent de base, particulièrement applicable aux cas de deux corps qui ont des mouvements rectilignes ; mais le pendule composé offre une autre vérification très-remarquable, applicable au cas d'une infinité de corps ou points matériels qui ont des mouvements circulaires ; les phénomènes qu'offre ce pendule sont les résultats des actions réciproques de tous ces points matériels dont,

teur; cette valeur est déterminée par le pendule simple, c'est-à-dire, par le mouvement d'un petit corps, qu'on peut regarder comme un point matériel, assujetti à parcourir un arc de cercle et soumis à l'attraction de la terre; c'est le cas d'une force unique agissant sur un point, matériel isolé; en déduisant cette même valeur du pendule à triple suspension, dont j'ai parlé, art. 1107 et suivants, on a, dans cette manière de l'obtenir, les considérations combinées du mouvement circulaire, de l'attraction de la terre et des actions réciproques d'une infinité de points matériels liés les uns aux autres.

Ces divers rapprochements, sur lesquels je n'ai pas besoin d'entrer dans de grands détails, vu l'avancement actuel du cours, réunis à ceux que j'ai déja présentés aux élèves, art. 812 et suivants, établissent la vérité des principes généraux de la dynamique et de la mécanique, en général, sur un ensemble de preuves, tirées de l'observation, qu'on peut regarder comme équivalant à une démonstration; et cependant je n'ai pu indiquer qu'une bien petite partie des faits qui appuieraient cette démonstration; plus on observera la nature, et plus on y reconnaîtra que la conformité constante des phénomènes aux lois reconnues sur les actions des forces et sur la communication du mouvement entre les corps, n'a aucune exception.

Du mouvement du centre de gravité d'un système de corps, ou de points matériels, de forme variable ou invariable. Conservation du mouvement de ce centre et de la somme des moments, lorsque le système n'est pas sollicité par des forces extérieures.

1114. J'ai démontré, art. 765 et 766, une propriété du choc, tant des corps durs que des corps jouisant d'un degré quelconque d'élasticité, qui est liée à un des grands principes de la mécanique, connu sous le nom de *conservation du mouvement du centre de gravité*, principe qui me sera bientôt nécessaire quand je traiterai du double mouvement de translation et de rotation d'un corps solide. En conséquence, je vais le démontrer en suivant une marche de raisonnement et d'analyse, qui me permettra d'étendre, avec facilité, ma démonstration à un système, soit invariable, soit variable, et soumis à des conditions quelconques, au moyen de quoi je n'aurai pas besoin d'y revenir, dans la quatrième

section de cette deuxième partie du Cours, à laquelle la démonstration, dont je parle, appartient naturellement.

Les recherches, qui vont suivre, comportent l'application du principe général du mouvement à un système de forme variable sous des conditions quelconques; et comme l'emploi de ce principe consiste à ramener les solutions des problêmes de mouvement à des expressions de conditions d'équilibre, je dois rappeler aux élèves une remarque qui se trouve à l'art. 385, où j'ai fait voir que dans tous les cas où des forces sont en équilibre sur un système de forme variable, elles doivent satisfaire aux conditions qui s'appliquent à l'équilibre d'un système de forme invariable égal et semblable à celui dont il s'agit, dans l'état où l'ont mis les actions des puissances qui se font équilibre ; ces forces doivent donc, dans le cas où le système est libre, satisfaire aux six équations de l'art. 346. Mais l'inverse de cette proposition n'a pas lieu, c'est-à-dire que les combinaisons de forces desquelles résulterait l'équilibre dans le cas de l'invariabilité de forme du système, ne sont pas toutes propres à l'établir, si cette invariabilité n'existe pas.

Dans les cas les plus ordinaires, les conditions d'équilibre sont, en vertu du principe général du mouvement, établies entre les forces motrices imprimées et celles qui ont lieu, sans faire entrer les vîtesses actuelles dans les équations qui expriment ces conditions; cette manière d'employer le principe général, ne change rien aux conséquences à tirer de la remarque de l'art. 385, parce qu'en supposant l'équilibre existant entre les forces qui font varier les vîtesses, c'est dire que ces forces ont, entre elles, des relations telles que les vîtesses n'éprouveront aucun changement, par leurs actions, ce qui revient à dire que si ces vîtesses

$$a=\frac{\Sigma(xm)}{M};\ b=\frac{\Sigma(ym)}{M};\ c=\frac{\Sigma(zm)}{M}$$

différentiant chacune de ces équations, par rapport au temps, et divisant ses deux membres par dt, il vient

$$(A)\ldots\ \frac{da}{dt}=\frac{\Sigma\left(m\frac{dx}{dt}\right)}{M};\ \frac{db}{dt}=\frac{\Sigma\left(m\frac{dy}{dt}\right)}{M};\ \frac{dc}{dt}=\frac{\Sigma\left(m\frac{dz}{dt}\right)}{M}$$

les premiers membres de ces équations sont les composantes de la vîtesse du centre de gravité, prises, au bout du temps t, parallèlement à chaque axe, et les seconds membres sont les sommes des composantes des quantités de mouvement de tout le système, prises parallèlement aux mêmes axes. Nous arrivons ici, pour un système quelconque, au même résultat obtenu, art. 765, pour deux points matériels se mouvant sur une même ligne.

1116. Soit m une des molécules du corps ou du système, u sa vîtesse actuelle dans l'espace, α, β et γ les angles respectifs que la direction de cette vîtesse forme avec les axes des x, des y et des z, désignant la masse totale par M, et faisant

$$\frac{Mda}{dt}=A;\ \frac{Mdb}{dt}=B;\ \frac{Mdc}{dt}=C$$

au moyen de quoi les cosinus des angles formés par la direction du mouvement du centre de gravité et par les axes des x, des y et des z, auront pour expressions respectives

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

les équations suivantes donneront les sommes des composantes des quantités actuelles de mouvement prises parallèlement aux axes,

$$(1)\ldots\ \Sigma(mu\cos.\alpha)=A;\ \Sigma(mu\cos.\beta)=B;\ \Sigma(mu\cos.\gamma)=C$$

et en représentant par P, Q et R les sommes respectives des moments par rapport aux axes des x, des y et des z, on aura

$$(2)\ldots\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\Sigma\{mu(z\cos.\beta-y\cos.\gamma)\}=P\\ \Sigma\{mu(x\cos.\gamma-z\cos.\alpha)\}=Q\\ \Sigma\{mu(y\cos.\alpha-x\cos.\beta)\}=R\end{array}\right.$$

Concevons maintenant que les vîtesses u, des molécules m, viennent à changer instantanément par des impulsions ou des chocs médiats ou immédiats, que les corps du système exercent les uns sur les autres, et que ces vîtesses prennent de nouvelles valeurs $u_{,}$, faisant avec les axes des x, y et z les angles respectifs, $a_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$; en vertu du principe général du mouvement, appliqué conformément à la remarque de l'art. 384, on aura six équations d'équilibre entre les quantités de mouvement mu et les quantités de mouvement $mu_{,}$ dont les trois premières seront

$$\Sigma\,(mu \cos. a) = \Sigma\,(mu_{,} \cos. a_{,})$$
$$\Sigma\,(mu \cos. \beta) = \Sigma\,(mu_{,} \cos. \beta_{,})$$
$$\Sigma\,(mu \cos. \gamma) = \Sigma\,(mu' \cos. \gamma_{,})$$

on voit par ces équations que les quantités A, B et C conservent les mêmes valeurs après les changements survenus dans le système par les impulsions ou chocs exercés par les corps les uns sur les autres, et qu'ainsi la vîtesse du centre de gravité et la direction du mouvement de ce centre, dans l'espace, n'éprouvent aucune variation.

1117. Les trois autres équations d'équilibre énonceraient les égalités entre les sommes actuelles des moments des quantités de mouvement um, et les sommes des moments des quantités de mouvement $u_{,}m$; ces dernieres sommes reproduiraient donc encore les quantités P, Q et R sans altération; ainsi la somme des moments est aussi conservée après les actions réciproques des corps.

Ces diverses conservations, qui ont lieu lorsque les vîtesses u se changent brusquement en $u_{,}$, auront encore lieu, par les mêmes raisons, si les vîtesses $u_{,}$ se changent de la même manière en $u_{,,}$, par le seul

du centre de gravité n'ayant pas besoin de cette condition; mais on peut supposer que ces corps, ou une partie d'entre eux, ont une autre manière d'agir, les uns sur les autres, en vertu de forces attractives ou répulsives, dont les effets sont soumis à la loi de *continuité*. De pareilles forces seront de l'espèce de celles qui ont lieu d'astre à astre, dans le système du monde, et on a vu, art. 916, que quels que soient les rapports des masses de deux corps, qui agissent ainsi l'un sur l'autre, les forces motrices résultantes de cette action, pour chacun d'eux, étaient égales et de signes contraires; ce qui revient à l'énoncé du principe de l'égalité entre l'action et la réaction. Il résulte de là que les quantités de mouvement tant naissantes que finies, engendrées par deux corps ou points matériels quelconques du système, doués de ces forces internes et les exerçant l'un sur l'autre, ne doivent point paraître, ou se détruisent (vu leur égalité et la différence de leurs signes) dans les expressions $\Sigma(mu\cos.\alpha)$, $\Sigma(mu\cos.\beta)$, $\Sigma(mu\cos.\gamma)$; elles n'ont donc aucune influence sur le mouvement du centre de gravité; leur influence sur la valeur de la somme des moments est pareillement nulle, puisque chaque couple de ces forces motrices égales, de signes contraires, et ayant leurs directions sur une même ligne droite, donne un moment égal à zéro.

1119. Les théorêmes et les formules des articles précédents s'appliquent, visiblement, au cas où les changements produits dans les vîtesses, par des causes internes, sont, ou ne sont pas, soumis à la loi de continuité; mais comme on a, dans tous les cas, à un instant quelconque, pour l'une, en général, des molécules m du système,

$$u\cos.\alpha=\frac{dx}{dt},\ u\cos.\beta=\frac{dy}{dt},\ u\cos.\gamma=\frac{dz}{dt},$$

les équations de l'article 1116 peuvent se mettre sous la forme

$$(1)\ldots\ \Sigma\left(\frac{m\,dx}{dt}\right)=A;\ \Sigma\left(\frac{m\,dy}{dt}\right)=B;\ \Sigma\left(\frac{m\,dz}{dt}\right)=C$$

$$(2)\ldots\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\Sigma\left\{\dfrac{m(z\,dy-y\,dz)}{dt}\right\}=P\\[2ex]\Sigma\left\{\dfrac{m(x\,dz-z\,dx)}{dt}\right\}=Q\\[2ex]\Sigma\left\{\dfrac{m(y\,dx-x\,dy)}{dt}\right\}=R\end{array}\right.$$

posant les valeurs suivantes,

$$x = x_{,} + \xi ;\; y = y_{,} + \eta ;\; z = z_{,} + \zeta$$

les équations (1) deviennent, la masse totale continuant à être représentée par M,

$$(8) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{M dx_{,}}{dt} + \Sigma\left(\dfrac{m d\xi}{dt}\right) = A \\ \dfrac{M' dy_{,}}{dt} + \Sigma\left(\dfrac{m d\eta}{dt}\right) = B \\ \dfrac{M dz_{,}}{dt} + \Sigma\left(\dfrac{m d\zeta}{dt}\right) = C \end{cases}$$

soient, $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$, les coordonnées du centre de gravité, ce qui donne $\Sigma(m d\xi) = 0$, $\Sigma(m dy) = 0$, $\Sigma(m d\zeta) = 0$, en faisant attention que, dans toute l'étendue du systême, les $d\xi$, $d\eta$ et $d\zeta$, à un instant déterminé, se rapportent à une même valeur de dt, on aura

$$\frac{dx_{,}}{dt} = \frac{A}{M} ;\; \frac{dy_{,}}{dt} = \frac{B}{M} ;\; \frac{dz_{,}}{dt} = \frac{C}{M}$$

valeurs identiques avec celles de $\dfrac{da}{dt}$, $\dfrac{db}{dt}$, $\dfrac{dc}{dt}$ à l'article cité.

1120. Supposons maintenant que des forces extérieures, soumises à la loi de continuité, agissent sur le systême, et qu'en vertu de ces forces, une molécule quelconque m acquerrerait, si elle était libre, des quantités de mouvement élémentaires $mf_{,}dt$, $mf_{,,}dt$, $mf_{,,,}dt$, dans des sens respectivement parallèles aux x, aux y et aux z, on aura, (dans l'hypothèse de dt constant) par le principe général du mouvement, et d'après la remarque de l'art. 384, les équations

dent, dans lesquelles A, B et C sont devenus des quantités variables, donnent

$$(3)\ldots\Sigma(mf_{\prime})=\frac{ddA}{dt^2};\ \Sigma(mf_{\prime\prime})=\frac{ddB}{dt^2};\ \Sigma(mf_{\prime\prime\prime})=\frac{ddC}{dt^2}$$

les expressions $\frac{\Sigma(mf_{\prime})}{M}dt$, $\frac{\Sigma(mf_{\prime\prime})}{M}dt$, $\frac{\Sigma(mf_{\prime\prime\prime})}{M}dt$, sont les variations élémentaires des composantes de la vîtesse du centre de gravité prises parallèlement aux axes coordonnés.

Qu'on fasse dans les équations (1) et (2), $f_{\prime}=0$, $f_{\prime}'=0$, $f_{\prime\prime\prime}=0$, ou, ce qui est la même chose, qu'on suppose que le système se meut en vertu d'impulsions initiales sans être sollicité par aucune force *extérieure*, et qu'ensuite on intègre par rapport au temps, on retrouvera les sommes constantes de l'art. 1119, et on pourra remarquer que les équations (2) de cet article expriment également, et que les sommes des moments sont constantes, et que les aires décrites pendant un temps quelconque, sont proportionnelles à ce temps, ce qui redonne, dans le cas le plus général, l'analogie entre les moments et les aires que j'ai déja fait remarquer, art. 200 et 238.

Application de la théorie précédente au mouvement d'un corps solide de forme invariable.

1121. Je suppose qu'un corps solide de forme invariable reçoive à différents points de sa masse, et dans différentes directions, des impulsions dont chacune, si la masse entière du corps était concentrée dans son point d'application, lui communiquerait une quantité de mouvement que je représente par le signe générique K, en désignant, par a, b et c, les angles respectifs que forme sa direction avec les axes des x, y et z, ce corps n'étant sollicité par aucune puissance extérieure, on aura immédiatement, par les formules des art. 119 et 1120, les composantes de la vîtesse uniforme du mouvement rectiligne du centre de gravité, prises parallèlement aux axes, qui auront pour valeurs, en faisant, pour abréger, $\Sigma(K\cos. a)=A$; $\Sigma(K\cos. b)=B$; $\Sigma(K\cos. c)=C$

$$\text{Parallèlement à l'axe} \begin{cases} \text{des } x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{A}{M} \\[2mm] \text{des } y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{B}{M} \\[2mm] \text{des } z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{C}{M} \end{cases}$$

et en représentant, par R^2 la somme des quarrés des numérateurs de ces fractions, on aura les valeurs suivantes des cosinus des angles respectifs formés par la direction du mouvement du centre de gravité et par les directions des x, y et z

$$\frac{A}{R}; \; \frac{B}{R}; \; \frac{C}{R}$$

Ces déterminations sont absolument les mêmes que s'il s'agissait d'un point matériel dont la masse serait égale à M, recevant immédiatement toutes les impulsions K, dans des directions parallèles à celles que ces impulsions ont dans l'espace.

1122. Rien n'est donc plus aisé que de connaître le mouvement du centre de gravité, lorsque les causes motrices qui déterminent ce mouvement sont données, tant dans le cas où ces causes motrices sont des impulsions initiales communiquées une fois pour toutes, que dans celui où le corps est sollicité par des forces à actions continues. On a vu, art. 1120, comment, dans le second cas, on déterminait la variation du mouvement de ce centre due aux actions des puissances.

En me bornant à la considération du mouvement résultant uniquement des impulsions initiales, je remarque que ces formules qui rendent

même vîtesse, parallèlement à la même ligne, à chacune des molécules du corps. Pour démontrer cette proposition, je remarque qu'on obtiendra le même effet en donnant au corps une impulsion R par son centre de gravité, ou en donnant, à chacune de ses molécules m, une impulsion $\frac{R}{M}m$ dans une direction parallèle à celle de R, car, 1° la résultante de toutes les puissances parallèles $\frac{R}{M}m$, sera $\frac{R}{M}\Sigma(m)$, ou $\frac{R}{M}.M = R$; 2°. cette résultante sera dirigée par le centre de gravité, car, en faisant passer, par ce centre, un plan, de position quelconque, dont la distance, à la molécule m, serait ξ, le moment $\Sigma\left(\frac{R}{M}m\xi\right)$, ou $\frac{R}{M}\ \Sigma(m\xi)$ serait égal à zero. Or l'effet des impulsions $\frac{R}{M}m$ est de donner à toutes les molécules m une même vîtesse $\frac{R}{M}$, qui est aussi la vîtesse imprimée au centre de gravité par leur résultante; chacune d'elles prendra donc cette vîtesse commune, sans être gênée par sa liaison avec les autres molécules, ou de la même manière que si elle était libre, tous les points du corps se mouvant dans des directions parallèles avec la vîtesse commune.

1123. Lorsque les impulsions, données au corps, ne pourront pas se composer en une résultante unique, ou lorsque la résultante unique, s'il y en a une, ne passera pas le centre de gravité, les autres points du corps auront, en général, des mouvements susceptibles d'une infinité de modifications indépendantes du mouvement du centre de gravité, ou n'ayant aucune influence sur ce mouvement. C'est une proposition très-importante, et fondamentale en mécanique, qu'il est convenable de démontrer par des raisonnements élémentaires.

Je reprends les valeurs des moments de l'art. 1119,

$$\Sigma\left\{\frac{m(zdy - ydz)}{dt}\right\} = P$$

$$\Sigma\left\{\frac{m(xdz - zdx)}{dt}\right\} = Q$$

$$\Sigma \left\{ \frac{m(y\,dx - x\,dy)}{dt} \right\} = R$$

désignant, comme à l'art. cité, par $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, les coordonnées du centre de gravité, et posant les valeurs,

$$x = x_{,} + \xi;\ y = y_{,} + \eta;\ z = z_{,} + \zeta$$

les expressions de P, Q et R deviennent, en faisant attention que les ξ, η et ζ ont leur origine au centre de gravité, ce qui donne .... $\Sigma(m\xi) = 0$, $\Sigma(m\,d\xi) = 0$, $\Sigma(m\eta) = 0$, $\Sigma(m\,d\eta) = 0$, $\Sigma(m\zeta) = 0$, $\Sigma(m\,d\zeta) = 0$

$$(1)\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}
&\frac{M(z_{,}dy_{,} - y_{,}dz_{,})}{dt} + \frac{\Sigma\{m(\zeta d\eta - \eta d\zeta)\}}{dt} = P\\
&\frac{M(x_{,}dz_{,} - z_{,}dx_{,})}{dt} + \frac{\Sigma\{m(\xi d\zeta - \zeta d\xi)\}}{dt} = Q\\
&\frac{M(y_{,}dx_{,} - x_{,}dy_{,})}{dt} + \frac{\Sigma\{m(\eta d\xi - \xi d\eta)\}}{dt} = R
\end{aligned}\right.$$

Je puis, maintenant, sans nuire à la généralité des résultats, supposer que lorsque les impulsions K, ou leurs équivalentes A, B, C, ont été données au corps, l'origine commune des x, y, z, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ était placée au centre de gravité; d'après cette hypothèse les axes des ξ, η et ζ ont dû, dans leurs positions initiales, se confondre avec ceux des x, y et z, au même instant où on avait $x_{,} = 0$, $y_{,} = 0$, $z_{,} = 0$, et la ligne droite que décrit le centre de gravité passe par l'origine commune de ses coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ ce qui donne,

[redacted]

$$(3)\dots\dots\dots\dots\dots\dots\begin{cases}\dfrac{\Sigma\{m(\zeta d\eta-\eta d\zeta)\}}{dt}=P\\[2mm] \dfrac{\Sigma\{m(\xi d\eta-\eta d\xi)\}}{dt}=Q\\[2mm] \dfrac{\Sigma\{m(\eta d\xi-\xi d\eta)\}}{dt}=R\end{cases}$$

les trois premières se rapportent exclusivement au mouvement particulier du centre de gravité, ou au mouvement de translation générale du corps; les trois dernières, qui ne renferment aucune quantité relative à des points, lignes ou plans fixes, pris dans l'espace, ne peuvent être applicables qu'aux distances instantanées, des molécules m, à trois plans passant par le centre de gravité, mobiles avec lui et parallèles aux plans fixes des xy, xz et yz; elles se rapportent donc, exclusivement, aux mouvements de ces molécules m autour du centre de gravité.

Ainsi A, B, C, peuvent avoir des valeurs entièrement arbitraires, P, Q et R ayant des valeurs déterminées, et réciproquement. On conçoit, en effet, d'après ce qui a été démontré précédemment, que si, par exemple, on donne au corps une impulsion dirigée sur son centre de gravité, il en résultera une certaine vîtesse de ce centre, dont la valeur est déterminable à volonté, et qui, art. 1122, laissera ξ, η et ζ dans leur état initial, de manière que, si le corps ne recevait que cette impulsion, on aurait $d\xi=0$, $d\eta=0$, $d\zeta=0$; mais on peut, en même temps, donner au corps, d'autres impulsions, par couples, telles que $+K_{,}$, $-K_{,}$; $+K_{,,}$, $-K_{,,}$; etc. Les directions des deux impulsions de chaque couple étant parallèles, et à une distance finie l'une de l'autre, ce qui introduira dans P, Q et R des quantités arbitraires qui ne se trouveront pas dans A, B et C.

1124. L'indépendance du mouvement de translation du centre de gravité et du mouvement gyratoire du corps autour de ce centre se trouvent ainsi très-rigoureusement démontrés; mais comme on ne saurait jeter trop de jour sur une matière aussi importante, je vais donner encore une marche de raisonnement, fort simple, pour ramener ces impulsions initiales à des impulsions équivalentes, qui rendent parfaitement sensible et évidente l'indépendance établie dans l'article précédent.

Soit K l'une quelconque des impulsions $K_{,}$, $K_{,,}$, etc. donnée au corps à une distance k du centre de gravité; je mène, par ce centre, une perpendiculaire sur la direction de K, que je prolonge, de l'autre côté du même centre par rapport au point d'application de K, d'une quantité $= k$; j'applique, à l'extrémité de ce prolongement, deux forces opposées, parallèles à K, égales entre elles et à $\frac{1}{2}K$; je compose, ensuite, celle des forces qui agit dans le même sens que K, et la moitié de K, en une impulsion K, passant par le centre de gravité, et je ramène, ainsi, l'impulsion K, donnée à un point quelconque du corps, à trois forces dont l'une, dirigée sur le centre de gravité, fournit des termes à A, B, C, sans rien fournir à P, Q, R (ce centre, dans sa position initiale, est à l'origine commune des x, y, z, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$) les deux autres formant une couple de forces dont les composantes entrent dans P, Q et R et n'entrent pas dans A, B, C. Chacune des impulsions $K_{,}$, $K_{,,}$ etc. est susceptible d'une décomposition pareille, et si, à l'instant où le corps reçoit ces impulsions, son centre de gravité se trouve retenu par un obstacle fixe, la résistance de cet obstacle représentera une de ces forces dont A, B, C peuvent se composer exclusivement sans que le mouvement gyratoire, dû à P, Q, R, en soit altéré; si, au contraire, laissant le centre de gravité libre, on traverse le corps par deux lignes matérielles, ou axes fixes, parallèles à la ligne que le centre de gravité doit suivre, et le long desquels ce corps soit assujetti à glisser, la résistance par laquelle les axes fixes empêcheront le mouvement gyratoire du corps autour de son centre de gravité d'avoir lieu, pourra être assimilée à l'action d'une couple de forces qui produirait le même effet que cette résistance, mais sans rien changer au mouvement exprimé par les équations

$$\frac{M\,dx_{,}}{dt} = A;\ \frac{M\,dy_{,}}{dt} = B;\ \frac{M\,dz_{,}}{dt} = C.$$

Ces raisonnements se lient à la théorie des *couples* dont j'ai démontré les principales vérités dans la première partie du cours; cettte théorie est due à M. Poinsot, membre de l'Institut, mais, long-temps avant la publication de l'ouvrage de ce savant, j'avais employé la considération de ces mêmes *couples* pour expliquer et démontrer l'indépendance des mouvements de translation et de rotation des corps solides.

1125. Le résultat de ce qui a été dit depuis l'art. 1121, peut être ainsi énoncé.

« Si un corps, d'une masse M, solide, libre, et qui n'est sollicité par « aucune puissance extérieure, reçoit, à différents points, des impul- « sions finies, en nombre, intensités et directions quelconques, son « centre de gravité prendra un mouvement de translation identique « avec celui dont se trouverait animé un point matériel, d'une masse « $=M$, auquel ces diverses impulsions seraient données dans des direc- « directions parallèles à celles qu'elles ont à leurs points effectifs d'ap- « plication, et les différents points du corps se mouvront autour du « centre de gravité, comme ils l'auraient fait si, à l'instant où les im- « pulsions ont été données, ce centre eut été un point fixe. »

1126 Le mouvement d'un corps, tel que je viens de le considérer, offre trois quantités constantes, savoir, la vîtesse du centre de gravité, la somme des moments des quantités de mouvement des molécules et la somme des aires engendrées pendant un élément de tempe dt, les dt successifs étant supposés égaux entre eux, et on peut remarquer que les conditions de l'équilibre sont celles qui expriment que la première de ces sommes constantes et l'une quelconque des deux autres sont égales à zéro.

Détermination des chocs exercés, contre un axe fixe, en vertu des impulsions données à un corps assujetti à tourner autour de cet axe. Conditions d'après lesquelles il ne résulte, des chocs donnés au corps, aucun choc sur l'axe. Théorie générale du centre de percussion.

1127. Un corps solide, de forme invariable, étant assujetti à tourner autour d'un axe fixe, et les positions de chacun de ses points étant déterminées par des coordonnées rectangulaires x, y et z, je prends l'axe de rotation pour axe des z; ce corps dont je représente la masse par M, est supposé recevoir une impulsion, que je désigne par P; ainsi, d'après les notions précédemment établies, P est la quantité de mouvement que recevrait la masse M, si, réduite à un point matériel, la cause motrice, à laquelle P est due, agissait immédiatement sur elle. Je mène, par la direction de P, un plan parallèle à l'axe de rotation, ou à l'axe des z, et je prends, pour plan des zx, le plan, perpendiculaire à celui dont je viens de parler, passant par l'axe de rotation; le plan des xy, perpen-

diculaire à cet axe, est censé le couper en un point donné de position.

Je nomme ξ et ζ, respectivement, la coordonnée, mesurée sur l'axe des x, et la coordonnée, parallèle aux z, du point où la direction de Q rencontre le plan xz, et je détermine la position du centre de gravité du corps, par les coordonnées a, b et c respectivement parallèles aux x, y et z.

Les valeurs de ces coordonnés ξ, ζ, a, b, c sont prises au moment où l'impulsion P est donnée.

Il s'agit de déterminer, d'abord, l'effet que cette impulsion produit sur l'axe; pour cela, je la décompose en deux forces, appliquées au point dont ξ et ζ sont les coordonnées, l'une représentée par Π, dirigée dans le plan xz, parallèlement à l'axe de rotation, ou axe des z, et l'autre représentée par Q, perpendiculaire à ce plan xz. La première composante n'entre pour rien dans le mouvement du corps, l'axe étant supposé fixe, mais elle exerce, sur cet axe, une action qui se détermine par les formules données, art. 381. Supposons que le mouvement de ce même axe, soit empêché par deux arrets placés à ses extrémités, l'un à l'origine et l'autre, à une distance k de l'origine du côté des z positifs, la composante Π parallèle aux z, étant censée agir dans le sens des z positifs, il résultera de son action un choc sur chacun des points d'arrêt, dirigé perpendiculairement à l'axe de rotation, dans le plan des xz (plan qui renferme la ligne de direction de Π et l'axe de rotation) choc qui aura pour valeur $\pm \frac{\Pi \xi}{k}$ le signe $+$ étant applicable au point d'arrêt qui est à l'origine, et le signe $-$ au point d'arrêt placé à une distance k de l'origine.

[redacted]

ainsi la quantité de mouvement d'une molécule quelconque m, dirigée perpendiculairement au rayon vecteur ρ, sera $g\rho m$; les composantes de cette quantité de mouvement, respectivement parallèles aux x et aux y, seront gym et gxm, en faisant attention que la perpendiculaire, au rayon vecteur ρ, fait avec l'axe des x un angle dont le cosinus $=\frac{y}{\rho}$, et, avec l'axe des y, un angle dont le cosinus $=\frac{x}{\rho}$, et les sommes respectives de ces composantes, prises dans toute l'étendue du corps, pourront être représentées par $g\Sigma(ym)$ et $g\Sigma(xm)$.

Ces sommes de composantes $g\Sigma(ym)$ et $g\Sigma(xm)$, remplacent, à tous égards, la somme des quantités de mouvement $g\Sigma(\rho m)$; or l'axe ne reçoit aucun choc de la part de celles-ci, parce que les vîtesses $g\rho$, des molécules m, étant proportionelles à leurs distances respectives à l'axe de rotation, et ayant lieu normalement aux rayons vecteurs ρ, dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation, ces molécules se meuvent comme si elles étaient libres ou détachées les unes des autres, ce qui exclut toute transmission de forces à l'axe de rotation.

D'une autre part, l'impulsion Q, parallèle aux y, peut, elle-même, être remplacée par les quantités de mouvement qui suivent, savoir,

$$\text{Sommes des quantités de mouvement parallèles,}\quad\left\{\begin{array}{ll}\text{aux } x & \left\{\begin{array}{l} g\Sigma(my) \\ -g\Sigma(my)\end{array}\right. \\ \text{aux } y & \left\{\begin{array}{l} g\Sigma(mx) \\ Q-g\Sigma(mx)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

On vient de voir que les sommes des composantes $g\Sigma(my)$ et $g\Sigma(mx)$, équivalentes à la somme $g\Sigma(m\rho)$, ne pouvaient exercer aucune percussion sur l'axe; l'impulsion Q ne peut donc agir sur cet axe, qu'en vertu des composantes $-g\Sigma(my)$ et $Q-g\Sigma(mx$; mais ces composantes, d'après le principe général du mouvement, sont celles qui satisfont aux conditions de l'équilibre, et on a vu, art. 379, que lorsque des forces, dirigées dans des plans perpendiculaires à un axe fixe, sont en équilibre autour de cet axe, elles agissent, sur lui, de la même manière que si chacune d'elle lui était immédiatement appliquée, parallèlement à sa direction, et dans le plan normal qui renferme cette

direction. Désignant donc par X et Y, respectivement, les chocs que reçoit l'axe de rotation, ou l'axe des z, dans le sens des x et dans celui des y, au moment où l'impulsion Q est donnée, par $X\zeta_{,}$ le moment de X par rapport à l'axe des y, et par $Y\zeta_{,,}$ le moment de Y par rapport à l'axe des x, (X étant dirigée dans le plan xz, ses moments, par rapport aux axes des x et des z, sont nuls, et il en est de même des moments de Y, par rapport aux axes des y et des z) on aura les équations

$$(2)\ldots\left\{\begin{array}{l} X=-\gamma\Sigma(ym)=-\gamma bM \\ Y=Q-\gamma\Sigma(xm)=Q-\gamma aM \\ X\zeta_{,}=-\gamma\Sigma(zym) \\ Y\zeta_{,,}=Q\zeta-\gamma\Sigma(zxm) \end{array}\right.$$

On a, par la propriété du centre de gravité, ... $\Sigma(xm)=aM$, et ...... $\Sigma(ym)=bM$

on obtiendra les valeurs de X et Y, en quantités connues, par la substitution dans les deux premières de ces équations, de la valeur de γ, déduite de l'équation (1); substituant, ensuite, ces valeurs ainsi déterminées, et celle de γ dans la troisième et la quatrième, on aura $\zeta_{,}$ et $\zeta_{,,}$.

1129. l'application, la plus importante, des équations de l'article précédent, est la détermination des conditions auxquelles il faut satisfaire pour que l'axe de rotation n'éprouve aucun choc, lorsque le corps reçoit l'impulsion P. Il est, d'abord, évident que la composante Π de P, parallèle à l'axe de rotation, doit être nulle; ainsi nous pouvons nous borner à considérer les conditions relatives à la composante Q, perpendiculaire à l'axe de rotation, et ces conditions seront exprimées en égalant, à zéro, les sommes des forces et les sommes des moments, que j'ai, en général, supposées égales à X, Y, $X\zeta_{,}$ et $Y\zeta_{,,}$. Il semblerait, au premier coup d'œil que l'égalité à zéro de la somme des [redacted]

ainsi le centre de gravité doit se trouver dans le plan perpendiculaire à la direction de l'impulsion, passant par l'axe de rotation. La seconde donne $Q - \mathfrak{g} a M = 0$, et, en substituant pour $\mathfrak{g}$ la valeur $\frac{Q\xi}{\Sigma(m\rho^2)}$.

$$(4) \ldots\ldots a\xi M - \Sigma(m\rho^2) = 0$$

La troisième donne

$$(5) \ldots\ldots \Sigma(mzy) = 0$$

et, la quatrième, $Q\zeta - \mathfrak{g}\Sigma(zxm) = 0$, d'où on tire, en substituant, pour $\mathfrak{g}$, la valeur $\frac{Q\xi}{\Sigma(m\rho^2)}$, $\zeta\Sigma(m\rho^2) - \xi\Sigma(zxm) = 0$, et, enfin, en éliminant $\Sigma(m\rho^2)$ par l'équation (4)

$$(6) \ldots\ldots a\zeta M - \Sigma(zxm) = 0$$

les équations (3) et (5) expriment des conditions relatives au centre de gravité, et à la position de l'axe dans le corps; les équations (4) et (6) donnent les coordonnées ξ et ζ du point où la direction de l'impulsion Q, perpendiculaire à l'axe de rotation, doit rencontrer, le plan qui renferme l'axe de rotation et le centre de gravité. En désignant, par Mk^2 le moment d'inertie du corps, pris par rapport à un axe, perpendiculaire à l'axe de rotation, et passant par le centre de gravité, les valeurs de ces coordonnées sont

$$(7) \ldots\ldots \xi = a + \frac{k^2}{a}$$

$$(8) \ldots\ldots \zeta = \frac{\Sigma(mzx)}{aM}$$

1130. Le point ainsi déterminé s'appelle *centre de percussion;* les questions relatives à ce centre, et au *centre d'oscillation,* ont beaucoup occupé les géomètres, dans le XVIIe siècle, et comme le problème du centre de percussion n'était résolu que pour des cas particuliers, qui lui donnent la même position qu'au centre d'oscillation, cette identité apparente avait donné lieu à quelques disputes polémiques. On a, ensuite, négligé ces discussions, lorsque les progrès de l'analyse et de la mécanique rationnelle, ont attiré l'attention des géomètres vers d'autres objets, et c'est, vraisemblablement, par cette raison, qu'il n'existait pas encore de solution générale et complète du problème du centre de percussion, lorsque j'ai donné, dans mon cours, celle de

la 3e. $= Q\xi$, et que, d'après la condition du mouvement circulaire, une molécule qui s'éloigne du plan xz s'approche du plan xy, et réciproquement, ce qui comporte des signes différents pour les vîtesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, respectivement parallèles aux x et aux y, lesquelles vîtesses sont, en général, prises positivement lorsqu'elles tendent à augmenter les coordonnées positives, on conclut, des trois équations citées, les suivantes,

$$g\Sigma(zmx) = Q\zeta;\ \Sigma(mzy) = 0;\ g\Sigma\{m(y^2 + x^2) = Q\xi$$

dont les deux premières donnent les équations (6) et (5) de l'art. 1128; et, si, dans la troisième, on substitue, à $Q\xi$, sa valeur $g\Sigma(m\rho^2)$, on aura $\Sigma\{m(y^2+x^2)\} = \Sigma(m\rho^2)$, valeurs identiques.

1132. Si la forme du corps est telle que le plan des xy qui est perpendiculaire à l'axe des z, ou à l'axe de rotation, coupe le corps, supposé homogène, en deux parties égales et semblables, on aura $b=0$, $\Sigma(mzx)=0$, $\Sigma(mzy)=0$, d'où on conclut $\zeta=0$; et, la condition $b=0$ étant supposée remplie, le centre de percussion se trouvera, à la distance $a + \frac{k^2}{a}$ de l'axe de rotation, sur la perpendiculaire, à cet axe, passant par le centre de gravité, il se confondra avec le centre d'oscillation.

1133. Supposons que l'axe de rotation, ou axe des z, soit parallèle à un des axes principaux qui se coupent au centre de gravité, la condition $b=0$ étant préalablement satisfaite, c'est-à-dire, le centre de gravité se trouvant dans le plan, perpendiculaire à la direction de Q, qui passe par l'axe de rotation, et prenant le centre de gravité, pour origine des coordonnées ξ, η et ζ, respectivement parallèles aux x, y et z, on aura, l'état initial étant convenablement établi,

$$\xi = x + a;\ \eta = y;\ \zeta = z - c$$

on a, de plus, par la propriété des axes principaux,

$$\Sigma(m\zeta\xi) = 0;\ \Sigma(m\zeta\eta) = 0$$

substituant, dans ces dernières équations, les valeurs de ξ, η et ζ, ayant égard aux propriétés du centre de gravité, d'après lesquelles $\Sigma(m\xi)=0$, $\Sigma(m\eta)=0$, $\Sigma(m\zeta)=0$, et faisant attention que

$$\Sigma\{m(az-cx)\} = \Sigma\{m[a(\zeta+c)-c(\xi-a)]\} = \Sigma\{m(a\zeta-c\xi)\} = 0,$$

on a, toutes réductions faites,

$$\Sigma(mzx) = acM;\ \Sigma(mzy) = 0$$

a supposé les directions parallèles et les forces motrices proportionnelles aux masses et indépendantes des positions des molécules) se trouve, quant au centre de percussion, essentiellement liée à la nature même de la question. Je ne m'étendrai pas davantage sur ces remarques; les élèves qui voudront avoir quelques détails sur les problèmes du centre d'oscillation et du centre de percussion, relativement à la partie historique, pourront consulter le deuxième volume de l'*Histoire des Mathématiques* de *Montucla*.

Des efforts que supporte l'axe immobile de rotation, lorsque le corps a reçu l'impulsion initiale qui lui imprime son mouvement. Conditions qui rendent ces efforts nuls.

1136. Lorsque les diverses conditions assignées, article 1129, sont remplies, l'axe, au moment du choc, n'éprouve l'action d'aucune force de la nature de celles qu'on appelle *forces de percussion;* on ne peut cependant pas dire que cet axe n'ait aucune tendance à se déplacer, car il est sollicité par des forces comparables à des *pressions*, et provenant des *forces centrifuges* de tous les points matériels qui composent le corps. Une molécule quelconque, placée à une distance ρ de l'axe, exerce dans le sens du rayon ρ, et en vertu de sa vîtesse $\vartheta\rho$, un effort qui, art. 936, a, pour valeur, $\vartheta^2 m\rho$. Les composantes de cette force, respectivement parallèles aux x et aux y, sont

$\vartheta^2 m\rho \times \frac{x}{\rho}$ et $\vartheta^2 m\rho \times \frac{y}{\rho}$, ou $\vartheta^2 mx$ et $\vartheta^2 my$, en faisant attention

que $\frac{x}{\rho}$ et $\frac{y}{\rho}$ sont les cosinus des angles que forme sa direction avec les mêmes axes; les sommes de ces composantes, dans toute l'étendue du corps, sont $\vartheta^2 \Sigma(mx)$ et $\vartheta^2 \Sigma(my)$; et les sommes de leurs moments sont, pour la première, $\vartheta^2 \Sigma(mzx)$ moment par rapport à l'axe des y, et, pour la seconde, $\vartheta^2 \Sigma(mzy)$, moment par rapport à l'axe des x.

Il faut observer que les forces $\vartheta^2 m\rho$ étant dirigées suivant les rayons vecteurs ρ, peuvent être, toutes, censées appliquées à l'axe de rotation, et qu'il en est de même des composantes qui entrent dans les sommes $\vartheta^2 \Sigma(mx)$ et $\vartheta^2 \Sigma(my)$; d'où il suit que ces sommes ne doivent fournir aucun moment par rapport à l'axe des z; de plus, d'après les

parallélismes respectifs, entre leurs lignes de direction et les axes des x et des y, elles n'en fournissent point, la première par rapport à l'axe des x, et la seconde par rapport à l'axe des y.

Si l'on suppose maintenant que l'axe fixe de rotation passe par le centre de gravité, on aura, par cette seule circonstance, $\vartheta^2\Sigma(mx)=0$ et $\vartheta^2\Sigma(my)=0$; ainsi l'axe n'éprouvera aucun effort tendant à lui donner un mouvement général de translation; mais il ne peut être entièrement délivré de tout effort, qu'autant que les moments des pressions $\vartheta^2 mx$ et $\vartheta^2 my$ sont nuls, ce qui donne les équations $\Sigma(mzx)=0$, $\Sigma(mzy)=0$, et ce qui nous apprend que cet axe doit réunir, à la condition de sa direction par le centre de gravité, celle d'être un des axes principaux qui ont leur intersection commune à ce centre.

1137. La première des conditions, assignées dans l'article précédent, ne peut pas être satisfaite sans que le centre de percussion ne se trouve à une distance infinie de l'axe, puisqu'elle rend nulle la distance a de cet axe au centre de gravité; ce qui donne, article 1129, $\xi=\infty$, $\zeta=\infty$; on tire de là une conséquence, assez remarquable, savoir l'incompatibilité des conditions d'après lesquelles l'axe fixe autour duquel un corps, choqué, est assujetti à tourner, ne reçoit aucune percussion, et de celles qui rendent cet axe libre de tout effort après le choc initial qui a mis le corps en mouvement. Si les premières conditions sont remplies, le centre de gravité devra se trouver à une distance finie de l'axe, afin que ξ et ζ puissent avoir des valeurs finies, et, dès-lors, l'axe, exempt de choc dans le premier instant, sera, dans les instants suivants soumis aux forces centrifuges; si les secondes sont satisfaites, le centre de gravité devra se trouver sur l'axe, et le centre de percussion sera à une distance infinie de cet axe, lequel éprouvera, par conséquent, un choc quelque part qu'on frappe le corps, mais n'aura plus après ce choc, aucune tendance soit à un déplacement total, soit à un mouvement de rotation autour d'un de ses points.

Formules de géométrie analytique pour servir de préparation à la théorie générale du mouvement de rotation d'un corps solide.

1138. On a vu, par les propositions démontrées depuis l'art. 1121 jusqu'à l'art. 1125, dont le résultat général est consigné dans cet ar-

ticle 1125, que tout ce qu'il y a de difficile dans la détermination des phénomènes du mouvement d'un corps solide, est relatif au mouvement des molécules de ce corps autour de son centre de gravité ; les recherches, qui concernent cette détermination, exigent qu'on rapporte les positions des molécules à des axes, fixes dans le corps, dont on compare les positions à celles d'autres axes parallèles à des lignes fixes dans l'espace ; il faut donc, dans ces recherches, faire usage des formules par lesquelles on passe d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre, et j'ai cru qu'il était convenable de placer ici les principales de ces formules, dont quelques-unes ont déja été employées, soit dans cette seconde partie du cours, soit dans la première.

Le mode le plus général de passer du système des coordonnées rectangulaires x, y et z, à un autre système qu'on peut appeler système des coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, consiste à prendre à un point de l'espace, autre que le point d'intersection des coordonnées primitives, une nouvelle origine, par laquelle on fait passer trois axes, à angles droits les uns sur les autres, qui sont les axes des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, et qui forment des angles ou donnés, ou assujettis à certaines conditions, avec les axes des x, y et z.

Ainsi les relations qui lient une des coordonnées x, y, z aux coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, et réciproquement, sont exprimées par des équations dans lesquelles ces diverses coordonnées ne sont qu'à la première puissance, et dont chacune contient, en général, un terme constant, relatif aux positions respectives des deux origines, et d'autres termes variables, ayant pour facteurs les quantités circulaires relatives aux angles que forment entre eux les axes des deux systêmes de coordonnées.

Comme il suffit à l'objet que j'ai en vue, de faire varier les directions des axes coordonnés, je supposerai dans les formules de transformation que l'origine reste la même ; ainsi je n'aurai pas besoin des termes constants dont je viens de parler, qu'on peut d'ailleurs introduire à volonté, dans l'analyse, sans rien changer aux termes variables.

1139. x, y et z étant les coordonnées primitives et $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ un autre système de coordonnées, qui ont la même origine que les premières, je pose la notation suivante.

Nouvelles coordonnées.	Cosinus des angles formés par les nouvelles coordonnées et par les axes des		
	x	y	z
$x_{\prime}$	$\alpha_{\prime}$	$\alpha_{\prime\prime}$	$\alpha_{\prime\prime\prime}$
$y_{\prime}$	$\beta_{\prime}$	$\beta_{\prime\prime}$	$\beta_{\prime\prime\prime}$
$z_{\prime}$	$\gamma_{\prime}$	$\gamma_{\prime\prime}$	$\gamma_{\prime\prime\prime}$

Menant un rayon vecteur de l'origine commune à l'un des points qui a pour coordonnées, soit x, y et z, soit $x_{\prime}$, $y_{\prime}$ et $z_{\prime}$, et, la longueur de ce rayon vecteur étant ρ, le cosinus de l'angle qu'il forme avec l'axe des x, est $\frac{x}{\rho}$, mais, d'une autre part, ce même rayon vecteur, et l'axe des x, font, avec les axes des $x_{\prime}$, $y_{\prime}$, $z_{\prime}$, des angles dont les cosinus, respectifs, sont $\frac{x_{\prime}}{\rho}$, $\frac{y_{\prime}}{\rho}$, $\frac{z_{\prime}}{\rho}$; $\alpha_{\prime}$, $\beta_{\prime}$, $\gamma_{\prime}$; donc d'après le théorème de trigonométrie, déja employé plusieurs fois, dans le cours de cet ouvrage, on a $\frac{x}{\rho} = \frac{\alpha_{\prime} x_{\prime}}{\rho} + \frac{\beta_{\prime} y_{\prime}}{\rho} + \frac{\gamma_{\prime} z_{\prime}}{\rho}$; cherchant, par les mêmes considérations les valeurs correspondantes des cosinus $\frac{y}{\rho}$ et $\frac{z}{\rho}$ et multipliant, par ρ, les trois équations qui donnent $\frac{x}{\rho}$, $\frac{y}{\rho}$ et $\frac{z}{\rho}$, on a

rême ci-dessus cité, $\frac{x_{,}}{\rho}=\alpha_{,}\frac{x}{\rho}+\alpha_{,,}\frac{y}{\rho}+\alpha_{,,,}\frac{z}{\rho}$; et déduisant, du même théorême, les valeurs des deux autres cosinus $\frac{y_{,}}{\rho}$ et $\frac{z_{,}}{\rho}$, on aurait les trois équations

$$(2)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} x_{,}=\alpha_{,}x+\alpha_{,,}y+\alpha_{,,,}z \\ y_{,}=\beta_{,}x+\beta_{,,}y+\beta_{,,,}z \\ z_{,}=\gamma_{,}x+\gamma_{,,}y+\gamma_{,,,}z \end{array}\right.$$

Les cosinus α, β, γ, de différents accents, ont entre eux des relations qui deviennent manifestes à l'inspection du tableau placé au commencement de cet article.

On a d'abord six équations données par l'égalité entre le quarré du rayon et la somme des quarrés des cosinus des angles formés, par une même ligne, et par chacun des axes coordonnés.

Appliquant ensuite le théorême de trigonométrie, qui a donné les équations (1) et (2), aux angles droits que forment entre eux, soit les axes des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, soit ceux des x, y, z, on a, en faisant attention que le cosinus d'un angle droit est égal à zéro, six autres équations, ce qui donne en tout les douze équations suivantes:

$$(3)\ldots\left\{\begin{array}{l} \alpha_{,}^2+\alpha_{,,}^2+\alpha_{,,,}^2=1;\ \alpha_{,}\beta_{,}+\alpha_{,,}\beta_{,,}+\alpha_{,,,}\beta_{,,,}=0 \\ \beta_{,}^2+\beta_{,,}^2+\beta_{,,,}^2=1;\ \alpha_{,}\gamma_{,}+\alpha_{,,}\gamma_{,,}+\alpha_{,,,}\gamma_{,,,}=0 \\ \gamma_{,}^2+\gamma_{,,}^2+\gamma_{,,,}^2=1;\ \beta_{,}\gamma_{,}+\beta_{,,}\gamma_{,,}+\beta_{,,,}\gamma_{,,,}=0 \end{array}\right.$$

$$(4)\ldots\left\{\begin{array}{l} \alpha_{,}^2+\beta_{,}^2+\gamma_{,}^2=1;\ \alpha_{,}\alpha_{,,}+\beta_{,}\beta_{,,}+\gamma_{,}\gamma_{,,}=0 \\ \alpha_{,,}^2+\beta_{,,}^2+\gamma_{,,}^2=1;\ \alpha_{,}\alpha_{,,,}+\beta_{,}\beta_{,,,}+\gamma_{,}\gamma_{,,,}=0 \\ \alpha_{,,,}^2+\beta_{,,,}^2+\gamma_{,,,}^2=1;\ \alpha_{,,}\alpha_{,,,}+\beta_{,,}\beta_{,,,}+\gamma_{,,}\gamma_{,,,}=0 \end{array}\right.$$

Chacun de ces systêmes d'équations, (3) et (4), exprime les mêmes conditions; ils peuvent donc se remplacer mais ils ne donnent, réellement, que six équations entre les neuf coefficients $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$ etc.; on peut, ainsi, regarder trois de ces coefficients comme indéterminés, et assigner les valeurs des six autres, soit par le systême (3), soit par le systême (4).

1140. Je vais maintenant chercher d'autres valeurs de ces coefficients $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$ etc. en fonctions de trois angles, qui sont d'un grand usage dans l'astronomie physique, et qui suffisent, seuls, pour déterminer les positions des axes des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, par rapport aux axes des x, y et z.

Substituant, dans ces trois dernières équations, les valeurs analytiques de *AH, M'H, MN'* et *Mm,* précédemment données, on a, ultérieurement,

$$(A)\ldots\left\{\begin{aligned}x_{,}&=\left\{\begin{aligned}&x\,(\cos.\psi\cos.\phi-\sin.\psi\sin.\phi\cos.\theta)\\&+y\,(\cos.\psi\sin.\phi\cos.\theta+\sin.\psi\cos.\phi)\\&+z\sin.\theta\sin.\phi\end{aligned}\right.\\y_{,}&=\left\{\begin{aligned}&-x\,(\sin.\psi\cos.\phi\cos.\theta+\sin.\phi\cos.\psi)\\&+y\,(\cos.\psi\cos.\phi\cos.\theta-\sin.\phi\sin.\psi)\\&+z\sin.\theta\cos.\phi\end{aligned}\right.\\z_{,}&=\left\{\begin{aligned}&x\sin.\psi\sin.\theta\\&-y\cos.\psi\sin.\theta\\&+z\cos.\theta\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.$$

On verra, en comparant aux équations (2) de l'art. 1139, celles que je viens de poser, que les neuf coefficients des deuxièmes membres de ces dernières, en commençant par la première ligne horizontale, sont respectivement les valeurs de $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$, $\alpha_{,,,}$, $6_{,}$, $6_{,,}$, $6_{,,,}$, $\gamma_{,}$, $\gamma_{,,}$, $\gamma_{,,,}$; ainsi rien n'est plus aisé que d'avoir x, y, z en $x_{,}, y_{,}, z_{,}$; Il ne s'agit que de substituer, dans les équations (1) de l'art. 1139, aux coefficients $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$, $\alpha_{,,,}$, etc., ceux qui, par la comparaison des équations (2), art. 1139, et de l'équation (*A*) ci-dessus, sont reconnus leur être respectivement égaux.

1141. Pour déduire des équations (*A*), de l'article précédent, les équations (1) de l'art. 1066, il faut faire attention que ces dernières sont établies en supposant que l'axe des $y_{,}$ est la ligne d'intersection des plans xy et $x_{,}y_{,}$, ce qui conserve, à θ, sa signification, et donne $\phi =$ *angle droit,* $\sin.\phi = 1$, $\cos.\phi = 0$. De plus l'angle η de l'article cité est complément de ψ, et la ligne de projection, qui forme, sur le plan xy, cet angle η avec l'axe des x, se trouvant dans l'angle droit des x et y positives, la ligne *AH,* n°. 1, passe dans l'angle droit des x positives et y négatives, ψ devient donc négatif, et on a,

$$-\sin.\psi = \cos.\eta,\quad \cos.\psi = \sin.\eta.$$

les valeurs, substituées dans les équations (*A*), ci-dessus, donnent les équations (1) de l'art. 1066, qui se trouvent ainsi démontrées.

De l'axe instantané de rotation dans le mouvement d'un corps de forme invariable, autour d'un point fixe.

1142. L'indépendance, entre le mouvement de translation du centre de gravité d'un corps solide, et le mouvement, autour de ce centre, des différentes parties du corps, énoncée par le théorème de l'art. 1125, et démontrée, art. 1121 et suivants, permet de traiter séparément les questions relatives à ces deux mouvements, et on peut, d'après ce qui est dit, art. 1125, résoudre les problèmes relatifs au mouvement de rotation, en supposant le centre de gravité immobile. Je vais, pour plus de généralité, supposer, d'abord, que le corps est assujetti à tourner autour d'un point fixe quelconque.

Je prends le point fixe de rotation pour origine commune des $x, y, z; x_{,}, y_{,} z_{,};$ à un instant déterminé, qui peut être le premier instant du mouvement, l'axe des $x_{,}$ a une position donnée per rappor à celui des x, et il en est de même, respectivement, des $y_{,}$ et des y, des $z_{,}$ et des z; mais, après cet instant déterminé, les axes des x, y et z demeurent fixes dans l'espace, et ceux des $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$ se meuvent avec le corps, en conservant, dans ce corps, leurs positions initiales. C'est ce mouvement, qui, pendant le temps t, fait varier les angles dont les cosinus $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$, etc., sont inscrits dans le tableau de l'art. 1139, et les angles ψ, ϕ et θ des équations (A) de l'art. 1140.

Il suit de là 1°. que les coordonnées x, y, z d'une même molécule du corps, varient, d'un instant à l'autre, mais que ses coordonnées $x_{,}, y_{,}$ et $z_{,}$ ne varient point avec le temps, elles changent, seulement, de valeur d'une molécule à l'autre; ce qui tient à ce que les axes des x, x, z sont fixes dans l'espace, ceux des $x_{,}, y_{,}, z_{,}$, étant fixes dans le corps 2°. Que les angles qui ont, pour cosinus, $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$, etc., et ceux qui ont, pour valeurs, ψ, ϕ et θ varient avec le temps, puisqu'ils dépendent des positions des axes mobiles des $x_{,}, y_{,}$ et $z_{,}$ par rapport aux axes fixes des x, y et z.

1143. Les composantes des vîtesses des molécules prises, respectivement, dans les sens parallèles aux x, y et z, ont donc pour valeurs, à un instant quelconque $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, et on a, d'après les

équations (1) de l'art. 1139, en faisant attention que $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, etc., sont les seules variables, par rapport au temps,

$$(V)\ldots\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x_{,}\dfrac{d\alpha_{,}}{dt}+y_{,}\dfrac{d\beta_{,}}{dt}+z_{,}\dfrac{d\gamma_{,}}{dt}\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x_{,}\dfrac{d\alpha_{,,}}{dt}+y_{,}\dfrac{d\beta_{,,}}{dt}+z_{,}\dfrac{d\gamma_{,,}}{dt}\\[2ex]\dfrac{dz}{dt}=x_{,}\dfrac{d\alpha_{,,,}}{dt}+y_{,}\dfrac{d\beta_{,,,}}{dt}+z_{,}\dfrac{d\gamma_{,,,}}{dt}\end{cases}$$

1144. Je vais, d'abord, appliquer ces équations à une détermination importante, celle de *l'axe instantané de rotation*, et je pose, pour abréger, les équations hypothétiques,

$$(1)\ldots\begin{cases}\gamma_{,}\dfrac{d\beta_{,}}{dt}+\gamma_{,,}\dfrac{d\beta_{,,}}{dt}+\gamma_{,,,}\dfrac{d\beta_{,,,}}{dt}=p\\[2ex]\gamma_{,}\dfrac{d\alpha_{,}}{dt}+\gamma_{,,}\dfrac{d\alpha_{,,}}{dt}+\gamma_{,,,}\dfrac{d\alpha_{,,,}}{dt}=-q\\[2ex]\beta_{,}\dfrac{d\alpha_{,}}{dt}+\beta_{,,}\dfrac{d\alpha_{,,}}{dt}+\beta_{,,,}\dfrac{d\alpha_{,,,}}{dt}=r\end{cases}$$

L'axe instantané de rotation est la droite, passant par le point fixe, dont tous les points, à un instant déterminé, sont immobiles pendant cet instant; cet axe peut être regardé comme un axe fixe autour duquel le corps tourne, pendant l'élément de temps dt, et qui, en général, est supposé changer de position, dans les instants suivants.

Pour démontrer l'existence et assigner la position de cet axe, je remarque que, pour tous les points de positions quelconques, qui sont immobiles, pendant un instant dt, on doit avoir $\dfrac{dx}{dt}=0$, $\dfrac{dy}{dt}=0$, $\dfrac{dz}{dt}=0$; ainsi l'égalité, à zéro, des deuxièmes membres des équations (V) de l'article précédent, doit donner tous les points qui jouissent de cette propriété; on a, par cette condition,

$$(2)\ldots\left\{\begin{array}{l} x_{,}\dfrac{d\alpha_{,}}{dt}+y_{,}\dfrac{d\beta_{,}}{dt}+z_{,}\dfrac{d\gamma_{,}}{dt}=0\\ x_{,}\dfrac{d\alpha_{,,}}{dt}+y_{,}\dfrac{d\beta_{,,}}{dt}+z_{,}\dfrac{d\gamma_{,,}}{dt}=0\\ x_{,}\dfrac{d\alpha_{,,,}}{dt}+y_{,}\dfrac{d\beta_{,,,}}{dt}+z_{,}\dfrac{d\gamma_{,,,}}{dt}=0\end{array}\right.$$

Multipliant, respectivement la 1re, 2e, 3e de ces équations par $\gamma_{,}$, $\gamma_{,,}$, $\gamma_{,,,}$, et faisant la somme des équations produits; introduisant les valeurs de p et q des équations (1) et la valeur .... $0=\gamma_{,}d\gamma_{,}+\gamma_{,,}d\gamma_{,,}+\gamma_{,,,}d\gamma_{,,,}$, donnée par la troisième équation (3) de l'art. 1139, on aura $py_{,}-qx_{,}=0$.

Revenant aux équations (2), on multipliera la 1re, 2e, 3e, respectivement, par $\beta_{,}$, $\beta_{,,}$, $\beta_{,,,}$, et prenant la somme des équations produits, introduisant la valeur de r, tirée des équations (1) et faisant attention qu'en vertu des 2e et 6e équations (3) de l'art. 1139, on a

$$\beta_{,}d\beta_{,}+\beta_{,,}d\beta_{,,}+\beta_{,,,}d\beta_{,,,}=0.$$

$$(3)\ldots\beta_{,}d\gamma_{,}+\beta_{,,}d\gamma_{,,}+\beta_{,,,}d\gamma_{,,,}=-\gamma_{,}d\beta_{,}-\gamma_{,,}d\beta_{,,}-\gamma_{,,,}d\beta_{,,,}=-pdt,$$

on a, toutes réductions faites, $rx_{,}-pz_{,}=0$.

Enfin, multipliant ces mêmes équations (2), respectivement, par $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$, $\alpha_{,,,}$, prenant la somme des équations produits, faisant attention qu'en vertu des 1re, 4e et 5e équations (3) de l'art. 1139, on a

$$\alpha_{,}d\alpha_{,}+\alpha_{,,}d\alpha_{,,}+\alpha_{,,,}d\alpha_{,,,}=0$$

$$(4)\ldots\left\{\begin{array}{l} \alpha d\beta_{,}+\alpha_{,,}d\beta_{,,}+\alpha_{,,,}d\beta_{,,,}=-\beta_{,}d\alpha_{,}-\beta_{,,}d\alpha_{,,}-\beta_{,,,}d\alpha_{,,,}=-rdt\\ \alpha_{,}d\gamma_{,}+\alpha_{,,}d\gamma_{,,}+\alpha_{,,,}d\gamma_{,,,}=-\gamma_{,}d\alpha_{,}-\gamma_{,,}d\alpha_{,,}-\gamma_{,,,}d\alpha_{,,,}=qdt\end{array}\right.$$

on aura $qz_{,}-ry_{,}=0$

Ainsi la ligne dont tous les points sont immobiles, à l'instant auquel se rapportent les quantités p, q, r, a, pour équations, les trois suivantes dont l'une quelconque est donnée par les deux autres, et qui remplacent les équations (2),

$$(5)\ldots.py_{,}-qx_{,}=0;\ rx_{,}-pz_{,}=0;\ qz_{,}-ry_{,}=0$$

cette ligne est une ligne droite; ainsi voilà l'existence de *l'axe instantané de rotation* démontrée et sa position déterminée.

Représentant par α, β et γ les angles, respectifs, que forme cet axe avec les axes des $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$, on a, par les formules connues de la géométrie analytique,

$$(6)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\cos. \alpha = \dfrac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\\ \cos. 6 = \dfrac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\\ \cos. \gamma = \dfrac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\end{array}\right.$$

Vitesse angulaire du corps autour de l'axe instantané de rotation; composantes, parallèles aux axes, des forces accélératrices de ses différents points.

1145. D'après ce qui est démontré dans le chapitre précédent, il y a, à chaque instant, une certaine ligne passant par le point fixe, autour de laquelle tournent tous les points du corps; la position de cet axe peut être invariable, pendant un temps indéfini, mais on doit toujours la considérer comme telle pendant le temps élémentaire dt, en sorte que, à chaque instant, un point quelconque, du corps, peut être censé parcourir un arc de cercle autour de la ligne qui fait, à cet instant, la fonction d'axe instantané de rotation; la vîtesse angulaire du corps, autour de cet axe, est donc égale à la vîtesse absolue du point quelconque, dont je viens de parler, divisée par le rayon du cercle qu'il décrit. Pour déterminer cette vîtesse angulaire avec plus de facilité, prenons le point qui se trouve, sur l'axe des $z_{,}$ à l'unité de distance de l'origine, on aura, pour ce point, $x_{,}=0$, $y_{,}=0$, $z_{,}=1$, et en substituant, dans l'expression générale $\sqrt{\dfrac{dx^2}{dt^2}+\dfrac{dy^2}{dt^2}+\dfrac{dz^2}{dt^2}}$, les valeurs données par la somme des quarrés des trois équations (V) de l'art. 1143, après avoir fait, dans ces équations, $x'=0$, $y=0$, $z=1$, on aura $\sqrt{\dfrac{d\gamma_{,}^2+d\gamma_{,,}^2+d\gamma_{,,,}^2}{dt^2}}$ $=$ la vîtesse du point dont il s'agit. Le rayon du cercle qu'il décrit $=\sin.\gamma=\sqrt{1-\cos.^2\gamma}=\sqrt{\cos.^2\alpha+\cos.^2 6}=\dfrac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$; désignant, par g, la vîtesse angulaire cherchée, on a

$$8=\frac{\sqrt{dy_{,}^2+dy_{,,}^2+dy_{,,,}^2}}{dt\sqrt{p^2+q^2}}\sqrt{p^2+q^2+r^2}$$

le premier facteur de cette valeur de 8 est égal à l'unité; pour le démontrer on déduira, de l'équation (3) de l'art. 1144, et de la deuxième équation (4), du même article, en ayant égard aux équations de conditions de l'art. 1139, la valeur de $(p^2+q^2)\,dt^2$ qu'on trouvera égale à

$$dy_{,}^2+dy_{,,}^2+dy_{,,,}^2-(y_{,}dy_{,}+y_{,,}dy_{,,}+y_{,,,}dy_{,,,})^2$$

quantité qui se réduit à ses trois premiers termes, en vertu de la troisième équation (3) de l'art. 1139, de laquelle on tire.......... $y_{,}dy_{,}+y_{,,}dy_{,,}+y_{,,,}dy_{,,,}=0$; ainsi on a simplement

$$(\omega)\ldots\ldots 8=\sqrt{p^2+q^2+r^2}$$

La vîtesse angulaire demeurera invariable lorsque la quantité $p^2+q^2+r^2$ sera constante; et cette condition peut être remplie sans que p, q et r soient, chacune en particulier, des quantités constantes.

1146. Les composantes de la vîtesse absolue, $\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{dt}$, d'un des points du corps, prises parallèlement aux axes fixes des x, y et z sont $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; à l'instant où ces vîtesses ont lieu, les axes mobiles des $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$ ont de certaines positions que l'on doit regarder comme constantes pendant le temps élémentaire dt; ainsi, pendant ce temps, élémentaire, chacune des vîtesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ peut fournir trois composantes, respectivement parallèles aux $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, dont on aura les valeurs, en multipliant les vîtesses dont il s'agit par les cosinus $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$, etc. des angles qu'elles forment avec les $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$; voici le tableau de ces composantes, dans lequel on a placé, sur une même ligne horizontale, chacune de celles qui dérivent d'une même vîtesse parallèle à un des axes fixes:

Vîtesses d'un des points du corps, prises parallèlement aux coordonnées x, y, z de ce point.	Composantes des vitesses ci-à coté, parallèles aux axes des		
	$x_{\prime}$	$y_{\prime}$	$z_{\prime}$
$\frac{dx}{dt}$	$\alpha_{\prime}\frac{dx}{dt}$	$6_{\prime}\frac{dx}{dt}$	$\gamma_{\prime}\frac{dx}{dt}$
$\frac{dy}{dt}$	$\alpha_{\prime\prime}\frac{dy}{dt}$	$6_{\prime\prime}\frac{dy}{dt}$	$\gamma_{\prime\prime}\frac{dy}{dt}$
$\frac{dz}{dt}$	$\alpha_{\prime\prime\prime}\frac{dz}{dt}$	$6_{\prime\prime\prime}\frac{dz}{dt}$	$\gamma_{\prime\prime\prime}\frac{dz}{dt}$

rassemblant les termes qui se rapportent à un même axe, on a

Vîtesses du point qui répond aux coordonnées x, y, z, prises parallèlement aux axes des

$$\left\{\begin{array}{l} x_{\prime}\ldots\ldots\alpha_{\prime}\frac{dx}{dt}+\alpha_{\prime\prime}\frac{dy}{dt}+\alpha_{\prime\prime\prime}\frac{dz}{dt} \\ y_{\prime}\ldots\ldots 6_{\prime}\frac{dx}{dt}+6_{\prime\prime}\frac{dy}{dt}+6_{\prime\prime\prime}\frac{dz}{dt} \\ z_{\prime}\ldots\ldots\gamma_{\prime}\frac{dx}{dt}+\gamma_{\prime\prime}\frac{dy}{dt}+\gamma_{\prime\prime\prime}\frac{dz}{dt} \end{array}\right.$$

On peut donner d'autres formes aux expressions de ces vîtesses, en remplaçant $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, par leurs valeurs tirées de l'équation (V) de l'art. 1143; si, de plus, on introduit, dans les résultats des substitutions, les valeurs de p, q et r, art. 1144, équations (1), on aura pour les vîtesses respectivement parallèles aux $x_{\prime}$, $y_{\prime}$, et $z_{\prime}$, toutes réductions faites, les expressions $qz_{\prime}-ry_{\prime}$; $rx_{\prime}-pz_{\prime}$; $py_{\prime}=qx_{\prime}$; et ce sont précisément celles que nous avons trouvées égales à zéro, art. 1144, lorsqu'il s'agissait de déterminer la ligne dont tous les points étaient immobiles pendant l'instant dt.

1147. Ces doubles expressions des vîtesses parallèles à un même axe, trouvées dans l'article précédent, fournissent les équations suivantes;

$$(1) \ldots \ldots \left\{ \begin{aligned} \alpha_{,} \frac{dx}{dt} + \alpha_{,,} \frac{dy}{dt} + \alpha_{,,,} \frac{dz}{dt} &= qz_{,} - ry_{,} \\ \mathcal{E}_{,} \frac{dx}{dt} + \mathcal{E}_{,,} \frac{dy}{dt} + \mathcal{E}_{,,,} \frac{dz}{dt} &= rx_{,} - pz_{,} \\ \gamma_{,} \frac{dx}{dt} + \gamma_{,,} \frac{dy}{dt} + \gamma_{,,,} \frac{dz}{dt} &= py_{,} - qx_{,} \end{aligned} \right.$$

Tirant de ces équations les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, et employant, dans les reductions, les équations de l'art. 1139, on a

$$(2) \ldots \ldots \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha_{,}(qz_{,} - ry_{,}) + \mathcal{E}_{,}(rx_{,} - pz_{,}) + \gamma_{,}(py_{,} - qx_{,}) \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha_{,,}(qz_{,} - ry_{,}) + \mathcal{E}_{,,}(rx_{,} - pz_{,}) + \gamma_{,,}(py_{,} - qx_{,}) \\ \frac{dz}{dt} &= \alpha_{,,,}(qz_{,} - ry_{,}) + \mathcal{E}_{,,,}(rx_{,} - pz_{,}) + \gamma_{,,,}(py_{,} - qx_{,}) \end{aligned} \right.$$

Les différentielles de ces équations, par rapport à t, sont, en se rappelant que $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$, art. 1142, ne dépendent pas du temps,

$$(3) \ldots \left\{ \begin{aligned} \frac{ddx}{dt} &= \alpha_{,}(z_{,}dq - y_{,}dr) + \mathcal{E}_{,}(x_{,}dr - z_{,}dp) + \gamma_{,}(y_{,}dp - x_{,}dq) \\ &\quad + (qz_{,} - ry_{,})d\alpha_{,} + (rx_{,} - pz_{,})d\mathcal{E}_{,} + (py_{,} - qx_{,})d\gamma_{,} \\ \frac{ddy}{dt} &= \alpha_{,,}(z_{,}dq - y_{,}dr) + \mathcal{E}_{,,}(x_{,}dr - z_{,}dp) + \gamma_{,,}(y_{,}dp - x_{,}dq) \\ &\quad + (qz_{,} - ry_{,})d\alpha_{,,} + (rx_{,} - pz_{,})d\mathcal{E}_{,,} + (py_{,} - qx_{,})d\gamma_{,,} \\ \frac{ddz}{dt} &= \alpha_{,,,}(z_{,}dq - y_{,}dr) + \mathcal{E}_{,,,}(x_{,}dr - z_{,}dp) + \gamma_{,,,}(y_{,}dp - x_{,}dq) \\ &\quad + (qz_{,} - ry_{,})d\alpha_{,,,} + (rx_{,} - pz_{,})d\mathcal{E}_{,,,} + (py_{,} - qx_{,})d\gamma_{,,,} \end{aligned} \right.$$

en divisant, par dt, les premiers membres de ces équations, on a les composantes, respectivement parallèles aux axes des x, y et z, de la force accélératrice du point du corps dont la position est déterminée par les coordonnées x, y et z; la première $\frac{ddx}{dt^2}$, de ces composantes, se décompose elle-même; parallèlement aux $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, en $\alpha_{,} \frac{ddx}{dt^2}$,

$\alpha_{\prime\prime} \frac{ddy}{dt^2}$, $\alpha_{\prime\prime\prime} \frac{ddz}{dt^2}$, et chacune des deux autres $\frac{ddy}{dt^2}$ et $\frac{ddz}{dt^2}$, fournit des composantes analogues, auxquelles il faut appliquer les observations faites dans l'article précédent sur les vîtesses parallèles aux $x_\prime, y_\prime, z_\prime$; rassemblant toutes les valeurs qui se rapportent à un même axe, et désignant par $p_\prime, q_\prime, r_\prime$, respectivement, les composantes de la force accélératrice du point dont il s'agit, prises parallèlement aux $x_\prime, y_\prime$ et $z_\prime$, on a

$$(4) \ldots\ldots \begin{cases} p_\prime = \alpha_\prime \frac{ddx}{dt^2} + \alpha_{\prime\prime} \frac{ddy}{dt^2} + \alpha_{\prime\prime\prime} \frac{ddz}{dt^2} \\ q_\prime = 6_\prime \frac{ddx}{dt^2} + 6_{\prime\prime} \frac{ddy}{dt^2} + 6_{\prime\prime\prime} \frac{ddz}{dt^2} \\ r_\prime = \gamma_\prime \frac{ddx}{dt^2} + \gamma_{\prime\prime} \frac{ddy}{dt^2} + \gamma_{\prime\prime\prime} \frac{ddz}{dt^2} \end{cases}$$

Remplaçant $\frac{ddx}{dt^2}$, $\frac{ddy}{dt^2}$ et $\frac{ddz}{dt^2}$, par leurs valeurs tirées des équations (3) et employant, dans les réductions, les équations qui ont précédemment servi au même usage, on a, finalement, les équations suivantes qui, divisées par dt, donnent les valeurs de $p_\prime$, $q_\prime$, et $r_\prime$,

$$(5) \ldots\ldots \begin{cases} p_\prime dt = z_\prime dq - y_\prime dr + (py_\prime - qx_\prime)qdt + (pz_\prime - rx_\prime)rdt \\ q_\prime dt = x_\prime dr - z_\prime dp + (qx_\prime - py_\prime)pdt + (qz_\prime - ry_\prime)rdt \\ r_\prime dt = y_\prime dp - x_\prime dq + (rx_\prime - pz_\prime)pdt + (ry_\prime - qz_\prime)qdt \end{cases}$$

Déterminations relatives au moment principal qui se rapporte au point fixe autour duquel le mobile est assujetti à tourner.

1148. Je vais rappeler aux élèves les principales propositions de la théorie générale des *moments*, que j'ai exposée; art. 157 et suivants, les propriétés démontrées dans quelques-uns de ces articles, servant à introduire dans l'analyse des problèmes relatifs au mouvement des corps, des simplifications analogues à celles que fournissent les propriétés du centre de gravité et des axes principaux. On a vu, art. 170, que, parmi toutes les lignes qu'on pouvait mener par un point donné, il y en avait une par rapport à laquelle la somme des moments d'un système de forces, où le moment unique, équivalant à cette somme, était un

maximum. Désignant, par K, ce moment, que j'appellerai *moment principal*, on a, art. cité,

$$(1)\ldots K=(L^2+M^2+N^2)$$

L, M et N étant les sommes respectives des moments des forces, par rapport à trois axes rectangulaires, assujettis, d'ailleurs, à la seule condition de se couper au point donné, pour lequel point $L^2+M^2+N^2$ est une quantité constante, quoique chacune, en particulier, des quantités L, M et N puisse varier suivant les diverses positions des axes rectangulaires.

Si, pour une position déterminée de ces axes, $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$, représentent les angles respectifs qu'ils forment avec la ligne, ou axe du moment principal, on a, article cité,

$$(2)\ldots\left\{\cos. A_{,}=\frac{L}{K}\,;\ \cos. B_{,}=\frac{M}{K}\,;\ \cos. C_{,}=\frac{N}{K}\right\}.$$

1149. Voici une des conséquences remarquables, déduite, dans les articles ci-dessus cités, de l'analyse par laquelle on est parvenu aux déterminations de l'article précédent. Le moment principal K, dont la valeur est donnée, pour une origine de position déterminée dans l'espace, varie, lorsque l'origine, à laquelle il se rapporte, change, en sorte qu'il existe un point, dans l'espace, tel que le plus grand des moments, pris relativement aux lignes qui se coupent à ce point, est, en même temps, le plus petit de ceux de son espèce, c'est-à-dire, que ce moment est, parmi les moments principaux, un *minimum maximorum :* pour déterminer la position de la ligne droite qui jouit de cette propriété, on cherchera la valeur du moment principal K, convenable à un point arbitraire de l'espace, concevant ensuite chacune des forces, qui entrent dans l'expression de ce moment, appliquée au point arbitraire, dans une direction parallèle à celle qu'elle a effectivement, et déterminant, par les formules de l'art. 65, la résultante générale R de ces forces, ainsi transportées, et la direction de cette résultante, que je suppose faire un angle Θ, avec l'axe du moment principal K, on élevera du plan renfermant cet axe et la direction de R, une perpendiculaire ayant, pour origine, le sommet de l'angle Θ, et on mènera, par le point de cette perpendiculaire placé à la distance $\frac{K \sin. \Theta}{R}$ du plan, une parallèle, à la direction de R, laquelle sera l'axe

du moment *minimum maximorum*, ce moment ayant pour valeur $K\cos.\theta$.

J'ai fait voir, art. 200 et suivants, comment ces belles propriétés des moments étaient liées à celles des *aires*.

1150. Une molécule, quelconque, du corps assujetti à tourner autour d'un point fixe, molécule dont je désigne la masse par m, et dont les coordonnées, fixes dans le corps, et mobiles avec lui, sont $x_,$, $y_,$, et $z_,$, a, au bout du temps t, art. 1146, les vîtesses $qz_,-ry_,$, $rx_,-pz_,$, $py_,-qx_,$, respectivement parallèles aux $x_,$, $y_,$ et $z_,$, desquelles résultent, dans les mêmes directions, les quantités de mouvement $m(qz_,-ry_,)$, $m(rx_,-pz_,)$, $m(py_,-qx_,)$, qui représentent les sommes $P\cos.\alpha$, $P\cos.\beta$, $P\cos.\gamma$, de l'article 162, et dont les moments, repectifs, par rapport aux axes des $x_,$, $y_,$ et $z_,$ sont, articles cités,

$$mz_,(rx_,-pz_,)-my_,(py_,-qx_,)$$
$$mx_,(py_,-qx_,)-mz_,(qz_,-ry_,)$$
$$my_,(qz_,-ry_,)-mx_,(rx_,-pz_,)$$

les sommes de ces moments, prises dans toute l'étendue du corps, sont les quantités représentées, art. 169, par L, M et N et on aura, en faisant attention que p, q et r, ne varient qu'avec le temps, et doivent être considérées, comme constantes, lorsqu'il s'agit d'intégrales relatives à l'étendue, prises à un instant déterminé,

$$(1)\ldots\left\{\begin{array}{l} L=q\int(mx_,y_,)+r\int(mx_,z_,)-p\int\{m(y_,^2+z_,^2)\} \\ M=r\int(my_,z_,)+p\int(my_,x_,)-q\int\{m(x_,^2+z_,^2)\} \\ N=p\int(mz_,x_,)+q\int(mz'y_,)-r\int\{m(x_,^2+y_,^1)\} \end{array}\right.$$

Ces expressions deviendront beaucoup plus simples, si on prend pour axes des $x_,$, $y_,$ et $z_,$, les axes principaux qui ont leurs intersections communes au point fixe; on aura, par la propriété de ces axes, art. 1067,

$$\int(mx_,y_,)=0;\ \int(mxz_,)=0;\ \int(my_,z_,)=0$$

et en faisant, pour abréger,

$$\int\{m(y_,^2+z_,^2)\}=A;\ \int\{m(x_,^2+z_,^2)\}=B;\ \int\{m(x_,^2+y_,^2)\}=C$$

les valeurs de L, M et N deviendront,

$$(2)\ldots\ldots L=-Ap;\ M=-Bq;\ N=-Cr.$$

La valeur du *moment principal*, rapportée au point fixe, sera, art. 1148, $\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}$ et les cosinus des angles formés par

l'axe de ce moment principal et par les axes des $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$, seront, respectivement, article cité,

$$(3)\ldots \frac{-Ap}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}};\ \frac{-Bq}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}};\ \frac{-Cr}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}};$$

L'axe des x faisant avec les $x_{,}$, $y_{,}$, et $z_{,}$, des angles respectifs, dont les cosinus sont, art. 1139, $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$ et $\gamma_{,}$ si on multiplie chacun de ces cosinus $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, par celui des cosinus (3), qui se rapporte au même axe, la somme des produits sera, d'après le théorême connu de trigonométrie, le cosinus de l'angle formé par cet axe des x et par l'axe du moment principal; les angles formés par celui-ci et par les axes des y et des z s'obtiendront de la même manière, et on aura

(4)…. Cosinus de l'angle formé par l'axe du moment principal, qui se rapporte au point fixe, et par l'axe des

$$\begin{cases} x \ldots - \dfrac{A\alpha_{,}p+B\beta_{,}q+C\gamma_{,}r}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}} \\ y \ldots - \dfrac{A\alpha_{,,}p+B\beta_{,,}q+C\gamma_{,,}r}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}} \\ z \ldots - \dfrac{A\alpha_{,,,}p+B\beta_{,,,}q+C\gamma_{,,,}r}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}} \end{cases}$$

Valeurs des quantités pdt, qdt et rdt en fonctions des angles ψ, ϕ et θ.

1151. En comparant les valeurs de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, données, art. 1139, équation (2), avec les valeurs des mêmes indéterminées tirées de l'équation (A), art. 1140, on trouve les relations suivantes entre les coefficients de x, y et z, dans ces diverses équations,

$$(1) \ldots\ldots \begin{cases} \alpha_{,} = \cos.\psi\cos.\phi - \sin.\psi\sin.\phi\cos.\theta \\ \alpha_{,,} = \cos.\psi\sin.\phi\cos.\theta + \sin.\psi\cos.\phi \\ \alpha_{,,,} = \sin.\theta\sin.\phi \\ \beta' = -(\sin.\psi\cos.\phi\cos.\theta + \sin.\phi\cos.\psi) \\ \beta_{,,} = \cos.\psi\cos.\phi\cos.\theta - \sin.\phi\sin.\psi \\ \beta_{,,,} = \sin.\theta\cos.\phi \\ \gamma_{,} = \sin.\psi\sin.\theta \\ \gamma_{,,} = -\cos.\psi\sin.\theta \\ \gamma_{,,,} = \cos.\theta \end{cases}$$

et on a, par les équations (1) de l'art. 1144, combinées avec les équations (3) de l'art. 1139,

$$(2)\ldots\begin{cases} p\,dt=\gamma_{,}d\beta_{,}+\gamma_{,,}d\beta_{,,}+\gamma_{,,,}d\beta_{,,,}=-(\beta_{,}d\gamma_{,}+\beta_{,,}d\gamma_{,,}+\beta_{,,,}d\gamma_{,,,} \\ q\,dt=-(\gamma_{,}d\alpha_{,}+\gamma_{,,}d\alpha_{,,}+\gamma_{,,,}d\alpha_{,,,})=\alpha_{,}d\gamma_{,}+\alpha_{,,}d\gamma_{,,}+\alpha_{,,,}d\gamma_{,,,} \\ r\,dt=\beta_{,}d\alpha_{,}+\beta_{,,}d\alpha_{,,}+\beta_{,,,}d\alpha_{,,,} \end{cases}$$

Différentiant les valeurs de $\gamma_{,}$, $\gamma_{,,}$, $\gamma_{,,,}$, et composant les produits $\alpha_{,}d\gamma_{,}$, $\alpha_{,,}d\gamma_{,,}$, $\alpha_{,,,}d\gamma_{,,,}$, le tout d'après les équations (1), on a

$$\alpha_{,}d\gamma_{,}=\begin{cases} (\cos.^2\psi\sin.\theta\cos.\phi-\sin.\psi\cos.\psi\sin.\theta\cos.\theta\sin.\phi)\,d\psi \\ +(\sin.\psi\cos.\psi\cos.\theta\cos.\phi-\sin.^2\psi\cos.^2\theta\sin.\phi)\,d\theta \end{cases}$$

$$\beta_{,}d\gamma_{,}=\begin{cases} (\sin.\psi\cos.\psi\sin.\theta\cos.\theta\sin.\phi+\sin.^2\psi\sin.\theta\cos.\phi)\,d\psi \\ -(\cos.^2\psi\cos.^2\theta\sin.\phi+\sin.\psi\cos.\psi\cos.\theta\cos.\phi)\,d\theta \end{cases}$$

$$\alpha_{,,,}d\gamma_{,,}'=-\sin.^2\theta\sin.\phi\,d\theta$$

Ajoutant ces équations, et réduisant, on a

$$\alpha_{,}d\gamma_{,}+\alpha_{,,}d\gamma_{,,}+\alpha_{,,,}d\gamma_{,,,}=\sin.\theta\cos.\phi\,d\psi-\sin.\phi\,d\theta$$

pour déduire, de cette valeur, celle de $\beta_{,}d\gamma_{,}+\beta_{,,}d\gamma_{,,}+\beta_{,,,}d\gamma_{,,,}$, il suffit de changer les α en β, et je remarque que, pour opérer ce changement, on doit, simplement, dans les valeurs de $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$, $\alpha_{,,,}$, données par les équations (1), substituer $-\sin.\phi$ à $\cos.\phi$ et $\cos.\phi$ à $\sin.\phi$, d'où je conclus

$$\beta_{,}d\gamma_{,}+\beta_{,,}d\gamma_{,,}+\beta_{,,,}d\gamma_{,,,}=-\sin.\theta\sin.\phi\,d\psi-\cos.\phi\,d\theta$$

passant à la valeur de $\beta_{,}d\alpha_{,}+\beta_{,,}d\alpha_{,,}+\beta_{,,,}d\alpha_{,,,}$, j'observe qu'en différentiant les α, par rapport à ϕ, on a

$$\left(\frac{d\alpha_{,}}{d\phi}\right)=\beta_{,};\ \left(\frac{d\alpha_{,,}}{d\phi}\right)=\beta_{,,};\ \left(\frac{d\alpha_{,,,}}{d\phi}\right)=\beta_{,,,},$$

et, qu'ainsi, le coefficient de $d\phi$, dans cette valeur, serait

$$\beta_{,}\left(\frac{d\alpha_{,}}{d\phi}\right)+\beta_{,,}\left(\frac{d\alpha_{,,}}{d\phi}\right)+\beta_{,,,}\left(\frac{d\alpha_{,,,}}{d\phi}\right)=\beta_{,}^2+\beta_{,,}^2+\beta_{,,,}^2=1,$$

(art. 1139). En différentiant ces mêmes α par rapport à θ, on trouve que les termes du coefficient de $d\theta$, dans la même valeur, se détruisent réciproquement, et on a, pour déterminer le coefficient de $d\psi$,

$$\beta_{,}\left(\frac{d\alpha_{,}}{d\psi}\right)=\begin{cases} \sin.^2\psi\cos.^2\phi\cos.\theta+\sin.\psi\cos.\psi\sin.\phi\cos.\phi\cos.^2\theta \\ +\sin.\phi\cos.\phi\sin.\psi\cos.\psi+\sin.^2\phi\cos.^2\psi\cos.\theta \end{cases}$$

$$\beta_{,,}\left(\frac{d\alpha_{,,}}{d\psi}\right)=\begin{cases} -\sin.\psi\cos.\psi\sin.\phi\cos.\phi\cos.^2\theta+\cos.^2\psi\cos.^2\phi\cos.\theta \\ +\sin.^2\phi\sin.^2\psi\cos.\theta-\sin.\psi\cos.\psi\sin.\phi\cos.\phi \end{cases}$$

$$\beta_{,,,}\left(\frac{d\alpha_{,,,}}{d\psi}\right)=0$$

et on déduit de ces résultats de calculs

$$\beta_{,}d\alpha_{,}+\beta_{,,}d\alpha_{,,}+\beta_{,,,}d\alpha_{,,,}=d\phi+\cos.\theta d\psi$$

On a ainsi les trois équations suivantes, lesquelles réunies à trois autres qui seront données et démontrées ci-après, servent à résoudre tous les problêmes relatifs au mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.

$$(3)\ldots\ldots\begin{cases} p\,dt=\sin.\theta\sin.\phi\,d\psi+\cos.\phi\,d\theta \\ q\,dt=\sin.\theta\cos.\phi\,d\psi-\sin.\phi\,d\theta \\ r\,dt=d\phi+\cos.\theta\,d\psi \end{cases}$$

1152. Voici d'autres relations entre les quantités $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, etc., et les quantités p, q et r qu'il est bon de connaître.

Si on fait trois sommes des trois équations

$$q\,dt=\alpha_{,}d\gamma_{,}+\alpha_{,,}d\gamma_{,,}+\alpha_{,,,}d\gamma_{,,,}$$
$$-p\,dt=\beta_{,}d\gamma_{,}+\beta_{,,}d\gamma_{,,}+\beta_{,,,}d\gamma_{,,,}$$
$$0=\gamma_{,}d\gamma_{,}+\gamma_{,,}d\gamma_{,,}+\gamma_{,,,}d\gamma_{,,,}$$

après les avoir multipliées, respectivement par $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, pour faire la première somme, par $\alpha_{,,}$, $\beta_{,,}$, $\gamma_{,,}$, pour faire la deuxième, par $\alpha_{,,,}$, $\beta_{,,,}$, $\gamma_{,,,}$, pour faire la troisième, on trouvera, en ayant égard aux équations, (art. 1139),

$$(4)\ldots\ldots\begin{cases} d\gamma_{,}=(\alpha_{,}q-\beta_{,}p)dt \\ d\gamma_{,,}=(\alpha_{,,}q-\beta_{,,}p)dt \\ d\gamma_{,,,}=(\alpha_{,,,}q-\beta_{,,,}p)dt \end{cases}$$

on déduira, pareillement, des équations,

$$p\,dt=\gamma_{,}d\beta_{,}+\gamma_{,,}d\beta_{,,}+\gamma_{,,,}d\beta_{,,,}$$
$$-r\,dt=\alpha_{,}d\beta_{,}+\alpha_{,,}d\beta_{,,}+\alpha_{,,,}d\beta_{,,,}$$
$$0=\beta_{,}d\beta_{,}+\beta_{,,}d\beta_{,,}+\beta_{,,,}d\beta_{,,,}$$

les valeurs

$$(5)\ldots\ldots\begin{cases} d\beta_{,}=(\gamma_{,}p-\alpha_{,}r)\,dt \\ d\beta_{,,}=(\gamma_{,,}p-\alpha_{,,}r)\,dt \\ d\beta_{,,,}=(\gamma_{,,,}p-\alpha_{,,,}r)\,dt \end{cases}$$

et des équations

$$r\,dt=\beta_{,}d\alpha_{,}+\beta_{,,}d\alpha_{,,}+\beta_{,,,}d\alpha_{,,}$$
$$-q\,dt=\gamma_{,}d\alpha_{,}+\gamma_{,,}d\alpha_{,,}+\gamma_{,,,}d\alpha_{,,,}$$
$$0=\alpha_{,}d\alpha_{,}+\alpha_{,,}d\alpha_{,,}+\alpha_{,,,}d\alpha_{,,,}$$

les valeurs

$$(6)\ldots\ldots\begin{cases} d\alpha_{,}=(\beta_{,}r=\gamma_{,}q)\,dt \\ d\alpha_{,,}=(\beta_{,,}r-\gamma_{,,}q)\,dt \\ d\alpha_{,,,}=(\beta_{,,,}r-\gamma_{,,,}q)\,dt \end{cases}$$

enfin on a les trois équations

$$(7)\ldots\ldots \begin{cases} p\,d\alpha_{,} + q\,d\beta_{,} + r\,d\gamma_{,} = 0 \\ p\,d\alpha_{,,} + q\,d\beta_{,,} + r\,d\gamma_{,,} = 0 \\ p\,d\alpha_{,,,} + q\,d\beta_{,,,} + r\,d\gamma_{,,,} = 0 \end{cases}$$

qu'on rendra identiques en y substituant les valeurs de $d\alpha_{,}$, $d\beta_{,}$, etc., données par les équations (4), (5) et (6).

Déterminations ultérieures, relatives à la théorie générale du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe

1153. Je n'ai fait entrer en considération, depuis l'art. 1142, que les propriétés du mouvement qu'on peut appeler *géométriques*, et les phénomènes de ce mouvement, relatifs aux vîtesses et aux forces accélératrices, *effectives*, de ses différents points, en faisant abstraction des causes motrices qui les produisent. Je vais, maintenant, introduire ces causes motrices dans l'analyse, et compléter le système des équations par lesquelles on détermine toutes les circonstances du mouvement de rotation.

Chaque point matériel a sa position déterminée, à un instant quelconque, par rapport à trois plans coordonnés fixes dans l'espace, dont les lignes d'intersection sont les axes des x, y et z; l'origine de ces coordonnées, placée au point fixe de rotation, est aussi l'origine de trois autres coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, rectangulaires comme les premières, mais parallèles à des axes fixes, dans le corps, et mobiles avec lui; malgré la mobilité de ces axes on peut, quand il s'agit des phénomènes instantanés du mouvement, prendre, parallèlement à leurs directions, les composantes des forces appliquées au corps, ces directions devant être censées invariables pendant le temps élémentaire dt, et on a déja vu, art. 1146 et suivants, de pareilles décompositions des vîtesses et des forces accélératrices effectives des molécules du corps. Soient, donc, $mX_{,}$, $mY_{,}$ et $mZ_{,}$ les composantes, respectivement parallèles aux $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, de la résultante de toutes les forces appliquées à une molécule dont la masse $= m$, continuant à représenter, comme je l'ai fait, art. 1147, par $p_{,}$, $q_{,}$, et $r_{,}$ les forces accélératrices effectives de cette molécule, respectivement parallèles aux mêmes axes, les conditions de l'équilibre devront, art. 1038, exister en vertu du

principe général du mouvement, dans la masse entière du corps, entre les forces motrices $mX_{,}$, $mY_{,}$, $mZ_{,}$, $-mp_{,}$, $mq_{,}$, $mr_{,}$; ou entre les quantités de mouvement élémentaires $(X_{,}-p_{,})\,mdt$, $(Y_{,}-q_{,})\,mdt$, $(Z_{,}-r_{,})\,mdt$. Ces conditions s'expriment, art. 369, par trois équations qu'on forme en égalant, à zéro, les moments des forces considérés relativement à trois axes rectangulaires quelconques dont l'intersection commune est au point fixe; on a, donc, dans le cas dont il s'agit ici,

$$(M)\ldots\ldots\begin{cases}\int\{y_{,}(X_{,}-p_{,})mdt-x_{,}(Y_{,}-q_{,})mdt\}=0\\ \int\{x_{,}(Z_{,}-r_{,})mdt-z_{,}(X_{,}-p_{,})mdt\}=0\\ \int\{z_{,}(Y_{,}-q_{,})mdt-y_{,}(Z_{,}-r_{,})mdt\}=0\end{cases}$$

les intégrales relatives à m, et à $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ doivent s'étendre à la masse entière du corps.

1154. Je représente, pour abréger, les sommes des moments des forces motrices dues aux puissances extérieures, par $N_{,}$, $N_{,,}$, $N_{,,,}$, c'est-à-dire, que je pose les équations hypothétiques,

$$(1)\ldots\ldots\begin{cases}\int m(x_{,}Y_{,}-y_{,}X_{,})=N_{,}\\ \int m(z_{,}X_{,}-x_{,}Z_{,})=N_{,,}\\ \int m(y_{,}Z_{,}-z_{,}Y_{,})=N_{,,,}\end{cases}$$

les équations (1) prendront la forme

$$(2)\ldots\ldots\begin{cases}\int m(x_{,}q_{,}dt-y_{,}p_{,}dt)=N_{,}dt\\ \int m(z_{,}p_{,}dt-x_{,}r_{,}dt)=N_{,,}dt\\ \int m(y_{,}r_{,}dt-z_{,}q_{,}dt)=N_{,,,}dt\end{cases}$$

J'ai donné, art. 1147, équations (5) les valeurs des vitesses élémentaires $p_{,}dt$, $q_{,}dt$, $r_{,}dt$, et ces valeurs peuvent être substituées dans les équations précédentes ; les équations, résultant de ces substitutions, renferment des termes de la forme $\int mx_{,}^2$, $\int my_{,}^2$, $\int mz_{,}^2$, $\int mx_{,}y_{,}$, $\int mx_{,}z_{,}$, $\int my_{,}z_{,}$, et sont susceptibles de simplifications considérables par des choix convenables d'axes coordonnés ; en effet, si on prend, pour axes des $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$, les axes principaux du corps, qui ont leur intersection commune au point fixe de rotation, tous les termes de la forme $\int mx_{,}z_{,}$, $\int mx_{,}z_{,}$, $\int my_{,}z_{,}$, disparaissent, il ne reste que les termes de la forme $\int mx_{,}^2$, $\int my_{,}^2$, $\int mz_{,}^2$, et on a les valeurs suivantes,

$$(3)\ldots\begin{cases} \int m(x_,q_,dt-y_,p_,dt)=\begin{cases} dr\int m(x_,^2+y_,^2) \\ +pqdt\int m(x_,^2-y_,^2)\end{cases} \\ \int m(z_,p_,dt-x_,y_,dt)=\begin{cases} dq\int m(z_,^2+x_,^2) \\ +rpdt\int m(z_,^2-x_,^2)\end{cases} \\ \int m(y_,r_,dt-z_,q_,dt)=\begin{cases} dp\int m(y_,^2+z_,^2) \\ +qrdt\int m(y_,^2-z_,^2)\end{cases} \end{cases}$$

Les axes des $x_,$, $y_,$ et $z_,$, sont des axes principaux.

Désignant par A, B, C, respectivement, les moments d'inertie du corps par rapport aux axes des $x_,$, $y_,$, $z_,$, on a

$$(4)\ldots\begin{cases} \int m(y_,^2+z_,^2)=A;\ \int m(x_,^2+z_,^2)=B;\ \int m(x_,^2+y_,^2)=C \\ \int m(x_,^2-y_,^2)=B-A \\ \int m(z_,^2-x_,^2)=A-C \\ \int m(y_,^2-z_,^2)=C-B \end{cases}$$

Ces valeurs étant substituées dans les seconds membres des équations (3), et ces seconds membres étant, après les substitutions, mis à la place des premiers membres des équations (2), on a les suivantes,

$$(5)\ldots\ldots\begin{cases} Cdr+(B-A)pqdt=N_,dt \\ Bdq+(A-C)rpdt=N_{,,}dt \\ Adp+(C-B)qrdt=N_{,,,}dt \end{cases}$$

dans lesquelles pdt, qdt, et rdt, ont, art. 1151, les valeurs

$$(6)\ldots\ldots\begin{cases} pdt=\sin.\theta\sin.\phi d\psi+\cos.\phi d\theta \\ qdt=\sin.\theta\cos.\phi d\psi-\sin.\phi d\theta \\ rdt=d\phi+\cos.\theta d\psi \end{cases}$$

1155. Les moments $N_,$, $N_{,,}$, $N_{,,}$, des forces motrices imprimées sont pris par rapport aux axes mobiles des $z_,$, $y_,$, $x_,$, dont les positions instantanées sont liées à celles des axes fixes des x, y, et z, au moyen des angles ψ, ϕ et θ; ainsi $N_,$, $N_{,,}$ et $N_{,,,}$ sont fonctions de ces angles. Or la détermination de tous les phénomènes du mouvement se réduit à la connaissance des valeurs que ces angles ψ, ϕ et θ prennent à un instant quelconque; et on peut, des six équations (5) et (6), de l'article précédent, en déduire trois, qui seront différentielles du second ordre, entre ces mêmes angles et le temps t; ces équations renfermant, d'ailleurs, les moments d'inertie A, B, C qui dépendent de la consti-

tution du corps, et les quantités relatives aux puissances; donc, les lois des actions des puissances étant données, on pourra déduire, des équations citées, les valeurs des inconnues ψ, ϕ et θ, et, réciproquement, si on connaît, *a priori*, la loi du mouvement effectif, on en conclura les expressions des puissances capables de produire ce mouvement.

Je ne parle, ici, de l'élimination des quantités p, q, r, et de leurs différentielles, dans les équations (5) de l'article précédent, qu'afin de faire concevoir comment la solution générale du problême du mouvement de rotation peut être ramenée à trois équations du deuxième ordre; mais il est convenable et commode de conserver les six équations du premier ordre, et on va voir des exemples de leur emploi.

Application de la théorie exposée dans le chapitre précédent, au cas de la pesanteur terrestre.

1156. Le mobile étant supposé un corps pesant, je prends, pour axe des z, la verticale passant par le point fixe de rotation, et g étant la force accélératrice constante due à la pesanteur terrestre, chaque force motrice gm sera parallèle à z, et fera, par conséquent, avec les coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, de la molécule m, les mêmes angles que fait l'axe des z avec ces coordonnées; on aura, ainsi, les valeurs suivantes des composantes $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$, des forces accélératrices respectivement parallèles aux $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$,

$$(1) \ldots . X_{,}=g\alpha_{,,,};\ Y_{,}=g\beta_{,,,};\ Z_{,}=g\gamma_{,,,}$$

Soit M la masse entière du corps; $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, les coordonnées de son centre de gravité, respectivement parallèles aux axes des $x_{,}$, $y_{,}$, et $z_{,}$,

[redacted]

$$(4)\ldots\left\{\begin{array}{l} Cdr+(B-A)pq\,dt=gMdt.(a_{,}\delta_{,,,}-b_{,}\alpha_{,,,}) \\ Bdq+(A-C)\,rp\,dt=gMdt.(c_{,}\alpha_{,,,}-a_{,}\gamma_{,,,}) \\ Adp+(C-B)\,qrdt=gMdt.(b_{,}\gamma_{,,,}-c_{,}\delta_{,,,}) \end{array}\right.$$

Examen particulier du cas où le corps, mu en vertu d'une impulsion initiale, n'est, après cette impulsion reçue, soumis à aucune force extérieure. — Usage des propriétés de l'axe principal et du plan principal des moments, pour simplifier l'analyse du mouvement de rotation.

1157. Les seconds membres des équations (4), de l'article précédent, sont nuls dans deux cas, savoir; 1°. lorsque le corps est supposé sans pesanteur, ou qu'on a $g=0$; 2°. Lorsque le point fixe, de rotation, est son centre de gravité, ce qui dónne $a_{,}=0$, $b_{,}=0$, $c_{,}=0$; ce deuxième cas rentre d'ailleurs dans le précédent, parce que la résultante des poids de toutes les molécules du corps passant par le centre de gravité, si ce centre est immobile, le corps se trouve dans le même état où il serait s'il n'était pas pesant. On a, dans l'une et l'autre hypothèse, les équations suivantes qui sont intégrables;

$$(1)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} Cdr+(B-A)pq\,dt=0 \\ Bdq+(A-C)\,rp\,dt=0 \\ Adp+(C-B)\,qrdt=0 \end{array}\right.$$

multipliant la première par r, la deuxième par q, la troisième par p, et faisant leur somme, il vient

$$Crdr+Bqdq+Apdp=0$$

substituant aux facteurs r, q et p les facteurs Cr, Bq et Ap et faisant encore la somme des équations produits, on a

$$C^2rdr+B^2qdq+A^2pdp=0$$

équations qui ont, pour intégrales

$$(2)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} Cr^2+Bq^2+Ap^2=h^2 \\ C^2r^2+B^2q^2+A^2p^2=k^2 \end{array}\right.$$

h^2 et k^2 étant deux constantes arbitraires toujours positives; k est, art. 1150, la valeur du moment principal rapporté au point fixe de rotation.

On déduit des équations (2) les valeurs de p^2 et q^2, savoir;

$$(3)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} p^2 = \dfrac{k^2 - Bh^2 + (B-C).Cr^2}{A.(A-B)} \\ q^2 = \dfrac{k^2 - Ah^2 + (A-C).Cr^2}{B(B-A)} \end{array}\right.$$

substituant les valeurs de p et q dans la première des équations (1), et prenant la valeur de dt, on a

$$(4)\ldots\, dt = \frac{(AB)^{\frac{1}{2}}\, Cdr}{[k^2 - Bh^2 + (B-C).Cr^2]^{\frac{1}{2}}\,[Ah^2 - k^2 + (C-A)Cr^2]^{\frac{1}{2}}}$$

on n'a pas encore de méthodes pour obtenir l'intégrale de cette équation sous forme finie, excepté dans le cas particulier où deux des trois quantités A, B, C, seraient égales entre elles, et dans celui où les constantes arbitraires auraient entre elles les relations $k^2 = Ah^2$ ou $k^2 = Bh^2$. Mais on peut, dans tous les cas, calculer la valeur de t, par la méthode des quadratures, lorsque celle de r est donnée, et réciproquement; et comme p et q sont exprimés en r, par les équations (2), on a les moyens de connaître les valeurs de p, q et r, correspondantes à une valeur quelconque de t.

1158. **Nous allons, maintenant, déduire des équations (1), de l'article précédent, d'autres intégrales qui conduiront à des résultats remarquables.**

Je multiplie les 1re, 2e, 3e, de ces équations (1), par les facteurs respectifs $\gamma_,$, $\beta_,$, et $\alpha_,$ et j'ai, pour la somme des équations produits,

$$(1)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} \{\gamma_, dr + (q\alpha_, - p\beta_,)r dt\}\, C \\ + \{\beta_, dq + (p\gamma_, - r\alpha_,)q dt\}\, B \\ + \{\alpha_, dp + (r\beta_, - q\gamma_,)p dt\}\, A \end{array}\right\} = 0$$

or on tire, des équations (4), (5) et (6), de l'art. 1152,

$$(3)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} d\gamma_, = (\alpha_, q - \beta_, p)\, dt \\ d\beta_, = (\gamma_, p - \alpha_, r)\, dt \\ d\alpha_, = (\beta_, r - \gamma_, q)\, dt \end{array}\right.$$

valeurs qui, substituées dans (1), donnent

$$C.d(\gamma_, r) + B.d(\beta_, q) + A.d(\alpha_, p) = 0$$

en prenant, successivement, pour facteurs des équations (1) de l'article précédent $\gamma_{,,}$, $\beta_{,,}$, $\alpha_{,,}$, et $\gamma_{,,,}$, $\beta_{,,,}$, $\alpha_{,,,}$ et combinant les sommes des

équations produits avec des équations tirées de (4), (5) et (6), art. 1152, on obtiendrait deux autres équations différentielles absolument semblables à la précédente, aux accents près de α, β et γ, ensorte qu'on aura ultérieurement, les trois suivantes,

$$(3)\ldots\ldots \begin{cases} Cd(\gamma_{,}r)+Bd.(\beta_{,}q)+Ad.(\alpha_{,}p)=0 \\ Cd(\gamma_{,,}r)+Bd\,(\beta_{,,}q)+Ad.(\alpha_{,,}p)=0 \\ Cd(\gamma_{,,,}r)+Bd\,(\beta_{,,,}q)+Ad\,(\alpha_{,,,}p)=0 \end{cases}$$

lesquelles ont, pour intégrales

$$(4)\ldots\ldots \begin{cases} C\gamma_{,}r+B\beta_{,}q+A\alpha_{,}p=l_{,} \\ C\gamma_{,,}r+B\beta_{,,}q+A\alpha_{,,}p=l_{,,} \\ C\gamma_{,,,}r+B\beta_{,,,}q+A\alpha_{,,,}p=l_{,,,} \end{cases}$$ $l_{,}$, $l_{,,}$, $l_{,,,}$, sont les constantes arbitraires.

1159. Si on forme les quarrés de ces trois intégrales, on aura, toutes réductions faites, et en ayant égard aux équations de l'art. 1139, qui font disparaître les α, β et γ,

$$(1)\ldots\ldots C^2r^2+b^2q^2+A^2p^2=l_{,}^2+l_{,,}^2+l_{,,,}^2$$

on retrouvera, ainsi, la seconde des intégrales (2), de l'art. 1157, et on aura l'équation de condition

$$(2)\ldots\ldots l_{,}^2+l_{,,}^2+l_{,,,}^2=k^2$$

ainsi les trois intégrales (4) de l'article précédent, ne représentent que deux équations distinctes; je vais, avant de procéder à la recherche de la troisième, tirer quelques conséquences de ces intégrales (4), qui seront fort utiles pour simplifier l'analyse.

1160. En comparant avec les équations (4), art. 1158, et (1), art. 1159, les formules (4) de l'art. 1150, qui sont les valeurs des cosinus des angles formés par l'axe du moment principal appartenant au point fixe de rotation, et par les axes des x, y, z, on voit que les numérateurs de ces expressions sont les premiers membres des équations (4), article 1158, et que le carré du dénominateur commun est le premier membre de l'équation (1), art. 1159; on a donc, en substituant à $l_{,}^2+l_{,,}^2+l_{,,,}^2$ sa valeur k^2,

Cosinus de l'angle formé par l'axe du moment principal, qui se rapporte au point fixe de rotation, et par l'axe des
$$\begin{cases} x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \dfrac{l_{,}}{k} \\ y\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \dfrac{l_{,,}}{k} \\ z\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \dfrac{l_{,,,}}{k} \end{cases}$$

Les valeurs de ces cosinus se composant de quantités constantes, la position de l'axe du moment principal est, par conséquent, invariable, dans l'espace, puisque les expressions $-\frac{l_{,}}{k}$, $-\frac{l_{,,}}{k}$, $-\frac{l_{,,,}}{k}$ la déterminent par rapport aux axes fixes des x, y, z; quant à sa position, instantanée, par rapport aux axes mobiles des $x_{,}, y_{,}, z_{,}$, elle sera donnée par les formules (3) de l'art. 1150, les quantités p, q et r étant censées connues, à un instant quelconque, par les équations (2) et (4) de l'art. 1157.

Voilà, donc, une propriété, très-importante, liée à la théorie générale que j'ai exposée depuis l'art. 157 jusqu'à l'art. 199, et appartenant au mouvement de rotation, autour d'un point fixe, d'un corps solide, qui a ce mouvement en vertu d'une impulsion primitive, et, qui, après cette impulsion donnée, n'est sollicité par aucune force extérieure; il existe un axe, passant par le point fixe, qui est l'axe principal des moments, et, par conséquent, un plan, perpendiculaire à cet axe, et passant par le même point fixe, désigné par le nom de *plan principal des moments*, dont les positions sont invariables, pendant toute la durée du mouvement, et peuvent se déterminer, à chaque instant, par rapport aux plans mobiles qui renferment les axes principaux du corps.

La propriété dont je viens de parler est intimement liée à la théorie des *aires*, et les propositions démontrées, depuis l'art. 200 jusqu'à l'article 214, établissent et expliquent complétement cette liaison.

1161. Le premier parti à tirer de l'invariabilité de position du plan principal des moments est d'en faire un des plans coordonnés fixes; soit ce plan celui des xy; l'axe principal des moments qui deviendra, alors, l'axe des z, faisant, avec les axes des $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$ des angles dont les cosinus respectifs sont, article 1150, ...,
$-\frac{Ap}{k}$, $-\frac{Bq}{k}$, $-\frac{Cr}{k}$, et ces mêmes cosinus étant, art. 1139, représentés par $\alpha_{,,,}$, $6_{,,,}$, $\gamma_{,,,}$, on a

$$(1)\ldots\ldots \alpha_{,,,}=-\frac{Ap}{k};\ 6_{,,,}=-\frac{Bq}{k};\ \gamma_{,,,}=-\frac{Cr}{k}$$

ou, en substituant à $\alpha_{,,,}$, $6_{,,,}$, $\gamma_{,,,}$ leurs valeurs tirées des équations (1) de l'art. 1151,

$$(2)\ldots\ldots \begin{cases} \sin.\theta \sin.\phi = -\dfrac{Ap}{k} \\ \sin.\theta \cos.\phi = -\dfrac{Bq}{k} \\ \cos.\theta = -\dfrac{Cr}{k} \end{cases}$$

équations qui serviront à déterminer les angles ϕ et θ en fonction du temps.

Éliminons $d\theta$ entre les deux premières équations (6) de l'art. 1154, nous aurons, après avoir multiplié l'équation finale, par sin. θ.

$$\sin.^2\theta d\psi = \sin.\theta \sin.\phi p\, dt + \sin.\theta \cos.\phi q\, dt$$

d'où on tire, en substituant les valeurs de sin. θ sin. ϕ et sin. θ cos. ϕ, et celle de $\sin.^2\theta = 1 - \cos.^2\theta = 1 - \dfrac{C^2 r^2}{k^2}$.

$$(3)\ldots\ldots d\psi = -\frac{Ap^2 + Bq^2}{k^2 - C^2 r^2} k\, dt$$

ajoutant, au numératenr, $Cr^2 - Cr^2$, et faisant attention qu'on a, article 1157, équation (2), $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h^2$, l'équation précédente devient

$$(4)\ldots\ldots d\psi = -\frac{h^2 - Cr^2}{k^2 - C^2 r^2} k\, dt$$

substituant, pour dt, sa valeur, art. 1157, équation (4), la valeur de $d\psi$ ne contiendra plus que r, dr et des quantités constantes; ainsi, en procédant, par la méthode des quadratures, on pourra avoir ψ en fonction de r, et comme r est censée connue en fonction du temps, le troisième angle ψ se trouvera déterminé. Cette valeur de ψ en r renfermera une constante arbitraire et sera la troisième intégrale des équations (6), art. 1154.

1162. Toute l'analyse précédente, depuis l'art. 1157, a pour objet l'intégration de équations (5) et (6) de l'art. 1154, appliquées au cas où le mobile ne se meut qu'en vertu d'une impulsion initiale; nous avions, pour arriver à ce but, à déduire, en fonction du temps, les valeurs des

six variables p, q, r, ψ. θ, ϕ, de six équations différentielles du premier ordre, ou, seulement, les valeurs de ψ, θ, ϕ; de trois équations différentielles du second ordre; nous aurions dû, par conséquent, dans l'un et l'autre cas, avoir six constantes arbitraires, et nous n'en avons que quatre, savoir, k, h et les deux constantes qui proviendraient de l'intégration de l'équation (4) art. 1157 et de celle de l'équation (4) de l'article précédent; cette simplification est due au choix que nous avons fait du plan principal des moments pour plan xy; en effet l'axe des z étant, dans cette hypothèse, l'axe principal des moments, les angles formés par cet axe principal et par les axes des x et des y sont devenus des angles droits, ayant leurs cosinus, exprimés par les deux premières formules (4) de l'art. 1150, égaux à zéro; de là l'égalité à zéro des premiers membres des deux premières équations (4) art. 1158, et, par suite, $l_{,}=0$, $l_{,,}=0$, $l_{,,,}=k^2$; il ne reste, de toutes les constantes introduites par les intégrations, que les quatre sus-énoncées, et il s'agit de les déterminer d'après les circonstances initiales du mouvement.

Concevons que le mouvement du corps, dont la masse est représentée par M, soit l'effet d'une impulsion initiale, qui lui est donnée à un de ses points, et qui, si elle était dirigée par son centre de gravité, dans l'hypothèse où ce corps serait libre, lui imprimerait une vîtesse V; le produit MV sera, art. 751 et 1125, la mesure de la cause motrice. Abaissons, du point fixe de rotation, sur la ligne de direction de l'impulsion MV, une perpendiculaire dont la longueur sera représentée par ρ, et faisons une section du corps par le plan qui renferme ce point fixe, cette ligne de direction et cette perpendiculaire, le moment de [redacted]

à une ligne contenue dans le plan qui renferme la direction de l'impulsion et le point fixe, car l'impulsion elle-même, ne fournissant aucun moment pareil, celui qu'on supposerait dû aux quantités de mouvement qui ont lieu, serait incompatible avec les conditions de l'équilibre, ne se trouvant annullé par aucun moment égal et de signe contraire; 2°. que la somme de leurs moments par rapport à la perpendiculaire, au plan dont on vient de parler, passant par le point fixe est égale à $MV\rho$. Or, si ces deux conditions ont lieu, au moment où l'impulsion est donnée, elles continuent d'avoir lieu, pendant toute la durée du mouvement, en vertu du principe de la conservation des moments (art. 1117) le plan passant par le point fixe de rotation et par la direction de l'impulsion initiale est donc, art. 175, le plan principal des moments, leur axe principal étant la perpendiculaire à ce plan menée par le point fixe.

Nous avons trouvé, article 1150, le moment principal......... $=\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}$ et par la deuxième équation intégrale (2), de l'art. 1157, ce moment a été trouvé égal à une constante k, laquelle se trouve déterminée par ce qui précède, et a pour valeur, $k=MV\rho$, les quantités M, V et ρ étant des données du problême.

Je passe à la constante h de la première équation intégrale (2) de l'art. 1157; l'axe principal des moments étant pris pour axe des z et les axes principaux, qui se croisent au point fixe de rotation, étant les axes des $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$ le tout, conformément à ce qui a été dit, art. 1161 et 1150, on a, art. 1161, les équations applicables à un instant quelconque du mouvement.

$$Ap=-k\alpha_{,,,};\ Bq=-k\delta_{,,,};\ Cr=-k\gamma_{,,,}$$

A, B et C sont des moments d'inertie donnés par la constitution du corps; on a $k=MV\rho$, et les angles qui ont, pour cosinus, $\alpha_{,,,}$, $\delta_{,,,}$, $\gamma_{,,,}$ et qui sont formés par l'axe principal des moments et par les axes principaux du corps, ont des valeurs initiales données, puisqu'on connaît la position des axes principaux par rapport à la direction de l'impulsion initiale, ou par rapport à l'axe principal des moments. Les valeurs initiales de p, q et r se trouvent donc, dans les équations précédentes, entièrement déterminées, et ces valeurs initiales, étant substituées dans la première équation intégrale (2) de l'art. 1157, on aura la constante h.

1163. Il reste à parler de la détermination des constantes, qui

compléteront les intégrales de l'équation (4), art. 1157, et de l'équation (4), art. 1161. La première équation doit donner t en fonction de r, et la variable r a des valeurs déterminées, correspondantes à certaines époques du mouvement ; supposons, par exemple, qu'à une de ces époques les plans x, y, et xy, aient formé entre eux, un angle donné θ', la troisième équation (2) de l'art. 1161, donnera pour la valeur de r, correspondante à la même époque, $-\frac{k}{C}\cos.\theta'$; or l'instant auquel on compte *zéro temps*, étant absolument arbitraire, on pourra faire coincider avec la valeur $r=-\frac{k}{C}\cos.\theta'$, telle valeur qu'on voudra de t, et ces deux valeurs étant substituées, dans l'intégrale de l'équation (4), art. 1157, la constante arbitraire, qui entre dans cette intégrale, se trouvera déterminée.

Quant à la constante de l'intégrale de l'équation (4), art. 1161, qui donne ψ en fonction de r, elle dépend de la position de la ligne sur laquelle se trouve l'origine de l'angle ψ, qui, art. 1140, se mesure sur le plan des xy. Cette position donne la valeur de ψ correspondante à $\theta=0$, ou à $r=-\frac{k}{C}$ (3e équation (2) de l'art. 1161). Il suffit, en général, si on emploie l'équation $r=-\frac{k}{C}\cos.\theta$, de savoir quelle est la valeur de ψ correspondante à une valeur quelconque donnée de θ ; on en conclut une valeur connue de r, et ces valeurs de ψ et r, étant substituées dans l'équation intégrale dont il s'agit, la constante

axes principaux, que nous prendrons pour axe des $z_{,}$; son moment d'inertie a été désigné par C et on a, d'ailleurs, par la propriété des solides de révolution, $A=B$ et la 4e équation de l'art. 1157, prend la forme,

$$AC.\frac{dr}{dt}=\{k^2-Ak^2+(A-C)\,Cr^2\}\sqrt{-1}$$

il faut, pour que $\frac{dr}{dt}$ ne soit pas imaginaire, qu'on ait

$$k^2-Ah^2+(A-C)\,Cr^2=0$$

mais cette condition met les valeurs de q et p, équations (3) de l'article cité, sous la forme $\frac{o}{o}$; et cette première marche d'analyse ne conduit à aucun résultat.

1165. Il faut donc remonter aux équations différentielles (1) du même article, lesquelles, dans l'hypothèse de $A=B$, prennent la forme,

$$(1)\ldots\ldots\begin{cases} Cdr=0\\ Adq+(A-C)\,rp\,dt=0\\ Adp+(C-A)\,rq\,dt=0\end{cases}$$

on tire, de la première, $r=n$, n étant une constante arbitraire, et cette valeur substituée dans les deux autres les change en

$$(2)\ldots\ldots\begin{cases} Adq+(A-C)\,np\,dt=0\\ Adp+(C-A)\,nq\,dt=0\end{cases}$$

On satisfait, à ces équations, en faisant

$$(3)\ldots\ldots\begin{cases} p=a\sin.(n't+c)\\ q=b\cos.(n't+c)\end{cases}$$

a, b, c, n' étant des constantes indéterminées, car, en y substituant ces valeurs, on a

$$[-Abn'+(A-C)\,an]\sin.(n't+c)dt=0$$
$$[+Aan'+(C-A)\,bn]\cos.(n't+c)dt=0$$

équations que l'on rend identiques en supposant

$$-Abn'+(A-C)an=0$$
$$Aan'+(C-A)bn=0$$

ce qui donne

$$(4)\ldots\ldots n'=\frac{(A-C)n}{A};\ b=a$$

et les équations (3), en y substituant ces valeurs de n' et b, deviendront les intégrales des équations (2) du premier ordre, a et c étant les constantes arbitraires.

1166. On a, ainsi, pour déterminer p, q et r les équations

$$(1)\dots\dots\quad \left\{\begin{array}{l} r = n \\ p = a\sin.(n't+c) \\ q = a\cos.(n't+c) \end{array}\right\}$$

Faites, dans les équations ci-à coté, $n' = \frac{A-C}{A}n$

Les équations (2), de l'art. 1161 deviennent, en y substituant ces valeurs de p, q et r et la valeur $MV\rho$ du moment principal k (article 1157, équations (2)),

$$(2)\dots\dots\quad \left\{\begin{array}{l} \sin.\theta\sin.\phi = -\dfrac{Aa\sin.(n't+c)}{MV\rho} \\ \sin.\theta\cos.\phi = -\dfrac{Aa\cos.(n't+c)}{MV\rho} \\ \cos.\theta = -\dfrac{Cn}{MV\rho} \end{array}\right.$$

On voit, par la troisième équation, qu'on a un angle constant, savoir l'angle θ, formé par les plans $x_{\prime}y_{\prime}$ et xy, c'est-à-dire, par la section du corps perpendiculaire à l'axe de figure du solide, sur lequel se trouve le point fixe, et par le plan principal des moments, celui qui renferme le point fixe et la ligne de direction de l'impulsion. Or, la valeur initiale de cet angle étant une des données du problême, la constante arbitraire n se trouve déterminée, et on a

(3) [redacted]

la position de l'axe des $x_{,}$, dans le plan $x_{,}y_{,}$ est absolument arbitraire, la valeur de ϕ, correspondante au premier moment est donnée ; supposons que ce soit le moment où l'on a compté *zéro temps*, la constante ne sera autre chose que la valeur initiale de ϕ.

Ajoutons maintenant les quarrés des deux premières équations (2), nous aurons $\sin.^2\theta = \frac{A^2a^2}{M^2V^2\rho^2}$, d'où

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a = \frac{MV\rho}{A}\sin.\theta$$

1167. Il reste à connaître l'angle ψ; faisons, dans l'équation (3) de l'article 1161, $r=n$, $A=B$ et $k=MV\rho$, nous aurons

$$(1) \ldots\ldots d\psi = -\frac{A(p^2+q^2)}{M^2V^2\rho^2 - C^2n^2} \cdot MV\rho dt$$

Substituant, dans cette équation, les valeurs de p, q, n et ensuite celle de a, données par les équations (1), (3) et (5) de l'article précédent, on a

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots d\psi = -\frac{MV\rho}{A} \cdot dt$$

équation qui a, pour intégrale,

$$\psi = \varepsilon - \frac{MV\rho}{A} \cdot t$$

ε étant la constante arbitraire.

L'angle ψ est celui que forme la ligne d'intersection des plans $x_{,}y_{,}$, et xy, avec l'axe des x, ligne dont la position initiale est donnée; si, comme on en est le maître, on prend cette position initiale pour celle de l'axe des x, on aura, au premier instant du mouvement, $t=0$, $\psi=0$ et par conséquent $\varepsilon=0$, d'où

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \psi = -\frac{MV\rho}{A}t.$$

Les angles ϕ, θ et ψ se trouvent complétement déterminés.

1168. La valeur de ψ nous apprend que la ligne suivant laquelle le plan $x_{,}y_{,}$ (le plan perpendiculaire à l'axe de figure et passant par le point fixe) coupe le plan xy, (le plan principal des moments) a une vitesse angulaire constante autour de l'axe des z (l'axe principal des

moments); nous voyons, d'une autre part, par la troisième équation (2) de l'article 1166, que l'angle θ, formé par les plans $x_, y_,$ et xy est constant; donc l'angle formé par l'axe des $z_,$ (l'axe de figure du corps) et par le plan xy est aussi constant, donc cet axe des $z_,$ décrit la surface d'un cône droit qui a, pour axe, l'axe des z; et pendant que cet axe des $z_,$ engendre une pareille surface, tous les points du plan $x_,y_,$ tournent autour de lui (équation (4) de l'article 1166) avec une vîtesse angulaire $n' = \frac{A-C}{A} n$. ....

1169. La position de l'axe instantané de rotation a été donnée, généralement, art. 1144, équations (5) et (6), et on a vu, art. 1145, que la valeur de la vîtesse angulaire du corps, autour de cet axe, était $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$; valeur qui, d'après les équations (1) de l'art. 1166, devient $\sqrt{a^2+n^2}$, ou, article cité, équations (3) et (5), ... $\frac{C\sin.\theta}{a\sqrt{C^2\sin.^2\theta+A^2\cos.^2\theta}}$ et qui, substituée ainsi que les valeurs de $p, q, r,$ équations (1) de l'article cité, dans les équations (6) de l'art. 1144, donne les valeurs suivantes des cosinus des angles respectifs, formés par l'axe instantané de rotation et par les axes des $x_,, y_,$ et $z_,$;

Cosinus des angles formés par l'axe instantané de rotation et par les axes des	$x_,$	$\frac{C\sin.\theta.\sin.(n't+c)}{\sqrt{C^2\sin.^2\theta+A^2\cos.^2\theta}}$
	$y_,$	$\frac{C\sin.\theta\cos.(n't+c)}{\sqrt{C^2\sin.^2\theta+A^2\cos.^2\theta}}$
	$z_,$	$\frac{-A\cos.\theta}{\sqrt{C^2\sin.^2\theta+A^2\cos.^2\theta}}$

1170. Si l'impulsion initiale avait une direction telle que le plan principal des moments (le plan xy) coincidât avec le plan perpendiculaire à l'axe de figure qui passe par le point fixe (le plan $x_{,}y_{,}$), l'angle θ deviendrait nul, les deux premiers cosinus des expressions de l'article précédent seraient égaux, à zéro, et le troisième cosinus à -1. Ainsi l'axe instantané de rotation, dont la position serait invariable, se confondrait avec l'axe de figure du corps, pendant toute la durée du mouvement. Ce cas, qui a toujours lieu pour une sphère, a, particulièrement lieu, pour un solide quelconque de révolution, lorsque la direction de l'impulsion se trouve dans le plan perpendiculaire à l'axe de figure qui passe par le point fixe.

1171. On pourrait supposer que l'impulsion initiale est dirigée dans un des plans qui renferment l'axe de figure du solide; dans ce cas l'angle constant θ est un angle droit,

$$\cos.\theta=0,\ \sin.\theta=1,\ n=\frac{MV\varrho}{C}\cos.\theta=0;\ n'=\frac{A-C}{A}\,n=0;$$

les valeurs, respectives, des trois cosinus de l'article 1169, sont sin. c, cos. c et o; l'axe des z, ou l'axe de figure du corps est, pendant toute la durée du mouvement, placé sur le plan fixe des xy (le plan principal des moments) l'axe instantané de rotation a une position invariable, se confond avec l'axe des z, et forme, dans le plan $x_{,}y_{,}$, sur lequel il est constamment placé, un angle c avec l'axe des $y_{,}$.

1172. Le cas, traité à l'art. 1170, donne $\theta=0$, d'où, art. 1166,

$$n=-\frac{MV\varrho}{C}\cos.\theta=-\frac{MV\varrho}{C}\ \text{et}\ a=\frac{MV\varrho}{A}\sin.\theta=0.$$ Le cas de l'article précédent donne $\theta=$ *angle droit*, d'où $n=0$, $a=\frac{MV\varrho}{A}$; ainsi la vîtesse angulaire $\sqrt{a^2+n^2}$, art. 1169, devient, dans le premier cas, $-\frac{MV\varrho}{C}$, la même qui aurait lieu, art. 1059, autour de l'axe de z', ou de l'axe de figure du corps, si cet axe était fixe; on se rappellera que C est le moment d'inertie par rapport à cet axe, qui, dans le cas dont il s'agit, est constamment en coincidence avec l'axe fixe des z. Dans le second cas, la vîtesse angulaire $=\frac{MV\varrho}{A}$, et en faisant attention que A

$$(4)\ldots\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} n'=n\sqrt{\dfrac{(C-A)(C-B)}{AB}}, \\ b=a\sqrt{\dfrac{A(A-C)}{B(B-C)}} \end{array}\right.$$

a et c sont les constantes arbitraires; et on déduit, des équations (3) combinées avec les équations (2) de l'art. 1161,

$$(5)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} \sin.\theta\sin.\phi=-\dfrac{Ap}{k}=-\dfrac{Aa}{k}\sin.(n't+c) \\ \sin.\theta\cos.\phi=-\dfrac{Bq}{k}=-\dfrac{Bb}{k}\cos.(n't+c) \\ \cos.\theta=-\dfrac{Cr}{k}=-\dfrac{Cn}{k} \end{array}\right.$$

aussi toutes les inconnues du problême sont déterminées.

1174. Je remarque, maintenant, que si, à un instant quelconque, l'angle γ, formé par l'axe instantané de rotation et par l'axe principal du corps, auquel les z, sont parallèles, est absolument nul, au lieu d'être très-petit, cette coincidence des deux axes n'est point un phénomène particulier à l'instant dont il s'agit, mais doit se continuer indéfiniment, pendant la durée du mouvement. En effet, l'hypothèse de $\gamma=0$, à un instant déterminé, donne, par l'équation (1) de l'article précédent, à ce même instant, $p=0$ et $q=0$, (les quantités p^2 et q^2 étant nécessairement positives chacune en particulier) mais on tire des deux premières équations (2) de l'art. 1161, et des équations (5) ci-dessus,

$$(a)\ldots . k^2\sin.^2\theta=A^2p^2+B^2q^2=A^2a^2+B^2b^2$$

donc si $p=0$ et $q=0$, on a, nécessairement, $a=0$, et $b=0$ et, par les équations (3) ci-dessus, ces dernières valeurs supposent que les premières ont lieu pendant toute la durée du mouvement.

Ainsi, lorsque le mouvement de rotation du mobile se trouvera établi autour d'un des axes principaux, qui se croisent au poit fixe, ce mouvement se perpétuera autour du même axe, autant de temps qu'il pourra être regardé comme l'effet de l'impulsion à laquelle est due la coincidence initiale de l'axe de rotation et de l'axe principal.

1175. Le phénomène, dont on vient de parler, a lieu lorsque l'impulsion initiale est donnée dans une direction qui passe par le plan de deux des

de très-petites quantités, mais il peut se faire qu'elles ne restent pas toujours dans cet état de petitesse, comme elles restent dans l'état de zéros absolus, lorsqu'une fois elles y sont réduites, ce qui donne lieu à un examen important.

Les conditions relatives aux limites des variations de l'angle γ, tiennent à la nature de la quantité n' qui, art. 1173, équation (4), a, pour valeur, $n' = n\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}$ et peut, par conséquent, être réelle ou imaginaire. Si elle est réelle les fonctions révolutives sin. $(n't+c)$ et cos. $(n't+c)$ ne pourront pas excéder certaines limites, quel que soit la valeur du temps t, et si elles sont petites, dans leur état initial, elles continueront à l'être pendant la durée du mouvement; et il en sera de même des quantités p et q, qui leur sont proportionnelles.

Mais, si n' est une quantité imaginaire, ce qui arrivera lorsque $C-A$ et $C-B$ ne seront pas de même signe, on ne pourra mettre les valeurs des sinus et des cosinus, de l'arc imaginaire $n't$, sous des formes réelles, que, par des expressions exponentielles, dans lesquelles les exposants variables seront proportionnels au temps t; ces exponentielles et les valeurs de p et q, qui les renferment, pourront donc, quelque petites qu'elles soient, au commencement du mouvement, devenir, pendant la durée de ce mouvement, indéfiniment grandes.

1178. On tire, de ce qui précède, des conséquences curieuses relatives aux conditions qui établissent la *stabilité* ou la non *stabilité* du mouvement de rotation autour d'un axe principal. La *stabilité* a lieu lorsque cet axe principal est parmi les trois axes principaux, passants par le point fixe, celui qui correspond au plus grand ou au plus petit moment d'inertie; la *non stabilité* a lieu pour l'axe correspondant au moment d'inertie moyen entre les deux autres. En effet, supposons qu'un des axes principaux soit, d'abord, l'axe de rotation, et doive, par conséquent, art. 1174, se maintenir tel, pendant un temps indéfini; concevons ensuite qu'une force vienne occasionner un léger dérangement dans l'état du corps, de manière à faire varier, d'une quantité extrêmement petite, la position de l'axe de rotation. L'angle formé, par ce nouvel axe et par l'axe principal dont il s'est séparé, que je suppose être l'axe des $z_{,}$, sera très-petit au moment de la séparation et se maintiendra, dans son état de petitesse, si on a

$$C > A \text{ et } C > B, \text{ ou } C < A \text{ et } C < B$$

parce qu'alors n' sera réelle; mais cet angle sera susceptible d'augmentations indéfinies, si on a

$$C>A \text{ et } C<B, \text{ où } C<A \text{ et } C>B,$$

parce qu'alors, n' prendra une valeur imaginaire.

1179. On a employé, dans les articles précédents, des valeurs de p et q qui ne sont censées données que par approximation, et il est bon de prouver que cette circonstance ne doit laisser aucun doute sur la stabilité du mouvement de rotation autour des axes du plus grand et du plus petit moment d'inertie. Reprenons les équations (2) de l'article 1157,

$$Cr^2 + Bq^2 + Ap^2 + = h^2$$
$$C^2r^2 + B^2q^2 + A^2p^2 = k^2$$

et après avoir multiplié la première par C, retranchons le produit de la deuxième, nous aurons

$$A(A-C)p^2 + B(B-C)q^2 = k^2 - Ch^2$$

Si, à un instant quelconque, les quantités p^2 et q^2 sont très-petites, et que, par conséquent, à ce même instant, art. 1144, équations (6), l'axe instantané de rotation soit très-rapproché de l'axe des $z_{,}$, la valeur de la constante $k-Ch^2$ devra être, aussi, très-petite, ce qui suppose que, dans tous les changements dont p et q sont susceptibles, la quantité $A(A-C)p^2 + B(B-C)q^2$ est assujettie à la même condition; mais cette condition exigera nécessairement que p et q soient constamment très-petits, si $A-C$ et $B-C$ sont des quantités de même signe, puisqu'alors le premier membre de l'équation précédente sera entièrement positif, ou entierement négatif; donc, dans ce cas, qui rend l'axe des $z_{,}$, axe du plus petit ou du plus grand moment d'inertie, cet axe, et l'axe instantané de rotation seront toujours très-rapprochés l'un de l'autre, les quantités p et q ne pouvant excéder les valeurs respectives $\dfrac{k^2-Ch^2}{A(A-C)}$ et $\dfrac{k^2-Ch^2}{B(B-C)}$.

Cet état de choses ne sera plus le même si $A-C$ et $B-C$ ont des signes différents, c'est-à-dire, si le moment d'inertie C, qui se rapporte à l'axe $z_{,}$, a une valeur moyenne entre celles de A et B; dans ce cas, la petite quantité $k^2 - Ch^2$ sera égale à la différence entre $A(A-C)p^2$

et $B(B-C)q^2$; p et q pourront être des quantités d'une grandeur quelconque, conformément à ce qui a été dit, art. 1177, vu que l'excès d'une quantité sur une autre est indépendant des valeurs absolues de ces quantités.

1180. La théorie, exposée depuis l'art. 1114, contient ce qu'il est essentiel d'apprendre pour se préparer à l'étude des parties de l'astronomie physique qui traitent du mouvement des corps célestes, en ayant égard à leurs figures et à leurs grandeurs; on peut aussi tirer un parti fort utile de cette théorie, pour des recherches qui intéressent la physique en général et les arts, parmi lesquelles je me bornerai à citer celles qui concernent les mouvements des corps flottants.

Le célèbre Léonard Euler est le premier qui ait donné une solution complète du problème du mouvement d'un corps solide, dont Dalembert s'est beaucoup occupé. L'analyse de ce problème a été perfectionnée par les illustres auteurs de la *Mécanique analytique* et de la *Mécanique céleste*, et l'on doit, au dernier, les simplifications remarquables résultantes de l'introduction du *plan invariable;* cette même analyse a été présentée, avec beaucoup d'ordre et de clarté, dans l'excellent traité de mécanique de M. Poisson, dont j'ai suivi la marche d'exposition et de calcul, depuis l'art. 1142.

Les élèves qui ne seront pas à portée de se procurer les ouvrages d'Euler, et qui voudront s'exercer tant sur le problème général que sur les diverses questions de détail qui y sont relatives, pourront lire les deux mémoires que j'ai publiés en 1799 (an 7) et 1802 (an 10), dans les sixième et onzième cahiers, (tomes II et IV) du Journal de l'École Polytechnique. En réunissant, au premier mémoire, le §. XI du deuxième, on a une solution complète du problème, dans laquelle le plan invariable, ou plan principal des moments, se trouve, implicitement, employé (tome IV, page 134 et suivantes). Les dix premiers paragraphes du deuxième mémoire sont ceux qui renferment les questions de détail, et c'est par ces paragraphes qu'il est convenable de commencer; on continuera par les huit paragraphes du premier mémoire, et on terminera la lecture par le onzième paragraphe du second.

les planètes, exercée sur une sphère, ou homogène, ou composée de couches excentriques, dont les densités, variables de l'une à l'autre, sont constantes dans chaque couche, ne troublera point le mouvement de rotation, parce que la résultante de toutes les attractions exercées sur les divers points de la sphère, passera toujours par son centre de figure et de gravité, quoique les points les plus près du soleil soient sensiblement plus attirés que les autres. Il en serait de même d'un solide dont tous les moments d'inertie, rapportés à des axes passant par le centre de gravité, seraient égaux, (solide qui peut avoir une figure très-différente de celle de la sphère) d'un solide de révolution homogène, ayant reçu une impulsion initiale dirigée dans un plan perpendiculaire à l'axe de figure, qui renfermerait son centre de gravité et le centre d'action, et qui serait supposé partager ce solide en deux parties égales et semblables, etc. Le mouvement de rotation des trois espèces de solides dont je viens de parler, étant dû à une impulsion initiale, sera constamment uniforme, l'axe de rotation conservera son parallélisme.

1184. Ce parallélisme sera maintenu dans les deux premiers solides, quoique l'axe de rotation ne soit pas perpendiculaire à la ligne menée du centre de gravité au centre d'action; il n'en sera pas de même du troisième s'il n'est pas sphérique; son axe étant supposé oblique sur la ligne des centres, la résultante des actions qu'il éprouvera, ne passera par son centre de gravité, que dans des circonstances particulières, et le parallélisme de l'axe de rotation sera dérangé. C'est le cas de la terre dont l'axe et l'équateur éprouvent des perturbations auxquelles sont dus les phénomènes connus sous les noms de *précession des équinoxes* et de *nutation de l'axe de la terre;* ces phénomènes sont produits par les actions combinées du soleil et de la lune, mais la seule action du soleil, et l'obliquité de l'axe de la terre, sur le plan de l'écliptique, suffiraient pour occasionner des perturbations dans le parallélisme de cet axe.

1185. Dans les cas particuliers de l'art. 1183, quoique les forces puissent être fonctions des distances de leurs centres d'actions aux points sur lesquels elles agissent, toutes les circonstances du mouvement, tant uniforme que varié, du centre de gravité, seront déterminables par les équations (3) de l'art. 1120, les forces f', f'', f''', ou

leurs équivalentes, qui animent les différentes molécules du corps, étant supposées appliquées à ce centre; et, dans cette détermination, on n'aura aucun égard aux mouvements des molécules du corps, par rapport aux trois plans coordonnés qui passent par le centre de gravité, et qui sont parallèles aux trois plans fixes.

Mais les cas dont je viens de parler sont des exceptions; en général, si les forces qui émanent de points extérieurs, fixes ou mobiles, et qui agissent sur les molécules du corps, et si les actions de ces molécules, elles-mêmes, sur des points situés hors du corps, également fixes ou mobiles, sont fonctions des distances entre les centres d'où émanent les forces et les actions, et les points sur lesquels elles s'exercent, et que les dimensions du corps ne puissent pas être regardées comme infiniment petites, par rapport à ces distances, dès-lors le mouvement du centre de gravité et le mouvement de rotation autour de ce centre ne sont plus indépendants; en effet, les changements des distances et des positions respectives des points attirés, par rapport aux points attirants, étant les résultats et du mouvement du centre de gravité et du mouvement de rotation autour de ce centre, ce dernier mouvement doit, dans le cas général, avoir un effet sur l'intensité et la direction, instantanées, de la résultante générale des forces supposées appliquées au centre de gravité; de là, la liaison entre les deux mouvements de translation et de rotation.

Du mouvement d'un corps solide sur un plan fixe.

1186. Je suppose que la surface du corps, assujetti à se mouvoir sur un plan fixe, est *continue*, et que, pour une position donnée de ce corps, celles de tous les points de sa surface sont calculables par une équation entre trois variables; dans ce cas, les déterminations générales, relatives à son mouvement, peuvent être ramenées à des considérations pareilles à celles qu'on a employées pour ramener les problèmes du mouvement d'un point matériel sur une ligne, ou une surface, à ceux du mouvement libre.

En effet le corps devant être continuellement en contact, avec le plan, par un des points de sa surface, il y a, à ce point, une action du corps sur le plan, et une réaction du plan sur le corps; cette dernière peut être considérée comme une des puissances auxquelles ce corps est soumis,

dont l'intensité n'est pas donnée immédiatement, mais qu'on sait, *a priori*, être normale à la surface du corps, et agir dans un sens d'action tel qu'elle tend à pousser son point d'application dans ce corps; on peut donc, en prenant son intensité pour une des inconnues du problême, et l'introduisant dans l'analyse, considérer le corps comme libre, et si ce corps est dans les cas indiqués aux art. 1182 et 1183, les équations du problême seront établies d'après la condition de l'indépendance entre le mouvement du centre de gravité et le mouvement de rotation autour de ce centre.

Mais ces équations renfermeront, en général, quatre inconnues, qui n'existaient pas dans les équations du mouvement libre, savoir l'intensité de la réaction normale qui a lieu au point de contact, et les trois coordonnées de ce point; on aura, pour compléter le nombre des équations qui deviennent nécessaires, eu égard à ces nouvelles inconnues, l'équation du plan, celle de la surface, et deux équations qui expriment que l'un est en contact avec l'autre.

1187. Je suppose, pour plus de simplicité, que le plan fixe est le plan des xy; x, y et z représentant les coordonnées des points du corps, je désigne par $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, les coordonnées des mêmes points par rapport aux plans, mobiles avec le corps, qui renferment les trois axes principaux passant par le centre de gravité, les coordonnées de ce centre, respectivement parallèles aux axes fixes des x, y et z, étant a, b, c. Si on conçoit, qu'à un instant quelconque du mouvement, trois axes respectivement parallèles aux axes fixes des x, y, z se coupent au centre de gravité, en prenant ce centre pour origine, les coordonnées des points du corps, rapportées à ces nouveaux axes, seront, au même instant, $x-a$, $y-b$, $z-c$, et on aura, art. 1139, entre ces trois coordonnées et $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, les relations

$$(1)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} x-a=\alpha_{,}x_{,}+6_{,}y_{,}+\gamma_{,}z_{,}\\ y-b=\alpha_{,,}x_{,}+6_{,,}y_{,}+\gamma_{,,}z_{,}\\ z-c=\alpha_{,,,}x_{,}+6_{,,,}y_{,}+\gamma_{,,,}z_{,}\end{array}\right.$$

$$(2)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} x_{,}=\alpha_{,}(x-a)+\alpha_{,,}(y-b)+\alpha_{,,,}(z-c)\\ y_{,}=6_{,}(x-a)+6_{,,}(y-b)+6_{,,,}(z-c)\\ z_{,}=\gamma_{,}(x-a)+\gamma_{,,}(y-b)+\gamma_{,,,}(z-c)\end{array}\right.$$

Les quantités α, 6, γ, de différents accents, ayant la même signification qu'à l'article cité.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_{\prime}}{dx} = a_{\prime}\,; & \dfrac{dy_{\prime}}{dx} = 6_{\prime}\,; & \dfrac{dz_{\prime}}{dx} = \gamma_{\prime} \\[2ex] \dfrac{dx_{\prime}}{dy} = a_{\prime\prime}\,; & \dfrac{dy_{\prime}}{dy} = 6_{\prime\prime}\,; & \dfrac{dz_{\prime}}{dy} = \gamma_{\prime\prime} \end{cases}$$

rappelant que toutes ces valeurs se rapportent à un instant dé-
né, auquel correspondent des valeurs, pareillement déterminées, $a_{\prime\prime}$, etc. a, b et c.

valeurs $\dfrac{dL}{dy} = 0$ et $\dfrac{dL}{dx} = 0$, données par les équations (2) et

de $\dfrac{dx_{\prime}}{dx}$, $\dfrac{dy_{\prime}}{dx}$, etc., données par les précédentes, étant substi-

dans les équations (3) les changent en,

$$\begin{cases} a_{\prime}\left(\dfrac{dL}{dx_{\prime}}\right) + 6_{\prime}\left(\dfrac{dL}{dy_{\prime}}\right) + \gamma_{\prime}\left(\dfrac{dL}{dz_{\prime}}\right) = 0 \\[2ex] a_{\prime\prime}\left(\dfrac{dL}{dx_{\prime}}\right) + 6_{\prime\prime}\left(\dfrac{dL}{dy_{\prime}}\right) + \gamma_{\prime\prime}\left(\dfrac{dL}{dz_{\prime}}\right) = 0 \end{cases}$$

$\left(\dfrac{dL}{dx_{\prime}}\right)$, $\left(\dfrac{dL}{dy_{\prime}}\right)$ et $\left(\dfrac{dL}{dz_{\prime}}\right)$ se calculeront, en prenant la fonc-
on L, dans son état primitif, c'est-à-dire, composée en $x_{\prime}$, $y_{\prime}$ et $z_{\prime}$.

Les équations (6) qui remplacent les équations (2) en fournissent ainsi deux sur les quatre dont j'ai parlé à la fin de l'art. 1186. On en a une troisième en considérant qu'au point de contact du corps avec le plan sur lequel il est obligé de se mouvoir, on a $z = 0$, ce qui donne d'après la troisième équation (1) de l'article précédent,

$$(7) \ldots\ldots c + a_{\prime\prime\prime}\, x_{\prime} + 6_{\prime\prime\prime}\, y_{\prime} + \gamma_{\prime\prime\prime}\, z_{\prime} = 0$$

et enfin la quatrième équation est $L = 0$, les quatre équations ayant lieu ensemble au point de contact du corps et du plan fixe, et devant être combinées avec les équations du mouvement dont il va être question.

1189. Je supposerai que la pesanteur est la seule puissance extérieure qui agisse sur le corps; ainsi, après l'impulsion initiale, les modifications, qu'éprouve son mouvement, sont le résultat de l'action de cette puissance et de la résistance du plan fixe, résistance que je désigne par R et qui doit être considérée comme une force

$$(2)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} a=Ut+E \\ b=\frac{1}{2}gt^2\sin.\varepsilon+U't+E' \end{array}\right.$$

U, E, U' et E' étant des constantes arbitraires dont les valeurs dépendent de la vîtesse et de la position initiales du centre de gravité. Son mouvement horizontal, ou parallèle aux x, est uniforme, son mouvement parallèle aux y est uniformément varié. L'axe des y est parallèle à la ligne de plus grande pente du plan fixe, et il est aisé de voir que le mouvement dans le sens parallèle à toute droite, non horizontale, tracée sur le plan fixe, sera uniformément varié.

1190. La direction de R, perpendiculaire au plan fixe, ou, parallèle à l'axe des z, forme, art. 1139, avec les axes des $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$ des angles qui ont, pour cosinus respectifs, $\alpha_{,,,}$, $\beta_{,,,}$, $\gamma_{,,,}$; ses composantes respectivement parallèles aux $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$ sont, donc, $R\alpha_{,,,}$, $R\beta_{,,,}$, $R\gamma_{,,,}$, les moments, par rapport aux mêmes axes ont pour valeurs

$$R(y_{,}\gamma_{,,,}-z_{,}\beta_{,,,}),\ R(z_{,}\alpha_{,,,}-x_{,}\gamma_{,,,}),\ R(x_{,}\beta_{,,,}-y_{,}\alpha_{,,,});$$

$x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$ étant les coordonnées du point où le plan fixe et la surface du corps sont en contact; ces moments sont les seuls à introduire dans les équations (5) de l'art. 1154 parce que l'origine commune des $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$ étant au centre de gravité, les moments des poids des molécules du corps sont nuls par rapport à tous les axes qui passent par cette origine. On a donc en substituant, simplement, à N''', N'', N', dans les équations citées, les valeurs, ci-dessus, des moment de R,

$$(P)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} Adp+(C-B)qr\,dt=R(y_{,}\gamma_{,,,}-z_{,}\beta_{,,,})dt \\ Bdq+(A-C)rp\,dt=R(z_{,}\alpha_{,,,}-x_{,}\gamma_{,,,})dt \\ Cdr+(B-A)pq\,dt=R(x_{,}\beta_{,,,}-y_{,}\alpha_{,,,})dt \end{array}\right.$$

A, B, C, p, q et r ayant la même signification qu'à l'article cité.

Exemple de l'application des formules démontrées dans le chapitre précédent.

1191. Je vais supposer que le corps pesant, en mouvement sur un plan fixe, touche continuellement le plan par le même point de sa surface, et que de plus, la ligne passant par ce point de contact et par le centre de gravité est un axe principal. Euler est, je crois, le premier qui ait donné l'analyse complète de ce cas de mouvement, dont le jeu de la toupie présente les phénomènes, (*Theoria motus corporum rigi-*

dorum, cap. XVII), et on la trouve aussi, très-bien faite, dans l'ouvrage de M. Poisson ci-dessus cité.

L'axe principal, qui passe par le centre de gravité et par le point de contact, étant pris pour axe des $z_{,}$, les axes principaux des $x_{,}$ et $y_{,}$, se trouveront sur un plan perpendiculaire à cet axe et passant par le centre de gravité, où par l'origine commune des $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$, les $z_{,}$ positives étant prises du côté opposé au point de contact par rapport à cette origine. On a donc, relativement, au point de contact, en désignant, par λ, sa distance au centre de gravité.

$$(1)\ldots\ldots \left\{ x_{,}=0;\ y_{,}=0;\ z_{,}=-\lambda \right.$$

et ces valeurs, introduites dans les équations (P) de l'article précédent, les changent en,

$$(2)\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} A\,dp+(C-B)qr\,dt=R\lambda\beta_{,,,}dt \\ B\,dq+(A-C)rp\,dt=-R\lambda\alpha_{,,,}dt \\ C\,dr+(B-A)pq\,dt=0. \end{array} \right.$$

Si on suppose que la position initiale du centre de gravité était sur l'axe des z ou des c, on aura les valeurs initiales $a=0$, $b=0$, qui rendent nulles les constantes arbitraires E et E', dans les équations (2) de l'art. 1189.

De plus l'axe des z', qui passe par le point de contact et par le centre de gravité, faisant, avec l'axe des z ou des c, un angle qui a pour cosinus $\gamma_{,,,}$, on a $c=\lambda\gamma_{,,,}$, d'où $\frac{ddc}{dt^2}=\frac{\lambda\, dd\gamma_{,,,}}{dt^2}$, valeur à substituer dans la troisième équation (1) de l'art. cité; et, on aura, ainsi, d'après les équations (1) et (2) de cet article,

$$(3)\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} a=Ut \\ b=\tfrac{1}{2}gt^2\sin.\varepsilon+U't \\ c=\lambda\gamma_{,,,} \end{array} \right.$$

$$(4)\ldots\ldots\ R=Mg\cos.\varepsilon+M\lambda\frac{dd\gamma_{,,,}}{dt^2}$$

1192. Multipliant les 1re., 2e. et 3e. équations (2), de l'article précédent, respectivement, par $\alpha_{,,,}$, $\beta_{,,,}$, $\gamma_{,,,}$, faisant la somme des équations produits et réduisant, on a

$$(1)\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} A\,\{\alpha_{,,,}dp+p\,dt(r\beta_{,,,}-q\gamma_{,,,})\} \\ +B\,\{\beta_{,,,}dq+q\,dt(p\gamma_{,,,}-r\alpha_{,,,})\} \\ +C\,\{\gamma_{,,,}dr+r\,dt(q\alpha_{,,,}-p\beta_{,,,})\} \end{array} \right\}=0$$

multipliant

multipliant encore les mêmes équations, respectivement, par p, q et r, et ajoutant les produits, on a

$$(2)\ldots\ldots Apdp+Bqdq+Crdr=R\lambda dt(p\beta_{,,,}-q\alpha_{,,,})$$

on a, art. 1152, $d\alpha_{,,,}=(r\beta_{,,,}-q\gamma_{,,,})dt$; $d\beta_{,,,}=(p\gamma_{,,,}-r\alpha_{,,,})dt$ $d\gamma_{,,,}=(q\alpha_{,,,}-p\beta_{,,,})dt$; l'équation (4), de l'article précédent, donne une valeur de R, et ces valeurs, substituées dans les deux équations (1) et (2), donnent

$$(3)\ldots\ldots \begin{cases} A(\alpha_{,,,}dp+pd\alpha_{,,,})+B(\beta_{,,,}dq+qd\beta_{,,,})+C(\gamma_{,,,}dr+rd\gamma_{,,,})=0 \\ Apdp+Bqdq+Crdr=-\lambda M\left(gd\gamma_{,,,}\cos.\varepsilon+\lambda.\frac{d\gamma_{,,,}dd\gamma_{,,,}}{dt^2}\right) \end{cases}$$

et, en intégrant,

$$(4)\ldots\ldots \begin{cases} A\alpha_{,,,}p+B\beta_{,,,}q+C\gamma_{,,,}r=k \\ Ap^2+Bq^2+Cr^2+2\lambda Mg\gamma_{,,,}\cos.\varepsilon+\lambda^2 M.\left(\frac{d\gamma_{,,,}}{dt}\right)^2=h \end{cases}$$

1193. J'ai supposé, au mobile, une forme quelconque, le problème n'étant particularisé que par la condition d'avoir constamment le même point de la surface du corps en contact avec le plan fixe; on peut maintenant faire quelque hypothèse sur la forme, qu'on a d'abord laissée indéterminée; je prendrai le cas particulier de $A=B$, qui convient aux solides de révolution homogènes, dont l'axe de figure passerait par le point de contact, et à une infinité d'autres solides.

Dans cette hypothèse la troisième équation (2) de l'art. 1191, devient $Cdr=0$, d'où $r=n$, en désignant, par n, la constante arbitraire; et substituant cette valeur dans les équations (4) de l'article précédent, on a

$$(H)\ldots\ldots \begin{cases} r=n \\ A(\alpha_{,,,}p+\beta_{,,,}q)+Cn\gamma_{,,,}=k \\ A(p^2+q^2)+\lambda^2 M\left(\frac{d\gamma_{,,,}}{dt}\right)^2+2\lambda Mg\gamma_{,,,}\cos.\varepsilon=h-Cn^2 \end{cases}$$

1194. Soient, comme à l'art. 1187, trois axes respectivement parallèles aux x, y et z, se coupant au centre de gravité, où se trouve

l'origine commune des $x_{,}, y_{,}$ et $z_{,}$, et donnons aux lettres ψ, ϕ et θ la même signification qu'à l'art. 1140, nous aurons, par les équations (1) de l'art. 1151,

$$\alpha_{,,,}=\sin.\theta\sin.\phi;\ 6_{,,,}=\sin.\theta\cos.\phi;\ \gamma_{,,,}=\cos.\theta;\ d\gamma_{,,,}=-\sin.\theta d\theta$$

et par les équations (3) du même article,

$$p=\frac{\sin.\theta\sin.\phi d\psi+\cos.\phi d\theta}{dt} \text{ et } q=\frac{\sin.\theta\cos.\phi d\psi-\sin.\phi d\theta}{dt}$$

d'où

$$(1)\ldots\ldots\begin{cases} p\alpha_{,,,}+q6_{,,,}=\sin.^2\theta.\dfrac{d\psi}{dt}. \\ p^2+q^2=\sin.^2\theta\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \end{cases}$$

et ces valeurs étant substituées dans les équations (H) de l'article précédent, on a les suivantes où on a écrit, simplement, h au lieu de $h-Cn^2$, la quantité représentée par Cn^2 pouvant être censée comprise dans la constante arbitraire qui complète l'intégrale,

$$(2)\ldots\ldots\begin{cases} A\sin.^2\theta\,\dfrac{d\psi}{dt}+Cn\cos.\theta=k \\ (A+\lambda^2M\sin.^2\theta)\dfrac{d\theta^2}{dt^2}+A\sin.^2\theta\dfrac{d\psi^2}{dt^2}+2\lambda Mg\cos.\varepsilon\cos.\theta=h \end{cases}$$

éliminant $\dfrac{d\psi}{dt}$ entre ces deux équations, et prenant la valeur de dt, on a,

$$(3)\ldots\ldots dt=\frac{\sin.\theta\,(A^2+A\lambda^2M\sin.^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta}{\{A\sin.^2\theta(h-2\lambda Mg\cos.\varepsilon\cos.\theta)-(k-Cn\cos.\theta)^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

et la valeur de t peut être obtenue en fonction de θ par la méthode des quadratures. Substituant ensuite, dans la première des équations (2), pour dt, le second membre de l'équation précédente, on aura, par la

même méthode des quadratures, ψ en fonction de θ; enfin remplaçant, dans la troisième équation (3) de l'art. 1151, r par sa valeur n, dt par sa valeur, équation (3) ci-dessus, et $d\psi$ par le résultat de la substitution de cette seconde valeur dans la 1re. équation (2), on aura une équation entre $d\phi$, θ et $d\theta$ et ϕ pourra encore être exprimé en fonction de θ.

La détermination des phénomènes du mouvement dépend, comme on a vu précédemment, de la connaissance des valeurs de ϕ, ψ et θ, correspondantes à une valeur quelconque du temps t, ou, plus généralement, des valeurs de trois des indéterminées ϕ, ψ, θ et t correspondantes à la valeur de l'une d'entre elles; or, d'après ce qui vient d'être dit, on a trois équations différentielles, qui, par la méthode des quadratures, donneraient ces valeurs; la détermination demandée ne dépend donc plus des considérations propres à la dynamique, mais uniquement de l'analyse qui, malheureusement, ne fournit pas de moyens pour intégrer, sous forme finie, les valeurs de dt, $d\psi$ et $d\phi$.

Les trois constantes par lesquelles on compléterait les intégrales qui donneraient t, ψ et ϕ en fonction de θ, dépendent des valeurs de ψ, ϕ, θ, et t, à l'instant où le mobile est mis en mouvement, et on peut, toujours à cet instant, supposer $t=0$. Quant aux constantes U et U', qui entrent dans les valeurs des coordonnées du centre de gravité, (équations (3) de l'art. 1191), et aux constantes n, k, et h, des équations (H) de l'art. 1193, lesquelles entrent dans les expressions de dt, $d\psi$ et $d\phi$ elles dépendent de l'intensité et de la direction de l'impulsion initiale, donnée au mobile.

1195. l'angle θ est formé par l'axe des $z_{,}$, (l'axe principal du corps passant par le point de contact et par le centre de gravité) et par l'axe des z perpendiculaire au plan fixe. Soit Θ la valeur initiale de cet angle, et posons la valeur

$$(1) \ldots\ldots \theta = \Theta + \omega.$$

On aura, au premier instant du mouvement, $\omega=0$, et, à un instant quelconque, $d\theta = d\omega$. Si, dans l'hypothèse où ω serait un angle extrêmement petit, on substitue cette valeur, et celle de θ, dans l'équation (3) de l'article précédent, élevée au quarré, et qu'on réduise en série

la valeur de $\frac{d\varpi^2}{dt^2}$ tirée de cette équation, le développement sera de la forme

$$(2)\ldots\ldots \frac{d\varpi^2}{dt^2} = v_{,} + 2v_{,,}\varpi - v_{,,,}\varpi^2 \text{ etc.}$$

$v_{,}$, $v_{,,}$, $v_{,,,}$, etc. sont des coefficients constants. Négligeant les puissances de ϖ supérieures à la deuxième, on a

$$(3)\ldots\ldots dt = \frac{d\varpi}{\sqrt{v_{,} + 2v_{,,}\varpi - v_{,,,}\varpi^2}}$$

et en intégrant

$$(4)\ldots\ldots j + t\sqrt{c} = \text{arc}\left(\sin. = \frac{v_{,,,}\varpi - v_{,,}}{\sqrt{v_{,,}^2 + v_{,}v_{,,,}}}\right)$$ j est la constante arbitraire.

la constante j se déterminera par les valeurs initiales de t et de ϖ, qui peuvent toujours être $t=0$ et $\varpi=0$; l'équation précédente donne

$$(5)\ldots\ldots \varpi = \frac{v_{,,}}{v_{,,,}} + \left(\frac{v_{,}}{v_{,,,}} + \frac{v_{,,}^2}{v_{,,,}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sin.\,(j + t\sqrt{v_{,,,}})$$

Si $v_{,,,}$ est négative, et, par conséquent, $\sqrt{v_{,,,}}$ imaginaire, $\sin.\,(j+t\sqrt{v_{,,,}})$ se transformera, par les formules connues, en exponentielles réelles.

Mais si $\sqrt{v_{,,,}}$ est réelle et que $\frac{v_{,,}}{v_{,,,}}$ et $\left(\frac{v_{,}}{v_{,,,}} + \frac{v_{,,}^2}{v_{,,,}^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ soient de très-petites quantités, la valeur de ϖ sera constamment renfermée dans des limites très-resserrées, le terme variable $\sin.\,(j+t\sqrt{v_{,,,}})$ étant révolutif; l'axe principal du corps, passant par le point de contact et par le centre de gravité du corps, s'écartera et s'approchera, périodiquement, d'un état moyen, et ses digressions seront d'autant moins étendues que les quantités sus-mentionnées seront plus petites.

La ligne d'intersection du plan fixe et du plan, perpendiculaire à l'axe de figure et passant par le centre de gravité du corps, aura, autour de la perpendiculaire au plan fixe passant par ce centre, un mouvement qu'on détermine en remplaçant θ dans la première équation (2) de l'art. 1194, par sa valeur $\Theta+\omega$, négligeant ω^2, dans la substitution, et mettant, ensuite, pour ω, sa valeur ci-dessus; on a, par ces opérations,

$$(6)\ldots\ldots d\psi=a'dt+b'dt\sin.(j+t\sqrt{\nu_{,,,}})$$

a' et b' sont des coefficients constants, et, en intégrant,

$$(7)\ldots\ldots \psi=a't-\frac{b'}{\sqrt{\nu_{,,,}}}\cos.(j+t\sqrt{\nu_{,,,}})+j'$$

j' est la constante arbitraire.

L'équation $rdt=d\phi+\cos.\theta d\psi$, (art. 1151 équations (3)), donnera une valeur approchée de l'angle ϕ, et les angles θ, ψ et ϕ, se trouveront, assignables, en fonction du temps; on aura donc, à chaque instant, les inclinaisons, par rapport au plan fixe, tant de l'axe du corps passant par le point de contact et le centre de gravité, que du plan perpendiculaire à cet axe et passant aussi par le centre de gravité, plan qui renferme les $x_,$ et $y_,$. On a, d'ailleurs, par les équations (3) de l'art. 1191, les coordonnées du centre de gravité à un instant quelconque, et le problême se trouve, ainsi, complétement résolu.

Dans le cas particulier où on aurait $\nu_,=0$ et $\nu_{,,}=0$, l'angle ω serait nul, et la valeur de θ constante; l'axe passant par le point de contact et par le centre de gravité, formerait donc, alors, un angle invariable avec la perpendiculaire au plan fixe. On aurait, en conséquence, par la première équation (2) de l'art. 1193, $\frac{d\psi}{dt}$ = constante, et la ligne d'intersection du plan fixe et du plan perpendiculaire à

l'axe de figure du corps passant par son centre de gravité, aurait, autour de la perpendiculaire au plan fixe, passant par ce centre, un mouvement de rotation uniforme.

FIN DE LA TROISIÈME SECTION.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE
DE DYNAMIQUE.

SECTION IV,
QUI TRAITE DU MOUVEMENT DES CORPS
ET
DES SYSTÊMES DE CORPS DE FORME VARIABLE.

Observations préliminaires.

1196. LA partie de la mécanique dont je vais entretenir les élèves, offre, aux géomètres, d'inépuisables sujets de recherches et de méditations; les efforts qu'on a faits, pour rendre les résultats de ces recherches utiles à l'astronomie, et aux sciences physico-mathématiques en général, ont singulièrement contribué aux progrès des méthodes de l'analyse transcendante; mais ces méthodes n'offrent point encore, à beaucoup près, toutes les ressources desirables à la mécanique, quoique celle-ci fournisse les équations différentielles de tous les problêmes relatifs aux systêmes tant solides que fluides, problêmes dont les solutions n'ont, en général, vu les bornes actuelles du calcul intégral, que des applications limitées.

Ces solutions peuvent toujours se déduire du principe du mouvement exposé et démontré, art. 1035 et suivants, au moyen duquel la mise en équation d'un problême de mouvement se réduit à une énonciation de conditions d'équilibre; elles sont aussi obtenues, dans beaucoup de cas, d'une manière plus facile et plus immédiate, par l'emploi d'autres principes dont j'ai déja entretenu les élèves, et sur lesquels je reviendrai, pour les présenter et les démontrer dans toute leur généralité. Ces prin-

je vais démontrer les formules et les théorêmes que j'ai donnés, sans démonstration dans le mémoire cité, où j'ai exposé quelques propriétés du pendule composé qui n'avaient pas encore été remarquées; voici l'énoncé du problême à résoudre,

Un corps, solide et pesant, oscille autour d'un axe fixe horizontal; un autre corps, solide et pesant, peut glisser, par un simple mouvement de translation, le long de la perpendiculaire à l'axe de rotation, qui, partant de cet axe, passe par le centre de gravité du premier corps, et sur laquelle perpendiculaire le centre de gravité du second corps est assujetti à se mouvoir. Il s'agit de trouver les formules du mouvement commun du système de deux corps, applicables à une position quelconque de celui dont la position peut changer.

Soient

La masse (représentée par son poids) du pendule composé séparé du corps curseur.................................... P

La masse (représentée par son poids) du corps curseur........ p

La distance variable, à l'axe de rotation, du centre d'oscillation du systême de P et p, c'est-à-dire, la longueur du pendule synchrone.................................... y

La distance, entre le même axe de rotation, et

le centre de gravité { de P.................................... a
{ de p.................................... x

La valeur de x correspondante au *maximum* d'accélération, c'est-à-dire, au *minimum* de longueur de y, ou du pendule synchrone,.................................... X

Valeur de y, correspondante à $x = X$.................... Y

Le moment d'inertie, de P ou de p, respectivement, par rapport à un axe parallèle à l'axe de rotation et passant par le centre

de gravité { de P.................................... PK^2
{ de p.................................... $p\,k^2$

En désignant par $a_{,}$ la distance, correspondante à une valeur quelconque de x, du centre commun de gravité à l'axe de suspension, et par $(P+p)\,(a_{,}^2+k_{,}^2)$, art. 1061, le moment d'inertie, du systême des deux masses, rapporté à l'axe de suspension, on a, art. 1099,

$y = a_{,} + \frac{k_{,}^2}{a_{,}}$; or, art. 273, dans le cas dont il s'agit ici, $a_{,} = \frac{aP + xp}{P + p}$, et, art. 1061,

$$(P+p)\,(a_{,}^2 + k_{,}^2) = P(K^2 + a^2) + p(k^2 + x^2),$$ d'où

$$k_{,}^2 = \frac{P(K^2+a^2)+p(k^2+x^2)}{P+p} - \left(\frac{aP+px}{P+p}\right)^2,$$ et ces valeurs étant substituées dans celle de y, on a

$$(1)\ldots\ldots y = \frac{P(K^2+a^2)+p(k^2+x^2)}{aP+xp}$$

si on fait, pour abréger,

$$(2)\ldots\ldots \begin{cases} \frac{P}{p}(a^2+K^2)+k^2 = A^2 \\ \frac{P}{p}\,a = B \end{cases}$$

l'équation (1) deviendra

$$(3)\ldots\ldots y = \frac{A^2+x^2}{B+x} = x - B + \frac{A^2+B^2}{B+x}$$

et prenant la valeur de x en y

$$(4)\ldots\ldots x = \tfrac{1}{2}y \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}y^2 + By - A^2}$$

1199. On peut, maintenant, juger de l'influence qu'a, sur le mouvement du pendule, le déplacement du poids curseur p, ou la valeur de x, dans l'équation (3) de l'article précédent; si on fait, dans cette équation, $x = \pm\infty$, on aura $y = \pm\infty$. Ainsi la longueur y, du pendule synchrone, n'a point de limites d'augmentation; mais elle en a une de diminution qu'on trouve, soit en faisant $\frac{dy}{dx} = 0$, soit en égalant, à zéro, la quantité qui est sous le radical de l'équation (4) de l'article précédent, ce qui donne,

$$(1)\ldots\ldots \begin{cases} Y = 2\{-B \pm \sqrt{A^2+B^2}\} \\ X = \tfrac{1}{2}Y \end{cases}$$

Ainsi on a deux valeurs de x qui satisfont à la condition $\frac{dy}{dx} = 0$, savoir $-B + \sqrt{A^2+B^2}$ et $-(B + \sqrt{A^2+B^2})$; la première suppose

que le centre de gravité du système de P et p est au-dessous de l'axe de suspension, c'est-à-dire, que ce système jouit de la *stabilité*, ou qu'écarté de la position d'équilibre il y revient et oscille de part et d'autre de cette position; la seconde valeur suppose que le centre de gravité du système est au-dessus de l'axe de suspension; dans ce cas le système n'a pas de *stabilité*; si on l'écarte de la position d'équilibre, il continue à s'en éloigner quelque petit que soit l'écart initial.

On a $y = \infty$, au point de l'axe des x qui répond à $x = -B = -\frac{P}{p}a$ celui où il faut placer le poids curseur pour que le centre de gravité du système se trouve sur l'axe de rotation, et qui partage, en deux parties égales, la distance entre les points pour lesquels on a les valeurs $x = -B + \sqrt{A^2 + B^2}$ et $x = -(B + \sqrt{A^2 + B^2})$; de part et d'autre de ce point moyen, des valeurs égales de x donnent des valeurs égales de y, lesquelles, après avoir passé par les *minima*

$$2(-B + \sqrt{A^2 + B^2}) \text{ et } -2(B + \sqrt{A^2 + B^2})$$

ont ensuite des augmentations sans bornes.

1200. La construction suivante mettra dans le plus grand jour les propriétés du pendule qui a une partie de sa masse mobile le long de son axe, je mène deux droites KCK et $K'CK'$, faisant entre elles un demi-angle droit, et je suppose, pour plus de clarté, la ligne KCK horizontale. Entre ces lignes, comme assymptotes, je construis l'hyperbole WSW, qui a, pour axe, LCL et dont l'équation est Fig. 13.

$\eta = \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{2}}{\xi}$, en désignant par ξ la longueur CG, prise sur une assymptote, et par η la parallèle GM à l'autre assymptote.

Les deux branches de cette hyperbole donneront toutes les longueurs du pendule synchrone, correspondantes à des positions déterminées du poids curseur p, et réciproquement; voici comment on les obtiendra. On tracera une ligne droite $FCAF$, qui partage en deux parties égales toutes les verticales comme GV, $E'E$, terminées aux deux assymptotes, ligne qui sera un diamètre de l'hyperbole, et menant une horizontale YAY à une distance $B'A = B$, au-dessous de l'horizontale KCK, on prendra, pour point de suspension, l'intersection A de YAY et FAF, et on mènera par ce point A la verticale XAX qui repré-

l'art. 1198 s'applique à l'art de régler les pendules. On emploie communément, pour cette opération, des vis de rappel placées au-dessous de la lentille, et qui tournées, dans un sens ou dans l'autre, haussent ou baissent cette lentille; lorsque la suspension est à ressort, la vis tient au ressort et en tournant l'écrou placé au-dessus du pendule on hausse ou on baisse sa masse entière sans être obligé de l'arrêter; mais, dans ces divers mouvements, une variation de 1″ en un jour, ne répond qu'à un déplacement du centre d'oscillation de $\frac{23}{1000}$ (environ $\frac{1}{44}$) de millimètre, et la petitesse de cette quantité est un inconvénient, au lieu qu'en employant un poids curseur égal à la 1000e partie du poids du pendule, on aura, près de la position correspondante au *maximum* d'accélération, une marche de 0m, 1 de ce poids curseur, pour produire à peine une variation de $\frac{1}{2}$ seconde; près de la suspension, la même marche ne donnera qu'une variation d'environ 4″, ce qui procure un avantage très-considérable pour la commodité et la précision.

Mouvement d'un systême de corps composé d'un corps M, tournant autour d'un axe fixe, et d'un nombre quelconque de corps μ, assujettis à se mouvoir sur la perpendiculaire menée du centre de gravité du corps M sur l'axe fixe de rotation.

1202. Si le poids curseur dont il est question dans le chapitre précédent n'était pas retenu dans la position arbitraire qu'on lui donne sur la ligne qu'il peut parcourir, il glisserait le long de cette ligne pendant que le pendule se mouvrait; il est bon d'examiner cette hypothèse, et, pour en rendre l'examen plus instructif, je traiterai le cas d'un nombre indéfini de masses μ, placées sur la perpendiculaire menée, du centre de gravité de M, à l'axe de rotation.

Soient

Le moment d'inertie de la masse M, par rapport à l'axe de rotation. . . . . K

La longueur de la perpendiculaire menée de son centre de gravité à l'axe de rotation. . . . . a

La distance, au bout du temps t, d'une des masses μ, à l'axe de rotation. . . . . ρ

parallèlement aux x et aux y, les vîtesses respectives $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, dont les variations effectives sont $\frac{ddx}{dt}$ et $\frac{ddy}{dt}$, représentatives des forces motrices $\frac{\mu ddx}{dt^2}$ et $\frac{\mu ddy}{dt^2}$. Les composantes de ces forces dans le sens de la direction du mouvement de μ et dans les sens Nn' et Nn perpendiculaires à cette direction, sont

Composantes de $\frac{\mu ddx}{dt^2}$ $\left\{\begin{array}{l} \text{dans le sens } NS \ldots\ldots \quad \frac{\mu ddx}{dt^2}\cos.\,\omega \\ \text{dans le sens } Nn' \ldots\ldots \quad -\frac{\mu ddx}{dt^2}\sin.\,\omega \end{array}\right.$

Composantes de $\frac{\mu ddy}{dt^2}$ $\left\{\begin{array}{l} \text{dans le sens } NS \ldots\ldots \quad \frac{\mu ddy}{dt^2}\sin.\,\omega \\ \text{dans le sens } Nn \ldots\ldots \quad \frac{\mu ddy}{dt^2}\cos.\,\omega. \end{array}\right.$

$$(2)\ldots\left\{\begin{array}{l}\text{Somme des composantes des forces qui ont lieu}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{ll}\text{dans le sens } NS & \frac{\mu(ddx\cos.\,\omega+ddy\sin.\,\omega)}{dt^2}\\ \text{perpendiculairement à } NS & \frac{\mu(ddy\cos.\,\omega-ddx\sin.\,\omega)}{dt^2}\end{array}\right.$$

On a

$$x=\rho\cos.\,\omega;\ y=\rho\sin.\,\omega$$
$$dx=d\rho\cos.\,\omega-\rho d\omega\sin.\,\omega$$
$$dy=d\rho\sin.\,\omega+\rho d\omega\cos.\,\omega$$

$$(3)\ldots\left\{\begin{array}{l} ddx=\left\{\begin{array}{l}dd\rho\cos.\,\omega-2d\rho d\omega\sin.\,\omega\\ -\rho dd\omega\sin.\,\omega-\rho d\omega^2\cos.\,\omega\end{array}\right.\\ ddy=\left\{\begin{array}{l}dd\rho\sin.\,\omega+2d\rho d\omega\cos.\,\omega\\ +\rho dd\omega\cos.\,\omega-\rho d\omega^2\sin.\,\omega\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Multipliant la première et la deuxième de ces équations (3), respectivement, 1° par cos. ω et sin. ω et faisant la somme des équations produits; 2° par sin. ω et cos. ω, et retranchant la première équation produit de la deuxième, on a les deux suivantes

long de l'axe, tenant au corps M, sur lequel cette masse est assujettie à se mouvoir. Cette équation, d'après le principe général, est l'égalité à zéro de la somme des composantes $g\mu \sin. \varpi$ et $\frac{\mu(dd\rho - \rho d\varpi^2)}{dt^2}$, cette dernière, qui est la 1re composante (5) de l'article précédent, étant prise avec un sens d'action contraire à celui qu'elle a effectivement; on a donc, pour chaque masse, ou point matériel, μ,

$$(2) \ldots\ldots \frac{\mu(dd\rho - \rho d\varpi^2)}{dt^2} = g\mu \sin. \varpi$$

Ainsi, ν étant le nombre des masses μ, les équations (1) et (2) en représentent un nombre $\nu + 1$, au moyen desquelles on devrait pouvoir déterminer, en fonctions de t, les $\nu + 1$ inconnues $\vartheta, \frac{d\rho'}{dt}, \frac{d\rho''}{dt}, \ldots \frac{d\rho^{(\nu)}}{dt}$. Mais cette détermination présente, en général, de grandes difficultés qui tiennent à l'imperfection de l'analyse.

Il est bon d'observer que l'équation précédente aurait pu être obtenue, immédiatement, en considérant qu'à un instant quelconque la force motrice effective $\frac{\mu dd\rho}{dt^2}$ se compose de la force centrifuge $\mu\rho\vartheta^2$, ou $\mu\rho \frac{d\varpi^2}{dt^2}$, et de la composante $g\mu \sin. \varpi$, de la pesanteur de μ, prise dans la direction de la ligne, fixe avec le corps M, que μ est obligé de parcourir, ce qui donne, sans calcul,

$$\frac{\mu dd\rho}{dt^2} = \mu\rho \frac{d\varpi^2}{dt^2} + g\mu \sin. \varpi$$

c'est-à-dire, l'équation ci-dessus.

1205. Désignant, par N, la pression normale qu'exerce un des corps μ, Fig. 14
contre l'axe tenant au corps M, le long duquel ce corps μ est obligé de se mouvoir, il est évident que cette pression est égale à l'excès de la composante $g\mu \cos. \varpi$, de l'action de la pesanteur, perpendiculaire à l'axe dont on vient de parler, sur la composante, normale à NS, dont j'ai donné l'expression (5), art. 1203; ainsi on a pour chaque corps μ, l'équation

$$(3)\ldots\ldots\Sigma\{\mu(d\rho^2+\rho^2 d\omega^2)\}=B\,dt^2$$

substituant, dans (3), la valeur générale de $\rho\,d\omega^2$, donnée par (1), on a

$$\Sigma\{\mu(d\rho^2+\rho\,dd\rho)\}=B\,dt^2$$

et, en intégrant, par rapport au temps, on trouve
par une 1re intégration.... $\Sigma(\mu\rho\,d\rho)=Bt\,dt+\frac{1}{2}F\,dt$
et par une 2e intégration..... $\Sigma(\mu\rho^2)=Bt^2+Ft+G$
F et G sont deux nouvelles constantes arbitraires introduites par la double intégration.

Substituant, pour $\Sigma\ (\mu\rho^2)$, sa valeur donnée par (2), on obtient finalement,

$$(4)\ldots\ldots d\omega=\frac{C\,dt}{Bt^2+Ft+G}$$

équation séparée qui donnera le mouvement angulaire du système. On a vu précédemment ce qu'étaient les constantes C et B; la valeur de la vîtesse $\frac{d\rho}{dt}$ correspondante à $t=0$, étant v_0, on a $F=2\Sigma(\mu\rho_0 v_0)$ et $G=\Sigma\ (\mu\rho^2{}_0)$.

ρ' et ρ'' étant, au bout du temps t, les distances respectives, à l'axe de rotation, de deux des corps μ, que je désigne par μ' et μ'', on a, d'après l'équation (1)

$$dd\rho'=\rho'\,d\omega^2;\ dd\rho''=\rho''\,d\omega^2$$

d'où on conclut

$$(5)\ldots\ldots\rho''\,dd\rho'-\rho'\,dd\rho''=0$$

et en intégrant par rapport au temps,

$(6)\ldots\ldots\ldots\rho''\,d\rho'-\rho'\,d\rho''=C_{,}\,dt$ } $C_{,}$ est la constante arbitraire.

on aurait entre la même distance ρ' et une autre distance ρ''', au bout du temps t,

$(7)\ldots\ldots\ldots\rho'''\,d\rho'-\rho'\,d\rho'''=C_{,,}\,dt$ } $C_{,,}$ est la constante arbitraire.

et on déduit de (6) et (7)

$$\rho''\,d\rho'-\rho'\,d\rho''=\frac{C_{,}}{C_{,,}}(\rho'''\,d\rho'-\rho'\,d\rho''')$$

divisant par ρ'^2 et intégrant

$$\frac{\rho''}{\rho'}=\frac{C_{,}}{C_{,,}}\cdot\frac{\rho'''}{\rho'}+F_{,,}$$

$$\text{d'où}\ \frac{\rho'''}{\rho'}=b_{,,,}\frac{\rho''}{\rho'}+f_{,,,}$$

{ $F_{,,}$, est la constante introduite par l'intégration ; $b_{,,,}$ et $f_{,,,}$ dépendent de $C_{,}$, $C_{,,}$ et $F_{,,}$

distances ρ', ρ'' et ρ''' et par les valeurs initiales des vitesses $\frac{d\rho'}{dt}$, $\frac{d\rho''}{dt}$, $\frac{d\rho'''}{dt}$ des masses μ', μ'' et μ''', dans le sens de la ligne perpendiculaire à l'axe de rotation qu'elles sont obligées de parcourir. $F_{,,}$ et les b et f de différents accents sont donnés par $C_{,}$, $C_{,,}$ et par les valeurs initiales de $\frac{\rho''}{\rho'}$, $\frac{\rho'''}{\rho'}$, etc. les autres constantes se déduisent de celles dont je viens de parler; ainsi le problème du mouvement d'un nombre quelconque de corps, assujettis à glisser le long d'une ligne inflexible et horizontale, tournant autour d'un axe vertical, est complétement résolu.

1210. Je vais maintenant avoir égard à la masse du corps M, en conservant la condition de la *verticalité* de l'axe de rotation et de l'*horizontalité* de la ligne perpendiculaire à cet axe et passant par le centre de gravité de M, sur laquelle les corps μ sont assujettis à se mouvoir: je suppose que le système a été mis en mouvement par une impulsion donnée au corps M, laquelle a déterminé la rotation, tant de ce corps M que des corps μ, autour de l'axe vertical fixe.

La solution de ce cas se ramène facilement à celle du cas qui a été résolu, art. 1208. Pour cela, j'observe que l'impulsion n'ayant été donnée qu'au corps M, chacun des corps μ n'a pu commencer à se mouvoir, dans le sens suivant lequel il s'éloigne de l'axe de rotation, qu'en vertu de la force centrifuge, et que, par conséquent, sa vîtesse initiale, dans ce même sens, a été infiniment petite ou nulle; en effet on a, dans l'équation (6) de l'article précédent $\rho''.\frac{d\rho'}{dt}-\frac{\rho'\,d\rho''}{dt}=C_{,}$, au premier instant du mouvement, $\frac{d\rho'_0}{dt}=\vartheta_0^2\rho_0'\,dt$, $\frac{d\rho''_0}{dt}=\vartheta^2_0\rho''\,dt$, ϑ_0 étant la vîtesse angulaire initiale du système, d'où

$$C_{,}=\vartheta^2_0\,dt\,(\rho'_0-\rho''_0)=\frac{1}{\infty}.$$

On a donc $\rho''\,d\rho'-\rho'\,d\rho''=0$, ou $\frac{d\rho'}{\rho'}=\frac{d\rho''}{\rho''}$ et en intégrant

1212. J'ai supposé, jusqu'à présent, que l'axe de rotation était vertical, et que les points matériels μ se mouvaient dans un plan horizontal, ce qui annulle l'effet de la pesanteur; si l'axe de rotation est horizontal, le corps μ continuant à se mouvoir sur la perpendiculaire à cet axe, menée par le centre de gravité du corps M, la pesanteur aura son effet tant sur le corps M que sur le corps μ; dans ce cas, on fera la somme des équations (1) et (2) de l'art. 1204, multipliées respectivement par $d\omega$ et par $d\rho$, la seconde étant affectée du signe Σ pour indiquer la somme de toutes les équations pareilles qui s'appliquent à chacun des corps μ, et on aura

$$)\ldots\ \left.\begin{array}{l}\Sigma\dfrac{\{\mu(d\rho dd\rho+\rho d\rho d\omega^2+\rho^2 d\omega dd\omega\}}{dt^2}\\ +\dfrac{K\,d\omega\,dd\omega}{dt^2}\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}g\{\Sigma[\mu(\rho d\omega\cos.\omega+d\rho\sin.\omega)]\}\\ +gaM.d\omega\cos.\omega\end{array}\right.$$

et en intégrant par rapport au temps,

$$(2)\ldots\ \frac{\Sigma\{\mu(d\rho^2+\rho^2 d\omega^2)+K d\omega^2\}}{dt^2}=2g\sin.\omega\{aM+\Sigma(\mu\rho)\}+B,$$

Le premier membre de cette équation est la somme des forces vives, au bout du temps t, qui n'est plus constante, comme à l'art. 1207, mais dépend de l'inclinaison du pendule M, et de la position des corps μ sur la ligne commune que ces corps ont à parcourir.

D'autres applications que je pourrais faire, de la théorie exposée depuis l'art. 1202 jusqu'à l'art. 1207, offriraient une analyse compliquée et peu satisfaisante, sans profit pour l'instruction en mécanique; ainsi je m'en tiendrai aux problêmes résolus depuis l'art. 1208, après avoir rempli l'objet principal que je m'étais proposé, celui de donner aux élèves des exemples élémentaires de l'emploi du principe de la conservation des forces vives.

Effets des impulsions initiales données au systême de corps dont il a été question dans les trois chapitres précédents; phénomènes de mouvement qui ont lieu lorsqu'un corps, assujetti à tourner autour d'un axe fixe, en choque plusieurs autres.

1213. J'ai supposé, dans les trois chapitres précédents, que les mouvements initiaux, tant du corps M que des corps μ, étaient

l'autre parallèle au même plan dont la position est censée connue lorsque les corps μ rencontrent le corps M, et nommons U la première composante, cette lettre U devant avoir le même accent que le corps μ dont elle représente la vîtesse; désignons enfin par γ_0, la vîtesse angulaire du systême, à l'instant où le choc est consommé, on aura, d'après le principe général du mouvement, en continuant à désigner, par K, le moment d'inertie de M, par rapport à l'axe de rotation,

$$P-\Sigma(\mu\rho_0 U)=\gamma_0 \{ K+\Sigma(\mu\rho_0^2) \} \text{ d'où}$$

$$(\Omega) \ldots . \gamma_0=\frac{P-\Sigma(\mu\rho_0 U)}{K+\Sigma(\mu\rho_0^2)}$$

1215. Les corps μ ayant été supposés se mouvoir, avant le choc, dans des sens contraires à celui du plan matériel M, doivent rester sur ce plan après le choc. La vîtesse absolue de chacun de ces corps μ, dans le sens perpendiculaire au plan matériel M, a, pour valeur, à l'instant où le choc est effectué, $\rho_0\gamma_0$; ensuite V étant la composante, parallèle au même plan, de sa vîtesse à l'instant où le choc va s'effectuer, et ϕ_0 l'angle que forme la direction de cette vîtesse avec l'axe des ρ, $V\cos.\phi_0$ et $V\sin.\phi_0$ seront, respectivement, les vîtesses, parallèle et perpendiculaire à cet axe, qui auront lieu immédiatement après le choc : la composante $V\cos.\phi_0$ se conservera sans altération s'il ne survient pas de changement brusque dans le mouvement des corps μ et si ces corps ne sont sollicités ni par la pesanteur ni par aucune autre puissance extérieure; il n'en sera pas de même de la composante $V\sin.\phi_0$, la seule force centrifuge, qui varie avec la distance dun corps μ à l'axe de rotation, devant produire en elle des changements instantanés. Ainsi chaque corps μ décrira, sur le plan matériel M, une courbe dont ϕ sera l'angle *de projection* initial, à compter de l'instant où le choc vient de s'effectuer, par rapport à une parallèle à l'axe des ρ. La détermination de cette courbe, et, en général, celle des phénomènes des mouvements du corps M et des corps μ, dépendent de la théorie exposée depuis l'article 1202 : je ne m'y arrêterai pas ayant donné, sur cette matière, tout ce qui est nécessaire pour les premières études, et je me bornerai à la conséquence suivante déduite de l'équation (Ω) de l'article précédent et qui peut être utile dans les arts.

1216. Je suppose que le choc du plan matériel M s'exerce sur un seul

1217. Supposons que la masse entière du plan matériel M soit réunie au point, où ce plan rencontre et choque le corps μ, ce qui revient à considérer cette masse comme un point matériel tenant à un plan, dont la densité est infiniment petite ou nulle, et sur lequel se trouve un axe de rotation fixe. Dans ce cas les corps M et μ se choquant à la distance ρ_0 de l'axe fixe, on a $K = M\rho_0^2$ et l'équation (Ω) de l'article 1214 devient, en y remplaçant P par sa valeur AK, ou $AM\rho_0^2$, $\vartheta_0 = \frac{AM\rho_0 \pm \mu U}{(M+\mu)\rho_0}$ et la quantité de mouvement, communiquée à μ, a pour valeur

$$(\Omega'') \ldots \mu\rho_0\vartheta_0 = \frac{AM\rho_0 \pm \mu U}{M+\mu}\mu.$$

cette équation est la même que celle qu'on aurait dans le cas de deux corps durs et libres qui seraient animés, avant le choc, des vîtesses $A\rho_0$ et $\pm U$. Si A, M, μ et U sont des quantités données, l'équilibre a lieu lorsque μ se meut dans un sens contraire à celui du mouvement de M et qu'on a $\rho_0 = \frac{\mu U}{AM}$; si μ est en repos avant le choc, sa quantité de mouvement $\frac{AM\mu\rho_0}{M+\mu}$, après le choc, sera proportionnelle à ρ_0.

1218. Le plan matériel M étant supposé, comme ci-dessus, tourner autour d'un axe fixe, situé dans ce plan, désignons, par m, un de ses éléments de masse, par x et z les distances respectives de m à l'axe de rotation et à un autre axe coupant le premier à angle droit et passant par le centre de gravité de M, par a, la distance de ce centre de gravité de M, à l'axe de rotation, ou axe des z, et par ϑ la vîtesse angulaire; la quantité de mouvement de m sera ϑxm, et toutes les quantités de mouvement pareilles, dans l'étendue de M, auront une résultante $= \Sigma(\vartheta xm)$, ou ϑaM, dont la direction, perpendiculaire au plan M, le rencontrera à une distance $\frac{\Sigma(\vartheta x^2 m)}{\vartheta aM}$, ou $a + \frac{k^2}{a}$, de l'axe de rotation, ou axe des z, (k^2 représente la quantité par laquelle il faut multiplier M pour avoir le moment d'inertie de cette masse M par rapport à un axe parallèle à l'axe de rotation et passant par le centre de gravité) et à

que je prendrai pour l'origine du temps, le corps μ est posé au haut de la courbe, en C, et abandonné à la pesanteur; il descend, alors, le long de la courbe CNA et exerce, par son mouvement, une pression sur cette courbe qui détermine le plan matériel dont je représente la masse par P, à se mouvoir sur la ligne AX et dans le sens AX. Les vîtesses initiales de μ et P étant supposées nulles, le corps μ est continuellement en contact avec le corps P, et le premier corps en décrivant, sur le second, la courbe CNA, décrit, dans l'espace, en vertu du mouvement du système, une courbe $CN'R$.

On peut, au plan matériel, substituer un corps dont ce plan serait une section verticale, passant par son centre de gravité, la courbe CNA étant une rainure, ou un canal dans lequel le corps μ serait introduit; tout ce qui va suivre s'applique indistinctement à cette hypothèse et à la précédente.

Soient, au bout du temps t, $A'B'E'C'N'A'$ la section du corps $ABECNA$, ou du corps P, et N' la position du corps μ sur ce corps P. Abaissant, du point C, la verticale CD, je mène par le point N' l'horizontale $NN'N''$, la tangente Tt à la courbe $A'N'C'$, la normale OO' à la même courbe, et je fais

L'espace parcouru pendant le temps t, par le corps P $= AA' = NN' =$ x

La descente verticale du corps μ, pendant le temps t, $= CN'' =$ ζ

L'espace horizontal parcouru, pendant le temps t, par le même corps $= N'N'' =$ .... ξ

L'ordonnée horizontale de la courbe CNA dans sa position initiale $= N''N =$ .... ξ'

L'arc de courbe parcouru, par le corps μ, sur le corps $P = CN' =$ s

L'angle tTX formé par l'élément de courbe sur lequel le corps μ se trouve au bout du temps t, et par l'horizon $=$ ... ϕ

La pression normale exercée par le corps μ sur le corps P... Π

La force accélératrice due à la pesanteur. .... g

Je cherche, d'abord, les expressions des forces motrices qui ont lieu, tant dans le corps μ que dans le corps P, et je commence par celles qui dérivent du mouvement particulier de μ sur P. La vîtesse effective de μ, en N', sur la courbe $CN'A'$, est égale à $\frac{ds}{dt}$; ainsi on a,

Composantes de $g\mu$ dans le sens $\begin{cases} N'T \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{g\mu}{\sin.\phi} \\ N'N'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{g\mu\cos.\phi}{\sin.\phi} \end{cases}$

3°. La composante, parallèle à AX, de la pression Π du corps μ, contre le corps P, ... $\Pi\sin.\phi$

La composante de cette pression, perpendiculaire à AX, est détruite par la résistance du plan immobile AX.

1220. On a ainsi, pour le corps μ, deux groupes de forces, tant effectives qu'imprimées, un de ces groupes étant composé de forces dont les directions sont sur la tangente Tt, l'autre de forces parallèles à AX, et, pour le corps P, un seul groupe de forces parallèles à AX. Le principe général du mouvement fournira ainsi trois équations; savoir, deux pour le corps μ, et une pour le corps P, résultantes de l'égalité à zéro de chacun des groupes de forces dont je viens de parler, égalité qu'on formera en prenant, soit les forces effectives soit les forces imprimées, avec des signes contraires à ceux que comportent leur sens d'action. Ces trois équations sont les suivantes,

$$(1)\ldots\ldots \frac{\mu dds}{dt^2} + \frac{\mu ds d\phi}{dt^2} \cdot \frac{\cos.\phi}{\sin.\phi} - \frac{g\mu - \Pi\cos.\phi}{\sin.\phi} = 0$$

$$(2)\ldots\ldots \frac{\mu ddx_{,}}{dt^2} + \frac{\mu ds d\phi}{dt^2} \cdot \frac{1}{\sin.\phi} - \frac{g\mu\cos.\phi - \Pi}{\sin.\phi} = 0$$

$$(3)\ldots\ldots \frac{Pddx}{dt^2} - \Pi\sin.\phi = 0$$

Je multiplie (2) par P, (3) par μ, et retranchant le deuxième produit du premier, $\frac{ddx}{dt^2}$ se trouve éliminé, et j'ai, en multipliant par sin. ϕ,

$$\frac{P\mu ds d\phi}{dt^2} - P\mu g\cos.\phi + P\Pi + \Pi\mu\sin.^2\phi = 0$$

d'où je tire

$$(4)\ldots\ldots \Pi = \frac{P\mu\left(g\cos.\phi - \frac{ds d\phi}{dt^2}\right)}{P + \mu\sin.^2\phi}$$

$$(10)\ldots\left\{\begin{aligned}\frac{ds}{dt}&=\sqrt{\frac{2g(P+\mu)\zeta}{P+\mu[F(\zeta)]^2}}\\ dt&=\frac{d\zeta\sqrt{P[f(\zeta)]^2+\mu}}{\sqrt{2g(P+\mu)\zeta}}\end{aligned}\right.$$

Les intégrations à faire pour déterminer le mouvement de μ dans le sens de la courbe CNA, et dans le sens vertical, se trouvent ramenées aux quadratures. Il s'agit maintenant de déterminer le mouvement horizontal de P. Pour cela je multiplie l'équation (1) par cos. ϕ et retranchant le produit de (2), j'ai

$$\frac{\mu ddx}{dt^2}-\frac{\mu dds\cos.\phi}{dt^2}+\frac{\mu ds d\phi \sin.\phi}{dt^2}+\Pi\sin.\phi=0$$

substituant, pour $\Pi\sin.\phi$, sa valeur $\frac{Pddx}{dt^2}$, déduite de l'équation (3), intégrant et multipliant par dt, j'ai

$$(11)\ldots(P+\mu)dx-\mu ds\cos.\phi=0$$ { La constante est nulle, les vîtesses $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{ds}{dt}$ ayant été supposées nulles au premier instant du mouvement

Substituant, dans cette dernière équation, pour ds, sa valeur donnée par l'équation (8), on a,

$$(P+\mu)dx=\mu\cos.\phi\,.\,dt\sqrt{\frac{2g(P+\mu)\zeta}{P+\mu\sin.^2\phi}}$$

d'où

$$(12)\ldots\frac{dx}{dt}=\mu\cos.\phi\sqrt{\left\{\frac{2g\zeta}{(P+\mu)(P+\mu\sin.^2\phi)}\right\}}$$

on a, ainsi, la vîtesse de P à un instant quelconque, la relation, entre ζ et ϕ, étant donnée lorsqu'on connaît la courbe CNA.

Si on substitue, dans l'équation précédente, pour dt, sa valeur donnée par l'équation (9) on aura

$$dx=\frac{\mu ds\cos.\phi}{P+\mu}.$$

J'observe que $ds\cos.\phi=d\xi'$ d'où $\int ds\cos.\phi=\xi'$ et

$$(13)\ldots x=\frac{\mu\xi'}{P+\mu}\left\{\begin{array}{l}\text{La constante est nulle parce qu'on a, en même}\\ \text{temps, } x=0 \text{ et } \xi'=0.\end{array}\right.$$

On a, par l'équation de la courbe CNA, ξ' en fonction de ζ, et, par la deuxième équation (10), ζ en fontion de t, on aura donc l'espace x, parcouru par le corps P, au bout d'un temps quelconque.

1221. La trajectoire, décrite dans l'espace par le corps μ, se déduit bien simplement de l'équation (13) de l'article précédent. Retranchant μx de l'un et l'autre membre de cette équation, après avoir multiplié chaque membre par $P+\mu$, et faisant attention que $x+\xi=\xi'$, ou $\xi'-x=\xi$, il vient

$$Px=\mu\xi$$

Fig. 15. d'où .... $\mu:P::x:\xi::NN':N'N''$

chaque point N' de la trajectoire de μ, dans l'espace, partage l'horizontale NN'' en deux parties NN' et $N'N''$ qui sont, entre elles, dans le rapport des masses μ et P, les points N étant pris sur la courbe CNA dans sa position initiale.

1222. Le mouvement du centre de gravité, du système des deux corps P et μ, a une propriété que je ne dois pas omettre, parce qu'elle fournit un exemple de l'application de la théorie démontrée, art. 1114 et suivants. La pesanteur est la seule force agissant sur le système qui ne dépende pas des actions réciproques des corps de ce système; ainsi, d'après les articles cités, le centre de gravité ne peut avoir qu'un mouvement vertical, et c'est ce qui est parfaitement vérifié par les formules précédentes; en effet appelant B la distance du point de départ C, du corps μ, à la verticale passant par l'origine des x, et E la distance, à la même verticale, du centre de gravité de P,

[redacted]

mouvement; le centre de gravité se meut donc, constamment dans la même verticale, ainsi qu'on peut le conclure de la théorie ci-dessus citée.

1223. Dans le cas où le corps P serait immobile, ce qui revient à supposer la masse P infinie, l'équation (8), de l'article 1220, donne $\frac{ds}{dt}=\sqrt{2g\zeta}$, d'où on conclut les propriétés du mouvement sur une courbe fixe, démontrées dans la deuxième section de cette deuxième partie du cours.

1224. Si la ligne, parcourue par le corps μ sur le corps P, est une ligne droite, l'angle ϕ sera constant, on aura $\zeta=s\ \sin.\phi$, $ds=\frac{d\zeta}{\sin.\phi}$ et en faisant

$$a=\sin.\phi\sqrt{\frac{2g(P+\mu)}{P+\mu\sin.^2\phi}}$$

l'équation (8) de l'art. 1220 aura pour intégrale

$$(1)\ldots\ldots t=\frac{2\zeta^{\frac{1}{2}}}{a}\left\{\begin{array}{l}\text{On a en même temps } t=0 \text{ et } \zeta=0\text{, ainsi la}\\ \text{constante est nulle.}\end{array}\right.$$

d'où on tire $\zeta=\frac{1}{4}a^2t^2$; substituant cette valeur dans l'équation (12) du même article 1220, et faisant

$$b=a\mu\cos.\phi\sqrt{\frac{g}{2(P+\mu)(P+\mu\sin.^2\phi)}}=\frac{g\mu\sin.\phi\cos.\phi}{P+\mu\sin.^2\phi}$$

cette équation (12) a, pour intégrale,

$$(2)\ldots\ldots x=\tfrac{1}{2}bt^2$$

l'équation (4), de l'article cité, devient, en observant que $\phi=$*constante* donne $d\phi=0$,

$$(3)\ldots\ldots \Pi=\frac{P\mu}{P+\mu\sin.^2\phi}\cdot g\cos.\phi$$

enfin, d'après ce qui a été démontré, art. 1220 et 1221, la ligne parcourue, dans l'espace, par le corps μ, est une droite partant du point C et coupant la ligne AD en un point qu'on détermine, en cherchant, par l'équation (13) de l'art. 1220, la valeur de x correspondante à $\xi'=AD=B$, qui est $x=\frac{\mu B}{P+\mu}$; faisant $CD=H$, on a, pour l'équation de la trajectoire rectiligne de μ, dans l'espace

minées à celles qui entrent dans la valeur de dt, ci-dessus rapportée,

$$\zeta = H - z\,,\ d\zeta = -dz\,;\ d\xi' = -dy$$
$$ds^2 = d\sigma^2 = dy^2 + dz^2$$

et la valeur de dt prend la forme

$$(a) \ldots . dt = \sqrt{\frac{P\,d\sigma^2 + \mu\,dz^2}{2g(P+\mu)(H-z)}} = \sqrt{\frac{P\,dy^2 + (P+\mu)\,dz^2}{2g((P+\mu)(H-z)}}$$

si après avoir substitué, pour dy, sa valeur, en fonction de z et dz, donnée par l'équation de la courbe CAC', on intègre cette équation de manière que l'intégrale s'évanouisse lorsque $z = H$, on aura le temps de la descente de C en N; faisant, ensuite, dans l'intégrale, $z = 0$, on aura le temps total d'une demi-oscillation, ou de la descente de C en A.

1226. Ainsi l'équation de la courbe CAC' étant donnée, on aura toujours les moyens de calculer la durée de la descente depuis un point déterminé C jusqu'au point A le plus abaissé; mais on peut faire, de la courbe CAC', l'inconnue du problème, et chercher à la déterminer d'après des conditions qu'on s'imposerait; ces conditions sont, en général, susceptibles d'être énoncées par une équation de la forme $dt = \Theta\, Q\, dz$, Θ étant constante et Q une fonction de [illegible] l'équation de la courbe cherchée est $\Theta^2 Q^2 dz^2 - \frac{P\,dy^2 + (P+\mu)\,dz^2}{2g(P+\mu)(H-z)} = 0$

ou

$$(6) \ldots . dz = \frac{dy}{\left\{\frac{P+\mu}{P}\left[2g\,\Theta^2 Q^2 (H-z) - 1\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

On doit avoir une équation de condition, entre les constantes, pour exprimer que la tangente de la courbe, au point A, est horizontale, ou qu'on a les valeurs simultanées $z = 0, y = 0$ et $\frac{dz}{dy} = 0$; conditions avec lesquelles la forme de la fonction Q doit être compatible. L'équation (6) pourrait, d'ailleurs, donner lieu à plusieurs autres observations que je supprime pour abréger, me bornant à l'appliquer à un cas particulier, digne de remarque, celui dans lequel on aurait $Q = \frac{-1}{\sqrt{z(H-z)}}$; faisant, pour la commodité du calcul, $\Theta = \sqrt{\frac{C}{2g}}$, on a . .

Pour connaître la courbe décrite, dans l'espace, par le corps μ, on retranchera, de ξ' chacun des membres de l'équation (13), art. 1220, et faisant attention que $\xi'-x=\xi$, on aura en faisant $AD=B$

$$\xi=\frac{P}{P+\mu}\xi'=\frac{P}{P+\mu}(B-y),\text{ d'où } d\xi=-\frac{P}{P+\mu}dy;$$

si au lieu de compter les abcisses de la trajectoire décrite dans l'espace, à compter de la verticale CD, on les compte à partir de la verticale AF, et qu'on les désigne par η, on aura $\eta=B-\xi$, $d\xi=-d\eta$ Fig. 16.

et $d\eta=\frac{P}{P+\mu}dy$, ou, en substituant, pour dy, sa valeur ci-dessus,

$$d\eta=\frac{P}{P+\mu}\cdot dz\sqrt{\frac{P+\mu}{P}\left(\frac{C-z}{z}\right)}=dz\sqrt{\frac{P}{P+\mu}\left(\frac{C-z}{z}\right)}$$

la trajectoire, décrite dans l'espace, est une cycloïde racourcie, dont les ordonnées horizontales sont, à celles de la cycloïde ordinaire, engendrée par un cercle dont le diamètre $=C$, dans le rapport de $\sqrt{P}$ à $\sqrt{P+\mu}$; les ordonnées horizontales, de cette dernière courbe, sont moyennes proportionnelles géométriques entre celles de la courbe décrite sur le corps P, et celles de la courbe décrite dans l'espace; il est bien entendu qu'il s'agit ici des rapports des ordonnées horizontales prises à une même hauteur au-dessus de AD, et comptées, pour chacune des trois cycloïdes, à partir de son axe vertical particulier, ou de la verticale passant par son sommet.

Chocs de plusieurs corps sphériques par un seul, le corps choquant et les corps choqués étant ou parfaitement durs, ou doués d'un degré quelconque d'élasticité.

1226. Après avoir donné quelques exemples de la détermination des phénomènes de mouvement des systêmes de forme variable, lorsque ces systêmes ne sont pas libres, ou que leurs mouvements sont assujettis à certaines conditions indépendantes des actions des forces, je passe aux systêmes entièrement libres, et je vais traiter, d'abord, le cas de plusieurs corps doués d'un degré quelconque d'élasticité, en supposant que l'un de ces corps choque tous les autres ensemble.

Je désigne par m', m'', m''', etc. les masses des corps choqués, et, par μ, la masse de celui qui les frappe tous au même instant.

$$WM = \{[\mu U + \Sigma(m\omega \cos. a)]^2 + [\Sigma(m\omega \sin. a)]^2\}^{\frac{1}{2}}$$

soit AD' la direction de cette résultante, qui est aussi celle du mouvement du centre de gravité, je nomme A l'angle $D'AD$ qu'elle forme avec la direction de U, et j'ai

$$(1) \ldots \sin. A = \frac{\Sigma(m\omega \sin. A)}{WM}; \cos. A = \frac{\mu U + \Sigma(m\omega \cos. a)}{WM}$$

Je puis, au moyen de ces équations, considérer la ligne de direction AD', de W, comme une ligne, ou axe, donné de position dans le plan des centres des sphères, et prenant, d'abord, le système à l'instant où les phénomènes du choc n'ont encore eu lieu qu'à la manière des corps durs, je fais, pour cet instant,

La vîtesse du corps choquant μ, que je suppose dirigée suivant $AR' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ v

L'angle $D'AR'$ formé par cette direction et par celle de la résultante générale $WM = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ Ω

L'angle NAD', formé par la direction de la vîtesse u de l'un quelconque des corps choqués et par la direction de la résultante générale $WM = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ϕ

D'après le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité, les actions réciproques qui viennent de s'exercer entre les corps ne changent rien, soit en quantité soit en direction, à la vîtesse du centre de gravité; ainsi cette vîtesse est toujours égale à la somme des quantités de mouvement qui ont lieu suivant AD', divisée par la somme des masses, la somme des quantités de mouvement qui ont lieu perpendiculairement à AD' devant être égale à zéro, ce qui fournit les deux équations

$$(2) \ldots\ldots \begin{cases} WM - \mu v \cos. \Omega - \Sigma(mu \cos. \phi) = 0 \\ \mu v \sin. \Omega - \Sigma(mu \sin. \phi) = 0 \end{cases}$$

Ces mêmes équations se déduiraient aisément du principe général du mouvement; il faut maintenant en avoir une pour chacun des corps choqués, et on l'obtient, en considérant qu'à l'instant où les phénomènes du choc n'ont encore eu lieu qu'à la manière des corps durs, la vîtesse relative de μ et de l'un quelconque des corps m, doit être nulle, et qu'ainsi la composante de v, prise suivant la direction de u, est égale à u, ce qui donne l'équation générale $u = v \cos. (\Omega + \phi)$, ou

en conservant u, sous le signe, on peut mettre les deux premières équations (6) sous la forme

$$(7)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\mu U\cos.\alpha=\mu v+\Sigma\{(u-\omega)m\cos.\varepsilon\}\\ \mu U\sin.\alpha=\ldots.\ \Sigma\{(u-\omega)m\sin.\varepsilon\}\end{array}\right.$$

Supposons maintenant, que chacun des corps m soit doué d'une élasticité ayant, avec l'élasticité parfaite, le rapport de $n:1$ (*voyez* l'article 747). Dans ce cas, la compression de m, produite par le choc, étant due à la quantité de mouvement $(u-\omega)m$, une partie $n(u-\omega)m$ de cette quantité de mouvement est, par l'effet de l'élasticité, gagnée par m; au moyen de quoi, lorsque le choc est consommé, chacun des corps m a acquis, outre la vîtesse u, ou la quantité de mouvement um, une quantité de mouvement $n(u-\omega)m$. Sa quantité de mouvement totale est donc

$$um+n(u-\omega)m=m\{(1+n)u-n\omega\};$$

et sa vîtesse $=(1+n)u-n\omega$, expression qui, en substituant, à u, l'une des valeurs $v\cos.(\Omega+\phi)$ ou $v\cos.\varepsilon$, devient

$$v(1+n)\cos.(\Omega+\phi)-n\omega,\ \text{ou},\ v(1+n)\cos.\varepsilon-n\omega.$$

Les quantités v et Ω sont données par les formules (5), de l'article précédent, et on a $\alpha=\Omega-A$, $\varepsilon=\Omega+\phi=a+\alpha$; les angles a sont tous donnés par l'état initial du système; les angles ϕ sont donnés par cet état initial et par la position connue de la ligne de direction AD' de WM.

La quantité de mouvement $n(u-\omega)m$, gagnée, par chaque corps m, dans une direction qui fait un angle ε avec celle de v, sera perdue, dans la même direction, par le corps μ, ce qui changera la vîtesse v en une vîtesse w que je suppose dirigée suivant la ligne Ak faisant, avec AR', un angle $=\theta$, et on aura les équations suivantes,

$$(8)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\mu w\cos.\theta=\mu v-n\Sigma\{(u-\omega)m\cos.\varepsilon\}.\\ \mu w\sin.\theta=\ldots..n\Sigma\{(u-\omega)m\sin.\varepsilon\}\end{array}\right.$$

Substituant, dans ces équations, les valeurs de $\Sigma\{(u-\omega)m\cos.\varepsilon\}$ et de $\Sigma\{(u-\omega)m\sin.\varepsilon\}$, tirées des équations (7), on a

$$(9)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}w\cos.\theta=(n+1)v-nU\cos.\alpha\\ w\sin.\theta=nU\sin.\alpha\end{array}\right.$$

d'où on déduit ultérieurement

La vîtesse relative, avant le choc, était $U\cos.a-\omega$, elle a changé de signe et s'est diminuée dans le rapport de $1:n$.

1230. La somme des forces vives après le choc a, pour valeur,

$$\mu w^2+\Sigma\{m[(1+n)v\cos.\varepsilon-n\omega]^2\}$$

ou, en développant la quantité qui est sous le signe Σ

$$(\delta)\ldots\mu w^2+(1+n)v\{v(1+n)\Sigma(m\cos.^2\varepsilon)-2n\Sigma(m\omega\cos.\varepsilon)\}+n^2\Sigma(m\omega^2)$$

Dans le cas de l'élasticité parfaite, qui donne $n=1$, cette expression devient

$$\mu w^2+4v\{v\Sigma(m\cos.^2\varepsilon)-\Sigma(m\omega\cos.\varepsilon)\}+\Sigma(m\omega^2)$$

on tire, de la première équation, (6), de l'art. 1227 $v\Sigma(m\cos^2\varepsilon)-\Sigma(m\omega\cos.\varepsilon)=\mu(U\cos.a-v)$; substituant cette valeur et celle de μw^2, donnée par la première équation (9) de l'article cité et dans laquelle on fera $n=1$, on aura, toutes réductions faites, l'expression

$$\mu U^2+\Sigma(m\omega^2)$$

Ainsi, dans le cas de l'élasticité parfaite, les forces vives sont conservées.

1231. Faisant $n=0$, dans l'expression (δ) de l'article précédent, on a le cas de la parfaite dureté, et cette expression devient

$$\gamma\ldots\ldots\mu w^2+v^2\Sigma(m\cos.^2\varepsilon)$$

la condition de $n=0$, donne évidemment $w=0$, et l'expression (γ) devient, en y introduisant cette valeur,

$$v^2\{\mu+\Sigma(m\cos.^2\varepsilon)\}$$

la perte de force vive est, dans ce cas,

$$\mu(U^2-v^2)-v^2\Sigma(m\cos.^2\varepsilon)$$

ou,

$$\mu(U^2-v^2)-\Sigma(mu^2)$$

Si dans l'expression (γ) on substitue, pour $v\Sigma(m\cos.^2\varepsilon)$, sa valeur, tirée de la 3e équation (6) de l'art. 1227 qui est $\mu(U\cos.a-v)+\Sigma(m\omega\cos.\varepsilon)$ et celle de $\mu w^2=\mu v^2$, donnée par la condition $n=0$, cette expression deviendra, toutes réductions faites,

$$v\{\mu U\cos.a+\Sigma(m\omega\cos.\varepsilon)\}$$

et se réduira à $\mu v U\cos.a$ lorsque les vîtesses initiales ω seront nulles.

Choc de deux corps, durs ou élastiques, et de formes quelconques.

1232. Deux corps, de formes quelconques, étant supposés avoir, dans l'espace, des mouvements tels qu'ils doivent se rencontrer et se choquer, je représente par M et M', les masses de ces corps. Consi-

Composante de la vîtesse absolue de la molécule dM, avant le choc, prise parallèlement à l'axe des

$$\left.\begin{cases} x_{,} \ldots\ldots ve+mz_{,}-ny_{,} \\ y_{,} \ldots\ldots vf+nx_{,}-lz_{,} \\ z_{,} \ldots\ldots vg+ly_{,}-mx_{,} \end{cases}\right\} \ldots\ldots (1)$$

A l'instant où toutes ces valeurs ont lieu, le choc s'effectue, et il se fait un changement brusque dans l'état de mouvement de toutes les molécules du corps; les corps M et M' étant, d'abord, considérés comme parfaitement durs, et, de plus, leur contact, au moment du choc, étant supposé avoir lieu sur un point unique de chacune de leurs surfaces, le corps M exerce, en ce point, sur le corps M', une percussion mesurée par le produit PU d'une certaine masse P par une vîtesse U, produit que je représente par N, la même lettre devant représenter la réaction, que le corps M' exerce sur M; cette action et cette réaction sont dirigées, du dehors au dedans de chacun des corps, perpendiculairement au plan tangent commun mené par leur point de contact.

Je puis maintenant considérer cette quantité de mouvement inconnue $P.U$, ou N, comme due à une cause motrice quelconque, en supposant toujours qu'elle est imprimée au corps M, normalement à sa surface, au point où le choc a lieu; la même hypothèse pourra se faire sur le corps M', au moyen de quoi on aura, par le principe général du mouvement, des équations d'équilibre séparées, lesquelles contiendront, pour chacun des corps, la quantité commune N, équations qu'il s'agit de trouver.

Soient à l'instant où le choc est effectué, u la vîtesse du centre de gravité, γ' la vîtesse angulaire, autour du nouvel axe instantané de rotation, et p, q et r les produits de γ' par les cosinus respectifs des angles que cet axe fait avec les $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$; ρ, σ, τ, les cosinus des angles respectifs, formés par la direction de u et par les $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$; ξ, η, ζ les coordonnées, respectivement parallèles aux $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$, du point de contact, et enfin a, b, c, les cosinus des angles respectifs que la direction de N fait avec les $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$.

On aura, immédiatement après le choc, les expressions suivantes des composantes, parallèles aux axes coordonnés, de la vîtesse d'une molécule quelconque, ou élément de masse dM, expressions qui se déduisent des mêmes considérations que les formules (1) ci-dessus,

Ces intégrales doivent être prises dans l'étendue entière de la masse du corps, à l'instant où le choc est effectué; $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$ sont les variables, N, v, u, ξ, η, ζ et toutes les quantités angulaires doivent être regardées comme constantes. Les propriétés du centre de gravité donnent lieu à quelques réductions, et, de plus, la figure, la grandeur et l'état physique du corps étant connus on peut simplifier considérablement l'analyse en prenant pour axe des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ les axes principaux qui se coupent au centre de gravité; on a, soit par les propriétés de ce centre, soit par celles des axes principaux,

$$\int x_{,} dM = 0; \int y_{,} dM = 0; \int z_{,} dM = 0$$
$$\int x_{,} y_{,} dM = 0; \int x_{,} z_{,} dM = 0; \int y_{,} z_{,} dM = 0$$

faisant, ensuite, comme à l'art. 1154,

$$\int dM(x_{,}^2 + y_{,}^2) = C; \int dM(x_{,}^2 + z_{,}^2) = B; \int dM(z_{,}^2 + y_{,}^2) = A$$

les équations (1) deviennent, en y introduisant ces diverses valeurs, et faisant attention que $\int dM = M$

$$(2)\ldots \left\{\begin{array}{l} Na + M(ve - u\rho) = 0 \\ Nb + M(vf - u\sigma) = 0 \\ Nc + M(vg - u\tau) = 0 \\ N(\eta a - \xi b) + C(r - n) = 0 \\ N(\xi c - \zeta a) + B(q - m) = 0 \\ N(\zeta b - \eta c) + A(p - l) = 0 \end{array}\right\}$$

On aura pour le corps M' des équations absolument de même forme, ainsi les six équations ci-à côté doivent être considérées comme en représentant douze.

En appliquant, au corps M', les mêmes raisonnements qui ont conduit aux équations (1) et (2), on parviendra à des équations, absolument de même forme, entre la quantité commune N et les quantités correspondantes à a, b, c, v, u, etc.; ainsi il suffira, quant à ce corps M', de copier les équations précédentes avec la seule attention d'indiquer que les lettres, autres que la lettre N, n'ont pas les mêmes valeurs numériques, ce qui pourra se faire en accentuant celles qui n'ont pas d'accents, et en supprimant l'accent de celles qui en ont; ainsi les six inconnues p, q, r, $u\rho$, $u\sigma$, $u\tau$, relatives au mouvement de M, seront, quand il s'agira du mouvement de M', désignées par p', q', r', $u'\rho'$, $u'\sigma'$, $u'\tau'$

On peut, d'après cette convention, considérer les six équations (2) comme en représentant douze; mais le problème, ayant treize inconnues, savoir,

$$p, q, r, p', q', r', u\rho, u\sigma, u\tau, u'\rho', u'\sigma', u'\tau', \text{ et } N$$

avec cette équation et les douze précédentes, représentées par (2), on pourra calculer chacune des treize inconnues,

$p, q, r, p', q', r', u\rho, u\sigma, u\tau, u'\rho', u'\sigma', u'\tau'$ et N,

qui ne sont qu'au premier degré dans ces diverses équations. Quand on aura calculé les inconnues $u\rho$, $u\sigma$, $u\tau$, en faisant

$$u^2\rho^2 + u^2\sigma^2 + u^2\tau^2 = Q,$$

et observant que $\rho^2 + \sigma^2 + \tau^2 = 1$; on aura $u = \sqrt{Q}$, et les valeurs particulières de ρ, σ et τ se trouveront égales aux quantités connues

$$\frac{u\rho}{\sqrt{Q}}, \frac{u\sigma}{\sqrt{Q}}, \frac{u\tau}{\sqrt{Q}}.$$

Pareillement l'expression $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ donnera la vîtesse angulaire après le choc, et en représentant cette expression par W, $\frac{p}{W}$, $\frac{q}{W}$, $\frac{r}{W}$, seront, respectivement, les cosinus des angles formés par l'axe instantané de rotation et par les $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$.

Les mêmes observations s'appliquent aux quantités $u'\rho'$, $u'\sigma_{,}$, $u'\tau'$, p', q', r'; ainsi on aura, pour chacun des deux corps, les valeurs séparées de la vîtesse du centre de gravité, des angles que la direction de cette vîtesse et celle de l'axe instantané de rotation font avec les $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, et enfin de la vîtesse angulaire autour de cet axe.

1234. Le cas de l'élasticité se déduit aisément de ce qui précède; les phénomènes, dus à cette propriété des corps, ont lieu immédiatement après l'instant où le choc s'est opéré à la manière des corps durs, et je suppose que les changements dans l'état de mouvement de M et M', depuis le moment où ils sont en contact jusqu'à celui où l'élasticité a complétement produit son effet, se font pendant un temps qu'on peut regarder comme infiniment petit. D'après cela, l'élasticité de M et M' étant à l'élasticité parfaite dans le rapport de n à 1, lorsqu'en vertu de la percussion normale N, qui s'est exercée au point de contact, les éléments de surface de M et M', qui se touchent à ce point, ayant acquis des vîtesses égales, n'exerceront plus d'action l'un sur l'autre, l'effet de l'élasticité sera, conformément aux explications détaillées que j'ai données sur cette matière, de reproduire sur chaque corps, à leurs points de contact, une action normale nN dirigée du dehors au

valeur dans les équations précédentes, qui ne contiendront, alors, que les douze inconnues wR, wS, wT, λ, μ, ν; $w'R'$, $w'S'$, $w'T'$, λ', μ', ν'; ces douze inconnues étant calculées, on aura les valeurs séparées de w, R, S, T, Ω, j, h, k, et de leurs correspondantes accentuées, par le procédé expliqué à la fin de l'article précédent; on obtiendra donc, dans le cas de l'élasticité d'un degré quelconque, comme dans celui de la dureté parfaite, les vîtesses des centres de gravité, les directions de ces vîtesses, les positions des axes instantanés de rotation et les vîtesses angulaires autour de ces axes.

1235. Les cas particuliers qu'on aura à traiter fourniront ordinainairement quelques moyens de simplification, mais voici, à cet égard, des considérations générales que je ne dois pas omettre. Menons, par le point de contact, deux axes, perpendiculaires entre eux, tracés sur le plan, tangent aux deux corps, qui passe par ce point, et décomposons chacune des vîtesses initiales v et v', en trois autres, dont deux soient parallèles aux axes dont je viens de parler, et la troisième, perpendiculaire au plan qui renferme ces axes; désignons ces composantes, par χ, ψ, ω, pour le corps M, par χ', ψ', ω', pour le corps M'; la vîtesse du centre de gravité, du système des deux corps, sera, art. 1114, et suivants, tant avant qu'après le choc, égale à

$$(1)\ldots\frac{1}{M+M'}\{(M\chi+M'\chi')^2+(M\psi+M'\psi')^2+(M\omega+M'\omega')^2\}^{\frac{1}{2}}$$

et on aura les expressions suivantes des cosinus des angles formés par la direction de son mouvement et par les axes auxquels χ, ψ, et ω sont parallèles.

$$(2)\ldots\ldots\frac{M\chi+M'\chi'}{M+M'};\ \frac{M\psi+M'\psi'}{M+M'};\ \frac{M\omega+M'\omega'}{M+M'}.$$

J'observe maintenant que l'invariabilité des valeurs (1) et (2) doit aussi exister, en particulier, pour chacune des quantités de mouvement $M\chi$, $M\psi$, $M'\chi'$, $M'\psi'$, puisque ces quantités de mouvement ont lieu dans des plans perpendiculaires aux directions tant de la percussion N, que des réactions nN; cette percussion et ces réactions n'ont donc d'effet que sur les quantités de mouvement $M\omega$, $M'\omega'$ perpendiculaires au plan tangent, et cet effet consiste à diminuer l'une de la même quantité dont l'autre est augmentée, condition nécessaire pour que le centre

Une corde, ou un fil tendu, considérée comme une ligne droite matérielle, a ses points extrêmes immobiles; cette corde, ou ce fil, extensible et élastique, dans le sens de sa longueur, mais, d'ailleurs parfaitement flexible résiste, en vertu de son élasticité, aux forces qui tendent à le courber. La tension à laquelle cette résistance est due peut être obtenue par divers procédés; on sait que l'usage ordinaire, pour les instruments de musique, est d'employer des chevilles un peu coniques, qui entrent, à frottement, dans des trous de même forme, et autour desquelles, les cordes sont enroulées, par un de leurs bouts, l'autre bout tenant à un point fixe; les chevilles, plus ou moins tournées, donnent aux cordes différents degrés de tension. Mais ce moyen, ou tout autre dont on voudrait se servir, équivaut toujours à l'effet d'un poids, suspendu à chaque corde, en substituant, à l'arrêt, qui tient, un de ses points, fixe, une poulie, infiniment petite, sur laquelle ce point serait soutenu, et donnant, si on veut, des positions horizontales, à l'axe de la poulie, et à la partie de la corde comprise entre cette poulie et celui de ses points qui demeure fixe.

Ce fil a pris, à un instant, et par des causes quelconques, une certaine forme, et en vertu tant des vîtesses dont ses différents points

---

fois, dans le volume de 1747, des Mémoires de l'académie de Berlin, et qui a intégré d'autres équations en différences partielles, dans ses écrits sur la cause des vents et sur la résistance des fluides. Il a, ainsi, la priorité quant à ce qui concerne les applications de ce genre d'équations aux sciences physico-mathématiques, mais la gloire de l'invention du calcul intégral aux différences partielles appartient à Léonard Euler; ce grand géomètre avait intégré en 1734 l'équation du premier ordre de la forme $\left(\frac{dz}{dy}\right)=zf(y)+\left(\frac{dz}{dx}\right)\phi(x,y)$, ($f$ et ϕ) étant des signes de fonctions; y représente un paramètre, constant pour une courbe déterminée, et variable d'une courbe à l'autre, x et z étant les coordonnés rectangulaires. (Voyez son mémoire, qui a pour titre, *Methodus inveniendi equationes pro infinitis curvis ejusdem generis*. Mémoires de l'académie de Pétersbourg, année 1734 et 1735). Il a ensuite traité fort en détail la théorie des équations aux différences partielles, dans le troisième volume de son calcul intégral, qui est le premier ouvrage où ce calcul soit présenté de manière à pouvoir être classé parmi les méthodes analytiques.

contigus, on peut poser l'équation de son mouvement comme s'il était libre; mais avant de lui appliquer le principe général, il faut faire attention que, d'après les conditions qu'on s'est imposées sur l'étendue des oscillations et d'après la petitesse de l'angle ϕ qui en résulte, la longueur d'un arc quelconque de la courbe ne diffère de celle de la portion de l'axe des abcisses, à laquelle elle correspond, que d'une quantité négligeable par rapport à l'une et à l'autre longueur, et il suit de là que le mouvement de l'élément de masse dm a continuellement lieu, soit dans un sens soit dans l'autre, suivant une même perpendiculaire à l'axe des x, sur laquelle se trouve la coordonnée y de cet élément de masse.

Ces préliminaires posés, la force motrice imprimée, et celle qui a lieu, sont, respectivement, $\tau d\phi$ et $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) dm$, dt étant constant; ces deux forces motrices ont leurs directions sur une même ligne droite, et comme tang. $\phi = \phi = \frac{dy}{dx}$, d'où $d\phi = \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) dx$, ($dx$ est supposée constante) l'expression de la première se change en $\tau dx \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. Cette dernière force est accélératrice ou retardatrice dans différentes circonstances qui dépendent et du sens du mouvement de l'élément de masse dm, et de la position du centre de courbure de l'élément de courbe sur lequel dm est posé, centre qui peut être ou du côté de l'axe des x, ou du côté opposé, par rapport à la courbe; établissant les signes des quantités, dans chaque cas, relativement à ces circonstances et à la condition de prendre positivement les vîtesses qui tendent à augmenter les y positives, on a, d'aprés le principe général, entre la force motrice imprimée et celle qui a lieu la relation d'égalité

$$\tau dx \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) dm, \text{ d'où}$$

$$(1) \ldots\ldots \frac{\tau dx}{dm} \cdot \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$$

Cette équation est applicable à toutes les hypothèses qu'on peut faire sur les variations des masses dm, d'un point à l'autre de la courbe; si on suppose que la somme des masses élémentaires dm, étendues sur

les masses P et p étant proportionnelles à leurs poids, $\frac{P}{p}$ exprime le rapport entre le poids capable d'opérer la tension actuelle de la corde, et le poids de cette corde.

1239. Les élèves feront attention que le coefficient différentiel $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ se rapporte exclusivement aux espaces parcourus, par un même point de la courbe, sur la perpendiculaire à l'axe des x qui passe par ce point, c'est-à-dire, aux variations de longueurs de y correspondantes aux valeurs t, $t+dt$, $t+2dt$, du temps, pour une même valeur de x, et que le coefficient différentiel $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ se rapporte aux variations de longueurs des coordonnées y, correspondantes aux abcisses x, $x+dx$, $x+2dx$, pour une même valeur de t; ainsi l'équations (a) est aux différences partielles du deuxième ordre, et je vais intégrer cette équation en n'employant que des considérations familières à tous ceux qui connaissent les simples éléments du calcul différentiel et intégral.

D'après le mode de variation de y, fixé par l'état de la question, on doit avoir $y = fonction\ (x, t)$ et, par conséquent,

$$(1) \ldots\ldots dy = p\,dx + q\,dt$$

p et q étant des fonctions de x et t. Soient

$$(2) \ldots\ldots \begin{cases} dp = r\,dx + s\,dt \\ dq = r'dx + s'dt \end{cases}$$

r, s, r' et s' étant aussi des fonctions de x et t, on aura, par le théorême connu, $r' = s$, d'où $dq = s\,dx + s'dt$; le coefficient $s' = \left(\frac{dq}{dt}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, et la deuxième équation (2) se change en

$$dq = s\,dx + \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) dt$$

l'équation (a), de l'article précédent, donne, en observant que

$$r = \left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=b^2\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)=b^2r,$$

et les deux équations (2) deviennent

$$(4)\ldots\ldots\begin{cases} dp=rdx+sdt \\ dq=sdx+b^2rdt \end{cases}$$

J'ajoute la première de ces équations à la deuxième, et je l'en retranche, successivement, après l'avoir multipliée par b, ce qui me donne

$$(5)\ldots\ldots\ldots\begin{cases} dq+bdp=(br+s)(bdt+dx) \\ dq-bdp=(br-s)(bdt-dx) \end{cases}$$

Les différentielles dp et dq étant, équations (1) et (2), des différentielle exactes, les deuxièmes membres de ces équations (5) doivent être aussi des différentielles exactes, et, par conséquent, on a, Γ et Ξ étant des signes de fonction,

$$br+s=\Gamma(bt+x)$$
$$br-s=\Xi(bt-x)$$

Les équations (5) deviennent, en y substituant ces valeurs et intégrant

$$(6)\ldots\begin{cases} q+bp=\int\{(bdt+dx)\Gamma(bt+x)\}=\psi(bt+x) \\ q-bp=\int\{(bdt-dx)\Xi(bt-x)\}=\chi(bt-x) \end{cases}$$

ψ et χ étant des signes de fonctions.

Les valeurs séparées de p et q, déduites de ces équations, sont

$$(7)\ldots\ldots\begin{cases} p=\frac{1}{2b}\{\psi(bt+x)-\chi(bt-x)\} \\ q=\frac{1}{2}\{\psi(bt+x)+\chi(bt-x)\} \end{cases}$$

et ces valeurs, introduites dans l'équation (1), la changent en

$$dy=\frac{1}{2b}\{(bdt+dx)\psi(bt+x)+(bdt-dx)\chi(bt-x)\}$$

équation séparée, de laquelle on déduit, par l'intégration,

$$(6)\ldots.y=\frac{1}{2b}\{f(bt+x)+F(bt-x)\}$$

f et F étant des signes de fonctions.

1240. On peut s'assurer, par la différentiation, que cette équation satisfait à l'équation (a) de l'article 1238; différentiant, d'abord, par rapport à x, on a

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{2b}\{f'(bt+x)-F'(bt-x)\}$$

$$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)=\frac{1}{2b}\{f''(bt+x)+F''(bt-x)\}$$

ensuite la différentiation, par rapport à t, donne

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{2}\{f'(bt+x)+F'(bt-x)\}$$

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\frac{b}{2}\{f''(bt+x)+F''(bt-x)\}$$

et comparant ensemble les valeurs de $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ et $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ on a

$$b\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)=\frac{1}{b}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right), \text{ d'où}$$

$$b^2\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)=\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$$

qui est la proposée. On serait parvenu au même résultat en supprimant le facteur $\frac{1}{2b}$ de l'équation (δ), et on satisferait encore à la proposée en substituant $F(x-bt)$ à $F(bt-x)$, ainsi l'une quelconque des deux équations

$$(\delta')\ldots\ldots\begin{cases} y=f(bt+x)+F(bt-x) \\ y=f(x+bt)+F(x-bt)\end{cases}$$

est tout aussi bien l'intégrale de la proposée que l'équation (δ), et, en général, toute équation finie, qui, satisfaisant à une équation en différences partielles de l'ordre n, renferme un nombre n de fonctions arbitraires, doit être regardée comme l'intégrale complète de cette équation en différences partielles. L'analyse de l'article précédent aurait conduit à la 2e. des équations (δ'), si, pour avoir la 2e. équation (5) de cet article, on eut retranché la 2e. (4) de la 1re. (4), celle-ci étant multipliée par b, au lieu de faire l'opération inverse.

Propriétés et construction de l'équation qui donne le mouvement de la corde vibrante.

1241. L'analyse, exposée dans le chapitre précédent, nous a conduits à l'équation

pour ordonnées, soit $f(\xi)$ soit $F(\xi)$, et ayant construit un arc de cette courbe correspondant à une longueur $2a$ de l'axe des abcisses, le surplus de la courbe se composera d'arcs semblables et égaux à celui-là, mis à la suite les uns des autres; je vais appliquer cette propriété à la construction de l'équation (1) établie d'après les données du problême.

1242. Il s'agit de trouver, pour une valeur déterminée de x, les valeurs de la coordonnée y, déduites de l'équation

$$y=f(bt+x)+F(bt-x)\dots\dots\dots\dots(1)$$

et correspondantes aux différentes valeurs de t, ou, réciproquement, pour une valeur déterminée de t, les coordonnées des différents points de la courbe suivant lesquelles la corde est pliée à l'instant qui termine le temps donné t.

Je suppose, d'abord, pour plus de généralité, qu'à l'instant où le temps t commence, les différents points de la corde ont des vîtesses finies et connues, lesquelles avec la figure de cette corde, au même instant, constituent les données initiales du problême.

Or, à un instant quelconque du mouvement, la vîtesse du point dont les coordonnées sont x et y a, pour valeur, d'après l'équation (1) de l'article précédent,

$$b\{f'(bt+x)+F'(bt-x)\}$$

et désignant, par U, la vîtesse dont le point, correspondant à l'abcisse x, est animé à l'instant où $t=0$, on a,

$$U=b\{f'(x)+F'(-x)\}$$

équation qui, multipliée par dx et intégrée, donne

$$\int(U\,dx)+bC=b\{f(x)-F(-x)\}$$

l'équation (1) donne, à ce même instant où $t=0$,

$$Y=f(x)+F(-x)\quad\{\ Y \text{ est la valeur de } y \text{ lorsque } t=0.$$

ou, comme on peut, d'après ce qui a été dit ci-dessus, substituer f à F en changeant le signe extérieur de la fonction,

$$\int(U\,dx)+bC=b\{f(x)+f(-x)\}$$
$$Y=f(x)-f(-x)$$

on déduit de ces équations

la figure, mais posé de manière que les lignes $A_{,}A$ et $B_{,}B$ soient à angles droits sur les lignes $A_{,}B_{,}$ et AB et je construis, sur cet axe, une courbe $A_{,}M_{,}S$ dont une ordonnée quelconque $P_{,}M_{,}$, située sur le prolongement de PV, ait pour valeur

$$P_{,}M_{,}=\tfrac{1}{2}(PW+PM)=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\int(U\,dx)}{b}+Y\right\}=f(x)$$

Prenant, ensuite, sur le prolongement de $B_{,}A_{,}$, $A_{,}b_{,}=A_{,}B_{,}$, je construis, sur cet axe prolongé, la courbe $A_{,}\mu_{,}s$ telle qu'en prenant une abcisse $A_{,}\pi_{,}=A_{,}P_{,}$ l'ordonnée $\pi_{,}\mu_{,}$ correspondante, ait, pour valeur,

$$\pi_{,}\mu_{,}=\tfrac{1}{2}(PW-PM)=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\int(U\,dx)}{b}-Y\right\}=f(-x)$$

cette dernière courbe coupe son axe au point $H_{,}$, où on a $A_{,}H_{,}$ (n°. 2) $=Ah$ (n°. 1) $=$ l'abcisse correspondante à l'intersection H, où la différence entre PW et PM, c'est-à-dire, entre $\frac{\int(U\,dx)}{b}$ et Y devient nulle.

De plus les ordonnées extrêmes, $B_{,}S$ et $b_{,}s_{,}$ (n°. 2) sont de même signe, égales entre elles et à l'ordonnée extrême BU, (n°. 1), vu qu'au point B, PM où Y est nulle et que la valeur BU de PW, ou de $\frac{\int U\,dx}{b}$, à ce point, est la valeur commune des ordonnées extrêmes $B_{,}S$ et $b_{,}s$.

On a ainsi un arc de courbe $s\mu_{,}A_{,}M_{,}S$ tel qu'en prenant l'origine des x en $A_{,}$, comptant les x positives dans le sens $A_{,}B_{,}$ et les x négatives, dans le sens $A_{,}b_{,}$ une ordonnée quelconque de cet arc de courbe a pour valeur générale $f(x)$, expression dans laquelle x peut être positive ou négative; or cet arc de courbe étant construit sur une longueur $b_{,}B_{,}$ de l'axe des abcisses, on peut, d'après la propriété $f(x+2a)=f(x)$, démontrée dans l'article précédent, le continuer indéfiniment par les répétitions successives de l'arc $s\mu_{,}A_{,}M_{,}S$ à la droite de $SB_{,}$ et de l'arc $SM_{,}A_{,}\mu_{,}s$ à la gauche de $sb_{,}$.

Rien n'est plus plus aisé, maintenant, que de construire l'équation $y=f(bt+x)-f(bt-x)$, car il suffit de substituer, dans les expressions $f(x)$ et $f(-x)$, où on peut donner à x des valeurs

truira ainsi la portion de courbe $A\mu b$, qui n'est autre chose que la courbe AMB mise au-dessous de l'axe dans une position inverse, correspondante à une longueur d'axe $Ab = AB$, après quoi on répétera indéfiniment $b\mu AMB$, qui embrasse une longueur $2a$ de de l'axe bB, à droite de B, et $BMA\mu b$, à gauche de b.

Une opération semblable se fera sur la courbe AVB, car on a $S(Udx) = b\{f(x) + f(-x)\}$, d'où $U = b\{f'(x) - f'(-x)\}$; la valeur de $f(Udx)$, devient, en y rendant x négative

$$S(Udx) = -b\{f(x) + f(-x)\} \text{ d'où}$$

$U = -b\{f'(x) - f'(-x\}$, expression de U correspondante à un abcisse x négative; les ordonnées U correspondantes à des abcisses égales, portées de part et d'autre du point A, sont donc égales entre elles, mais situées de différents côtés par rapport à l'axe bB; et la continuation de la courbe supérieure sera, du côté de b, la courbe inférieure $AV_{,}b$; semblable et égale à AVB, mais mise dans une situation inverse. La courbe $bV_{,}AVB$ embrassant une longueur $2a$ de l'axe des abcisses x, se continuera indéfiniment par les répliques de $bV_{,}AVB$ à la droite de B, et par celles de $BVAV_{,}b$ à la gauche de b, la propriété $f(\xi + 2a) = f(\xi)$, donnée par la première équation (3) de l'article (1241), s'étendant à toutes les *dérivées* de cette équation dont la dérivée de l'ordre (n) est $f^{(n)}(\xi + 2a) = f^{(n)}(\xi)$.

1245. Voilà donc une construction très-simple, établie sur toutes les donnécs du problême, et qui se rapporte à un état initial quelconque du fil ou de la corde. L'hypothèse des vîtesses des différents points de cette corde, correspondantes à la valeur $t = 0$, a eu, pour principal objet, de donner à la solution toute la généralité possible; on déduit, en peu de mots, de cette solution, la construction, dans le cas où la corde infléchie, et abandonnée à elle-même, part de l'état de repos à l'instant où on compte $t = 0$.

En appliquant, à ce cas, la règle générale énoncée par l'équation (2) de l'article précédent, on voit que la modification à faire, à cette règle, pour l'objet particulier dont il s'agit ici, consiste dans la suppression du terme relatif à l'aire $p'P'Ll$ de la courbe des vîtesses initiales, et dès-lors les opérations sont extrêmement abrégées; les courbes AWU, AVB n'existent plus et tout est donné par la figure initiale de la corde. Fig. 18, n°. 3.

Soit $A_{,,}M_{,,}B_{,,}$ cette figure initiale, $A_{,,}$ et $B_{,,}$ étant les points fixes; on répétera d'abord la courbe $A_{,,}M_{,,}B_{,,}$ au-dessous de l'axe $A_{,,}B_{,,}$,

signes contraires, donc la courbe initiale se confondra au bout du temps $\frac{a}{2b}$

avec la droite $A_{\prime\prime}B_{\prime\prime}$, et c'est, d'après ce qui précède, la moitié du temps $\frac{a}{b}$

qu'elle emploie pour prendre la forme de la courbe $A_{\prime\prime}nB_{\prime\prime}$ égale et semblable à la courbe primitive $A_{\prime\prime}M_{\prime\prime}B_{\prime\prime}$.

Les constructions précédentes pourroient aisément se rapporter aux surfaces courbes, en considérant le temps t comme une des coordonnées de la surface, qui aurait pour équation

$$y=f(bt+x)-f(bt-x);$$

les élèves qui voudront connaître ce qui a été fait, relativement à ce mode de construction, pourront voir le mémoire d'Arbogast, sur *la nature des fonctions arbitraires*, couronné à l'académie de Pétersbourg, en 1790, et le mémoire de Monge, publié dans le 15[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*

Conséquences déduites de la théorie précédente. Divers détails relatifs à la corde sonore.

1247. La théorie et les formules, précédemment démontrées, se concilient avec tous les faits connus, et peuvent être employés soit pour soumettre au calcul, soit pour expliquer les principaux phénomènes du mouvement des cordes sonores, mais avant qu'on en eut enrichi l'analyse et la mécanique, on possédait, pour l'usage de la physique et des arts, des règles de calcul absolument identiques avec celles qui se déduiraient de cette théorie et de ces formules. Cette identité tient à l'indépendance qui existe entre la courbure de la corde et la durée de ses vibrations, durée qui est donnée, exclusivement, par la longueur, la densité et la tension de cette corde; et cette indépendance est une conséquence des conditions du problème, comme on le verra bientôt.

Sauveur, membre de l'Académie des Sciences de Paris, qui fleurissait à la fin du XV[e] siècle, paraît être le premier qui ait jeté un grand jour sur la théorie physico-mathématique du son; il a déterminé, par des procédés fort ingénieux, le nombre absolu de pulsations que donnent un tuyau d'orgue et une corde sonore, dans des circonstances déter-

minées (*Voyez* les Mémoires de l'Académie des Sciences, années 1700 et 1713).

1248. Parent mourut en 1716, et Taylor publia, en 1717, son livre intitulé *Methodus incrementorum directa et inversa*, où il donna une solution du problême de la corde vibrante beaucoup plus générale que les solutions connues jusqu'alors, mais n'offrant, cependant, qu'un cas particulier de celle que nous devons à Dalembert. Daniel Bernouilli adopta et enrichit l'analyse de Taylor, et l'équation suivante comprend leur solution dans le sens le plus étendu,

$$(1)\ldots y = A\sin.\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi b t}{a} + B\sin.\frac{2\pi x}{a}\cos.\frac{2\pi b t}{a} + C\sin.\frac{3\pi x}{a}\cos.\frac{3\pi b t}{a} + \text{etc.}$$

$A, B, C,$ etc. étant des coefficients constants, π la demi-circonférence dont le rayon $=1$, a et b ayant la même signification que ci-dessus.

Cette équation donne la courbure de la corde au bout du temps t, et en y faisant $t=0$ (on suppose, d'ailleurs, que, lorsque $t=0$, les vîtesses des différents points de la corde sont naissantes) on a l'équation suivante de la courbe initiale.

$$(2)\ldots y = A\sin.\frac{\pi x}{a} + B\sin.\frac{2\pi x}{a} + C\sin.\frac{3\pi x}{a} + \text{etc.}$$

L'équation (1) satisfait très-bien aux conditions établies dans le chapitre précédent; si, pour une valeur déterminée quelconque, de t, vous construisez un arc de cette courbe qui s'étende depuis l'abcisse $x=(n+o)a$ jusqu'à l'abcisse $x=(n+2)a$, ce même arc se répétera dans les intervalles de $x=(n+2)a$ à $x=(n+4)a$, de $x=(n+4)a$ à $x=(n+6)a$ etc. n est un nombre, entier ou fractionnaire, et, en supposant $n=1$, chacun des arcs, semblables et égaux, commencera et se terminera sur l'axe même des x, qu'il coupera entre ses deux points extrêmes, de manière que cet axe sera rencontré par la courbe totale aux points correspondants à $x=0$, $x=a$, $x=2a$, $x=3a$, etc.

L'équation (2) est celle de la courbe initiale, qui doit couper l'axe aux points ci-dessus indiqués, parmi lesquels points se trouvent les points fixes des extrémités de la corde; on peut se donner entre ces points fixes, un nombre arbitraire d'autres points, et déterminer les

coëficients A, B, C, etc., de manière que la courbe initiale passe par ces points donnés et adapter, ainsi, l'équation (2) à une infinité de figures initiales.

1249. Dans l'hypothèse de $B=0$, $C=0$, etc. les équations (1) et (2) de l'article précédent deviennent

$$\text{lorsque } t=0 \ldots\ldots y=A\sin.\frac{\pi x}{a}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pour une valeur quelconque}\\ \text{de } t\end{array}\right\}\ldots\ldots y=A\sin.\frac{\pi x}{a}\cos.\frac{\pi b t}{a}$$

et donnent, particulièrement, la solution de Taylor, la courbure assignée à la corde étant celle d'une trochoïde prolongée indéfiniment.

1250. J'ai dit, précédemment, que l'équation de Bernouilli pouvait satisfaire à des variétés infinies de figures initiales, mais, comme cette équation se rapporte à une forme particulière de fonction, elle n'a pas toute la généralité des solutions de Dalembert et d'Euler, qui, non seulement embrassent une infinité de formes différentes, de fonctions analytiques, mais satisfont encore à une infinité de cas dans lesquels la courbure initiale de la corde ne serait soumise à aucune loi mathématique. La seule restriction à cette dernière propriété tient à la condition des oscillations infiniment petites et des angles, de même ordre, formés par l'axe et par chaque élément de la courbe. Encore cette restriction n'est-elle applicable qu'à la question particulière de la corde vibrante, car elle n'existe plus, si on considère l'équation $b^2\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)=\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ et son intégrale $y=f(bt+x)+F(bt-x)$, indépendamment de toute application à la mécanique ou à la physique; pour s'en convaincre, il suffit de faire attention qu'en prenant x et t pour les deux coordonnées d'une surface courbe, dont y serait la troisième coordonnée, la surface $y=f(bt+x)+F(bt-x)$ peut se construire par la combinaison de deux surfaces cylindriques, à bases quelconques, dont les équations particulières seraient $\eta=f(bt+x)$ et $\eta'=F(bt-x)$; or, on sait que chacune de ces dernières équations n'énonçant autre chose sinon qu'un certain système de lignes, dans l'espace, est composé de droites parallèles entre elles, laisse entièrement arbitraire la forme de la section de ce système, par un plan perpendiculaire aux droites qui le composent. C'est

un cas analogue à celui de l'équation $z = f(x^2 + y^2)$, laquelle énonce, uniquement, que toutes les sections d'une surface faites perpendiculairement à un axe rectiligne de position donnée, sont des sections circulaires, en laissant arbitraire la forme de la section, par un plan qui renfermerait tous les centres de ces sections circulaires; cette dernière équation est celle des surfaces de révolution.

1251. Daniel Bernouilly a eu, au sujet de sa solution, d'assez longues discussions avec Euler et Dalembert, et ceux-ci ont aussi disputé l'un contre l'autre sur quelques points; d'autres géomètres, du premier ordre, se sont occupés des mêmes questions, et tous ces débats ont jeté de grandes lumières sur les propriétés des intégrales des équations en différences partielles, et sur l'interprétation des fonctions arbitraires qui entrent dans ces intégrales; on a bien prouvé que ces fonctions pouvaient être *continues*, *discontinnes*, et même, avec certaines restrictions, *discontiguës*; Monge a rendu ces vérités manifestes par la considération des surfaces courbes.

1252. En mettant l'équation de la corde vibrante sous la forme

$$y = f\left\{b\left(t + \frac{x}{b}\right)\right\} - f\left\{b\left(t - \frac{x}{b}\right)\right\}$$

et se rappelant que y reprend les mêmes valeurs et le même signe, lorsque les quantités qui sont sous le signe f, varient de $2a$, soit en plus soit en moins, si on substitue à t, $t + \frac{2a}{b}$, on aura encore une valeur du même y, correspondante à la même abcisse x

$$y = f\left\{b\left(t + \frac{2a}{b} + \frac{x}{b}\right)\right\} - f\left\{b\left(t + \frac{2a}{b} - \frac{x}{b}\right)\right\}$$

et, comme cette identité a lieu quel que soit t, si on fait $\tau = \frac{a}{b}$, 2τ sera la durée constante des périodes successives pendant lesquelles s'opèrent tous les changements possibles de forme de la corde vibrante, laquelle reprend toujours, à la fin de la période, la même forme qu'elle avait au commencement; ainsi, voilà un isochronisme qui a lieu quel que soit l'état de mouvement ou de repos de la corde, au commencement de la première période, et il est bien important de remarquer que la durée constante de chaque période est absolument indépendante

de la courbure de la corde. Voilà pourquoi le problême de la détermination de cette durée était résolu, ainsi que je l'ai dit, art. 1247, avant que les géomètres fussent parvenus à la solution générale du problême de la corde vibrante.

Si la corde part de l'état de repos, on voit clairement, d'après ce qui a été dit, art. 1245 et 1246, que le mouvement, pendant chaque période qui comprend l'allée et le retour, se composera de deux vibrations de même durée, exécutées dans des sens opposés, chacune étant de $\frac{a}{b}$ unités de temps; et dans le cas indiqué à la fin de l'art. 1246, la durée de la période se soudivise en quatre parties égales, la corde se confondant avec la droite, menée entre ses points fixes, aux instants qui terminent la première et la troisième sous-division.

1253. La durée d'une oscillation d'un pendule simple, dont la longueur $= \lambda$, a pour valeur, art. 956, $\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$, π étant la demi-circonférence qui a l'unité pour rayon, et g la force accélératrice due à la pesanteur terrestre. Si on égale cette valeur à $\frac{a}{b}$, en se rappelant que $b=\sqrt{ag\frac{P}{p}}$, on aura

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ldots\ldots \tau=\sqrt{\dfrac{ap}{gP}}\\[2ex](2)\ldots\ldots \lambda=\dfrac{ap}{\pi^2 P}\end{array}\right\}\ \text{On a, à la latitude de Paris,}\ g=9,^{\text{metres}}8088$$

telle est la longueur du pendule synchrone aux oscillations de la corde; mais le calcul seul peut la donner, car la construction d'un pareil pendule serait impraticable; le maximum de la valeur de λ, dans notre système musical, n'est que d'environ un millimètre. (Voyez l'article suivant et la note de l'article 1255).

1254. En désignant par Π, la pesanteur d'une unité de longueur de la corde, qui est toujours supposée homogène et uniformément grosse, et observant que $a\Pi=p$, la valeur $\tau=\sqrt{\frac{ap}{gP}}$ de la durée d'une vibration, devient

$$(1) \ldots\ldots\ldots \tau = a\sqrt{\frac{\Pi}{gP}}$$

π étant la demi-circonférence dont le rayon $=1$, k la pesanteur de la matière de la corde sous l'unité de volume, et r le rayon de cette corde, que je suppose cylindrique, on a $\Pi = \pi k r^2$, et

$$(2) \ldots\ldots\ldots \tau = ar\sqrt{\frac{\pi k}{gP}}$$

si n désigne le nombre de vibrations que fait la corde pendant l'unité de temps on aura $n = \frac{1''}{\tau}$, d'où

$$(3) \ldots n = \sqrt{\frac{gP}{ap}} \text{ et } \lambda = \frac{g}{n^2\pi^2}$$

Faisant $n = 32$, ce qui est, à-très-peu-près, le cas d'une corde donnant l'*unisson* du tuyau d'orgue le plus grave, (Voyez la note de l'art. suivant), on a $\lambda = 0,^{\text{metre}}00097$

le dénominateur $\sqrt{ap}$ pouvant être remplacé par l'une des expressions $a\sqrt{\Pi}$, ou $ar\sqrt{\pi k}$.

Ainsi la tension d'une corde, de matière et de grosseur donnée, restant la même, la durée de chaque vibration est proportionnelle à la longueur de cette corde; si la longueur est constante et que sa tension varie, la durée d'une de ses vibrations sera réciproquement proportionnelle à la racine quarrée du poids capable d'opérer la tension, qu'on est dans l'usage d'appeler le *poids tendant*; la longueur et le poids tendant restant les mêmes, τ est proportionnel à $\sqrt{\Pi}$, cette dernière quantité étant, parmi les cordes cylindriques de même matière, proportionnelle au rayon, et, en général, proportionnelle au produit du rayon, par la racine quarrée de la pesanteur spécifique.

1255. Ce qu'on appelle, en musique, *intervalle*, quand on considère les sons relativement à leurs degrés ou de *grave* ou d'*aigu*, dépend des rapports entre les nombres n, ou les nombres τ, donnés par les vibrations des cordes qui rendent ces sons; soient n et $n_{\prime}$, τ et $\tau_{\prime}$, les valeurs de ces nombres, pour deux cordes sonores, l'intervalle entre le son rendu par la corde à laquelle se rapportent $n_{\prime}$ et $\tau_{\prime}$, et le son rendu par l'autre corde, est appelé *unisson*, *tierce*, *quarte*, *quinte*, *octave*, etc., suivant que l'on a, respectivement,

$$\frac{n_{\prime}}{n} = 1;\ \frac{n_{\prime}}{n} = \frac{5}{4};\ \frac{n_{\prime}}{n} = \frac{4}{3};\ \frac{n_{\prime}}{n} = \frac{3}{2};\ \frac{n_{\prime}}{n} = 2; \text{ etc., ou}$$

$$\frac{\tau_{\prime}}{\tau}=1\,;\ \frac{\tau_{\prime}}{\tau}=\frac{4}{5}\,;\ \frac{\tau_{\prime}}{\tau}=\frac{3}{4}\,;\ \frac{\tau_{\prime}}{\tau}=\frac{2}{3}\,;\ \frac{\tau_{\prime}}{\tau}=\frac{1}{2}\,;\ \text{etc.}$$

Si les deux cordes dont je viens de parler sont de même métal, de même diamètre et ont une même tension, ou, plus simplement, si on emploie une même corde d'une tension constante, en faisant varier sa longueur, les rapports $\frac{\tau_{\prime}}{\tau}$, $\left(\text{inverses des rapports } \frac{n_{\prime}}{n}\right)$ se trouvent donnés par les rapports des longueurs, et l'effet produit sur une oreille, convenablement exercée, par les résonnances, ou simultanées ou successives, des sons auxquels appartiennent ces rapports, lui fait connaître les intervalles correspondants, sans qu'il soit besoin d'aucune mesure ni d'aucun calcul. Ainsi, lorsqu'un musicien juge, d'après la sensation qu'il éprouve, que deux sons forment un intervalle d'octave, on peut en conclure, immédiatement, que si on divise, par un arrêt ou un chevalet, la corde qui rend le plus grave des deux sons, en deux parties égales, chaque moitié donnera le plus aigu de ces mêmes sons, et ainsi des autres intervalles (*).

(*) Je vais entrer, sur cette matière, dans des détails qui pourront intéresser quelques lecteurs.

Il est assez ordinaire aux auteurs des Traités sur la Musique, qui veulent employer les expressions numériques des *intervalles*, de désigner ces intervalles soit par les rapports entre les longueurs des cordes (la matière de ces cordes, leurs diamètres et leurs tensions étant supposées les mêmes) soit par les rapports, inverses des précédents, entre les nombres de vibrations qui ont lieu pendant un même temps; mais cette manière d'exprimer les *intervalles* ne donne point leurs vraies valeurs, lesquelles sont représentées par les exposants des rapports entre les nombres des vibrations correspondants à un même temps, ou les logarithmes de ces rapports. Ainsi, par exemple, deux sons étant à la quinte l'un de l'autre, le rapport des vibrations est celui de $1 : \frac{3}{2}$, ou de $(\frac{3}{2})^0 : (\frac{3}{2})^1$; prenons un troisième son à la quinte du plus aigu, les rapports des vibrations des trois cordes seront $(\frac{3}{2})^0$, $(\frac{3}{2})^1$, $(\frac{3}{2})^2$, et, en général, pour une suite de sons à la quinte les uns des autres, on aurait la série

$$(\tfrac{3}{2})^0,\ (\tfrac{3}{2})^1,\ (\tfrac{3}{2})^2,\ (\tfrac{3}{2})^3,\ \text{etc.} \ldots\ldots (\tfrac{3}{2})^{(\omega)}$$

L'intervalle entre le premier son et le son qui correspond à l'exposant (ω), est évidemment égal à ω fois l'intervalle entre les deux premiers sons, l'un

Au moyen de cette formule, si on a plusieurs cordes de même métal et de même diamètre, dont les longueurs soient données et qui rendent des sons dont les *intervalles musicaux* soient, aussi, donnés, on pourra, du poids tendant P, d'une de ces cordes, déterminé par

---

position contre laquelle d'autres musiciens ont élevé des difficultés; mais l'usage que je fais ici de cette échelle est entièrement indépendant de tout parti qu'on pourrait prendre à cet égard.

Si, au lieu de prendre le $\frac{1}{12}$ d'octave, pour unité, on prenait l'octave entière, le systême de logarithme le plus commode pour représenter les sons, dans cette hypothèse, aurait 2 pour base; mais le premier systême et le premier choix d'unité dont j'ai parlé sont préférables.

J'ai dit, dans le texte, qu'un homme exercé pouvait conclure, du sentiment de l'oreille, les valeurs des rapports $\frac{n_{,}}{n}$, ou $\frac{\tau_{,}}{\tau}$; je dois ajouter que la facilité et la précision de ces évaluations varient, considérablement, suivant les différents intervalles des sons que l'on compare, et même deviennent impossibles, lorsque ces sons sortent, quant au grave et à l'aigu, de certaines limites audelà desquelles ils cessent d'être appréciables. On peut prendre pour limite, au grave, le son rendu par le tuyau d'orgue, à bouche, qui sonne l'*ut* à la quatrième octave au-dessous de l'*ut* de la clef; sa longueur est d'environ 10 mètres. Les facteurs et les organistes l'appellent le *32 pieds*. Le son qui forme la limite, à l'aigu est d'environ $8\frac{1}{2}$ octaves au-dessus du précédent; ainsi l'ut, *32 pieds*, donnant n pulsations dans un temps donné, l'ut le plus rapproché de la limite à l'aigu, en donne un nombre $n \times 2^8 = 256.n$.

Ces déterminations ne fournissant que des rapports, il serait curieux et même utile, pour l'art musical, d'avoir les nombres absolus de vibrations faites par les corps sonores dans des circonstances déterminées. *Sauveur* dont j'ai parlé à l'article 1247, s'étant occupé de cette question en 1700, et ayant employé un moyen fort ingénieux (*Voyez* le volume de 1700 de l'Académie Royale des Sciences de Paris) crut avoir trouvé que le tuyau d'orgue, *à bouche*, sonnant l'*ut* à la double octave au-dessous de l'*ut* de la *clef*, tuyau *ouvert* dont la longueur est d'environ $2^{m}, 6$, ou 8 pieds, donnait 61 pulsations par seconde. Treize ans après, des recherches sur le problême de la corde vibrante, dont il conclut des formules équivalentes à celles de l'article 1254, le conduisirent à des résultats qui donnaient, dans les mêmes circonstances, des nombres doubles de ceux qu'il avait trouvés d'abord; il chercha à expliquer ces différences, en disant que dans ses expériences sur les tuyaux, les *battements* observés n'avaient été sensibles à l'oreille, et par conséquent, comptés, que de

décembre 1810, un rapport intéressant et curieux, à cette compagnie savante, sur les nouveaux *piano* de l'invention de M. Schmidt, dans

---

ces diverses déterminations ont, entre elles, un accord aussi satisfaisant que la nature de ce genre de recherche peut le permettre; on en conclut que le son formant la limite, au grave, des sons musicalement appréciables, celui que fournit le tuyau d'orgue de 32 pieds, donne 31 vibrations par seconde, l'*ut*, qui se trouve vers l'autre limite, a 8 octaves au-dessus, donnant $31 \times 2^8 = 7936$ vibrations dans le même temps.

Il est aisé, d'après ce qui précède, de résoudre physiquement le problême du *son fixe*, son dont la détermination est fort importante en musique. On a proposé d'établir ce son de manière que les nombres de vibrations, donnés par les *ut* des différentes octaves, fussent compris dans la série des puissances de 2, et l'adoption de cette proposition n'occasionnerait pas de changement sensible dans le ton d'orchestre actuel, car, en prenant le nombre 32 pour celui des vibrations de l'ut à l'unisson du 32 pieds de l'orgue, on ne ferait que changer la série,

31, 62, 124, 248, etc.

en celle-ci,

32, 64, 128, 256, etc.

et le nombre 32, s'il n'est pas précisément le véritable, en diffère fort peu.

On pourrait opérer, immédiatement, sur la corde qui sonne l'*ut* répondant à 256, à l'octave grave, au-dessous de l'*ut* de la clef, ou sur celle qui sonne l'ut de la clef et fait 512 vibrations, par seconde; connaissant, exactement, le poids et la longueur de la partie de cette corde comprise entre ses points fixes, on calculerait, d'après la formule $P=\frac{apn^2}{g}$, la valeur P, du poids tendant, correspondante à $n=256$, ou à $n=512$; on mettrait, ensuite, à l'unisson de la corde ainsi tendue, une fourchette d'acier, pareille à celles que les musiciens désignent par le nom de *diapazons*, et on aurait le *son* cherché, qui ne serait sujet qu'aux très-légères variations dues aux changements de température.

Ayant pris une corde de fer du n°. 1, celle qu'on emploie ordinairement vers le milieu du clavier, je lui ai donné, entre les points fixes une longueur de 0,^{metre}5825; 3,^{m}.4 de longueur de cette corde, pesaient 5,^{grammes}385 ainsi le poids de 0,^{m}5825 était de 0,^{gramme}92259; calculant la valeur $P=\frac{0{,}5825 \times 0{,}92259 \times (512)^2}{9{,}8088}$, j'ai eu $P=14363$ grammes, et suspendant, à la corde, le poids de 143639 grammes, j'ai obtenu le son répondant à 512

et les calculs de M. Charles, un piano monté à deux cordes par touche, depuis le fa à la double octave au-dessous du fa de la clef, jusqu'à l'ut à triple octave au-dessus de l'ut de la clef (ce qui fait en tout cinq octaves et une quinte) supporte, par la tension des cordes, un effort de 1836 kilogrammes, ou 3672 livres, poids de marc; le même piano, monté à trois cordes, supporterait un effort de 2754 kilogrammes, ou 5508 livres, et il faut ajouter 120 kilogrammes, ou

---

auront, ici, pour valeurs réspectives, $mabb$ et $Mkbb$, d'où l'on conclura le nombre n des vibrations ou pulsations par seconde, en remplaçant p et P par ces dernières expressions, dans l'équatiou $n=\sqrt{\frac{gP}{ap}}$,

$$n=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{M}{m}gk}$$

λ étant la longueur du pendule qui bat les secondes, et π la demi-circonférence dont le rayon $=1$, on a $g=\lambda\pi^2$, et l'équation précédente devient

$$n=\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{M}{m}\lambda k}$$

on peut remarquer que la section transversale bb, du tuyau, a disparu de la valeur de n, et qu'ainsi le grave ou l'aigu du son rendu par ce tuyau ne dépend que de sa longueur, ce qui est conforme à l'expérience; mais ce son doit hausser ou baisser, sensiblement, lorsque l'atmosphère subit des changements qui font varier les valeurs de m et de k, et, en cela, l'expérience est encore d'accord avec la théorie.

On peut, dans l'état moyen de l'atmosphère, supposer $\frac{M}{m}=\frac{949777}{86,263}=11010$, ou $\sqrt{\frac{M}{m}}=104,93$ et $k=0,^{\text{mètre}}76$; on a, à la latitude de Paris, $g=9,^{\text{m.}}8088$ et on conclut de ces valeurs $\sqrt{\frac{M}{m}gk}=285,74$, d'ou $n=\frac{285,74}{a}$, et $a=\frac{285,74}{n}$;

si on suppose $n=30$, on aura $a=9,^{\text{metres}}525$ ou $29,^{\text{pieds}}4$, c'est la longueur du prisme d'air qu'il faut mettre en vibration, dans l'état moyen de l'atmosphère, pour obtenir le son le plus grave de l'échelle musicale.

fortement que les vibrations intermédiaires, donnent la sensation d'un son particulier, distinct des deux sons réellement produits par des moyens mécaniques.

1258. Un phénomène qui n'est point, comme le précédent, une illusion des sens, et qui tient aux lois générales des actions réciproques des corps, est le mouvement vibratoire que reçoivent, spontanément, des cordes, sur lesquelles on n'exerce aucune action visible, pour les faire vibrer, mais qui se trouvent dans le voisinage et sont montées au ton des harmoniques d'une corde sonore qu'on fait vibrer soit en la pinçant, soit en la choquant, soit en la frottant.

1259. Voici un autre fait analogue au précédent; si on partage, par un obstacle léger, la corde, en deux parties, dont l'une soit une fraction de la corde totale égale à un des termes de la série harmonique, ou, en général, si les deux parties sont exactement divisibles par une même longueur, laquelle divisée par la longueur totale, donne, nécessairement, un des termes de la série harmonique, et qu'on fasse vibrer une de ces deux parties, la vibration se communiquera, vu la légéreté de l'obstacle, à l'autre partie, et la corde entière se partagera, spontanément, en sous-divisions, égales, chacune, au plus grand diviseur commun, formant des *ventres*, séparés par des *nœuds*, ou points fixes, et le son résultant sera à l'unisson de celui qu'on obtiendrait, sous la même tension, avec une seule des sous-divisions ainsi formées. La découverte de ce phénomène remarquable est due à Sauveur. (*Voyez* les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, pour l'année 1700.)

M. Claladni parle, dans son traité d'acoustique, d'un résultat singulier, obtenu par M. Hellwag, qui ayant divisé une corde par un appui léger, a pu, dans certains cas, obtenir un son plus grave que celui de l'une et l'autre des deux divisions de la corde, (*Voyez* l'ouvrage cité, section 2, § 42).

1260. Tout ce qui précède est, exclusivement, relatif à la théorie des vibrations *transversales* d'un fil élastique dans le sens de sa longueur, parfaitement flexible, et tendu, soit par un poids, soit par une force équivalente à un poids; un fil, ou une verge, capable de faire la fonction d'un *ressort*, peut aussi produire des sons en vibrant *transversalement*, mais il n'est pas nécessaire que ses deux extrémités soient fixes; elles peuvent être toutes deux *libres*, ou l'une *fixe* et l'autre *libre*, ou,

la mettre en vibration; dès que cette plaque commence à vibrer, la poussière abandonne les portions de la surface totale qui sont en mouvement, et se range sur les axes d'équilibre dont elle rend ainsi la forme parfaitement visible. Voyez, pour plus de détails sur ces phénomènes, l'ouvrage de M. Chladni, intitulé *Traité d'acoustique;* et, pour la partie mathématique, un Mémoire de M. Poisson, inséré dans la collection de l'Institut, année 1812, IIe partie; je recommande, aussi, aux élèves qui voudront s'instruire, à fond, de la théorie du son, l'étude réfléchie des *Recherches sur la nature et la propagation du son,* de Lagrange, publiées dans les deux premiers volumes des Mémoires de l'Académie de Turin; et celle d'un beau Mémoire de M. Poisson, publiée dans le 14e cahier du Journal de l'École Polytechnique.

Équation du mouvement applicable à tout système de corps, quelles que soient sa forme et les conditions auxquelles il est assujetti.

1262. Après avoir déduit, des notions les plus élémentaires, dans la première partie de ce cours, les formules et les méthodes applicables à l'équilibre des différents systèmes de corps, nous nous sommes élevés, par des généralisations successives, jusqu'à un principe unique, celui des *vîtesses virtuelles,* d'où on pouvait faire découler, comme d'une source commune, tous les principes secondaires, ou toutes les propriétés dont nous nous étions servis pour résoudre les problèmes de Statique.

Nous pouvons obtenir le même avantage, dans la Dynamique, et il est aisé de prévoir que la formule, analogue à l'équation déduite du principe des virtuelles, à laquelle nous parviendrons, ne sera que l'énonciation la plus générale du principe qui a servi de base à l'analyse de toutes les questions, relatives au mouvement, traitées depuis l'art. 1035; et comme l'application de ce principe consiste à ramener les cas de mouvement à des cas d'équilibre, ce sera, ultérieurement, le principe des vîtesses virtuelles qui deviendra ce que l'on pourrait appeler un instrument universel, pour la solution de tous les problêmes de mécanique.

1263. Un corps, ou un système de corps, assujetti, quant à sa composition, à des conditions quelconques, étant sollicité par des forces de la nature de celles qui, assujetties à la loi de continuité, et jouissant,

trices, qui ont lieu, prises dans l'étendue entière du système, avec des sens d'action contraires à ceux suivant lesquels elles agissent, et les forces motrices imprimées, Pm, Qm, etc. prises également dans l'étendue entière du système; et, art. 501 et suivants, ces conditions sont susceptibles d'être exprimées par une équation unique, celle que donne le principe des vîtesses virtuelles.

Prenant, sur les directions des forces Pm, Qm, Rm, etc. des points déterminés, qui, à l'instant où on considère les actions de ces forces, soient à des distances respectives p, q, r, etc. de leur point commun d'application, ou de la molécule m, et supposant que leurs actions tendent à augmenter les distances p, q, r, etc. on aura, en ayant égard, quant à la notation, à l'observation de l'article 818, la somme des *moments* de ces forces (le mot *moment* étant pris avec la signification qui lui a été donnée, art. 457) égale à............ $(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.})\, m$, pour la molécule m, et à $\Sigma\,\{m\,(P\delta p + R\delta r + \text{etc.})\}$ pour tout le système. La somme des moments des composantes $\frac{ddx}{dt^2}m$, $\frac{ddy}{dt^2}m$, $\frac{ddz}{dt^2}m$, de la force motrice $\frac{dds}{dt^2}m$, qui a lieu, est $\left(\frac{ddx}{dt^2}\delta x + \frac{ddy}{dt^2}\delta y + \frac{ddz}{dt^2}\delta z\right)m$, en supposant que ces forces sont prises positivement lorsqu'elles tendent à augmenter les coordonnées x, y, z; cette somme des moments peut, article 476, remplacer, dans l'analyse, le moment de la force unique $\frac{dds}{dt^2}m$, et en prenant les forces imprimées dans un sens contraire à celui suivant lequel elles agissent, elle devient $-\left(\frac{ddx}{dt^2}\delta x + \frac{ddy}{dt^2}\delta y + \frac{ddz}{dt^2}\delta z\right)m$, pour la molécule m, et $-\Sigma\left\{m\left(\frac{ddx}{dt^2}\delta x + \frac{ddy}{dx^2}\delta y + \frac{ddz}{dt^2}\delta z\right)\right\}$ pour tout le système.

Ainsi les conditions de l'équilibre entre les forces motrices imprimées et celles qui ont lieu, conditions qui doivent exister en vertu du principe général du mouvement, étant énoncées d'après le principe des vîtesses virtuelles, donnent l'équation

$$\text{et } (1)\ldots\ldots \delta\rho = \frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z$$

valeur qui, adaptée, convenablement, aux différents cas particuliers, fournira le moyen d'introduire dans l'équation (A) de l'art. 1263, les moments des puissances que représente la résistance du milieu.

L'équation précédente est établie dans l'hypothèse de l'immobilité du milieu dans lequel se meuvent les corps du système; si ce milieu est lui-même en mouvement, sa résistance n'a d'effet qu'en vertu des vîtesses relatives; en désignant par $d\xi$, $d\eta$ et $d\zeta$, les espaces élémentaires respectifs qu'il parcourt parallèlement aux x, y et z pendant que le point dont je viens de parler décrit l'élément ds, ou $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ de sa trajectoire, et faisant

$$d\sigma = \sqrt{(dx-d\xi)^2+(dy-d\eta)^2+(dz-d\zeta)^2}$$

la valeur de $d\rho$, donnée ci-dessus, se changera en

$$(2)\ldots.\ \delta\rho = \frac{dx-d\xi}{d\sigma}\delta x + \frac{dy-d\eta}{d\sigma}\delta y + \frac{dz-d\zeta}{d\sigma}\delta z$$

1266. J'ai supposé que les actions des forces appliquées au système étaient soumises à la loi de continuité, mais si ces actions étaient telles qu'il en résultât des changements brusques dans l'état du système, il n'y aurait qu'à substituer, aux forces motrices imprimées, les quantités de mouvement imprimées, et, aux forces motrices qui ont lieu, les quantités de mouvement qui ont lieu; soient π, $\varkappa$, ρ, etc. les vîtesses finies imprimées à la molécule m, dans les directions des lignes p, q, r, etc., et χ, ψ, ω, les composantes, respectivement parallèles aux x, y et z, de l'augmentation ou de la diminution finie, de la vîtesse antérieure, qui en résultera pour cette molécule, eu égard tant aux impulsions π, $\varkappa$, ρ, etc., qu'à sa liaison avec les autres points matériels du système, l'équation (A), ci-dessus citée deviendra

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} \Sigma\,\{ m(\pi\delta p + \varkappa\delta q + \rho\delta r + \text{etc.})\} \\ -\Sigma\,\{ m(\chi\delta x + \psi\delta y + \omega\delta z)\} \end{array} \right. \ldots.(A')$$

Je vais maintenant déduire, de l'équation (A), les propriétés communes, sans exception, à tous les cas de mouvement des systêmes d'une nature quelconque, et les démonstrations les plus générales des

$\Sigma\{m(P\delta p + Q\delta q + \text{etc.})\}$ se détruiront, et il ne restera, sous le signe Σ, que les termes dûs aux actions des forces extérieures. Celles-ci étant, conformément aux lois les plus générales de la nature, supposées fonctions des distances de leurs points d'application à leurs centres d'action, qui sont des points fixes pris sur leurs directions, on peut, art. 824, les décomposer, chacune, en trois autres, parallèles aux x, y et z et dont les valeurs sont des fonctions des coordonnées x, y et z du point d'application; X, Y et Z étant les sommes respectives de ces composantes pour un des points du système, on a, art. 477,

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}$$

et ces valeurs introduites dans l'équation (A) de l'article 1263, la changent en

$$(B)\dots\left\{\begin{aligned} &\Sigma\left\{m\delta x\left(X-\frac{ddx}{dt^2}\right)\right\}\\ +&\Sigma\left\{m\delta y\left(Y-\frac{ddy}{dt^2}\right)\right\}\\ +&\Sigma\left\{m\delta z\left(Z-\frac{ddz}{dt^2}\right)\right\}\end{aligned}\right\}=0.$$

On conçoit aisément qu'il faut étendre, aux chocs qui s'exercent entre les corps du système, ce qui est dit, précédemment, sur leurs actions réciproques. Les termes introduits, par les chocs, dans l'équation (A') de l'art. 1266, doivent se détruire d'eux-mêmes, puisque l'égalité et les directions contraires de l'action et de la réaction, existent, entre deux corps qui se choquent, comme entre deux corps qui s'attirent ou se repoussent.

1269. Remplaçant, dans l'équation (B) de l'article précédent, δx, δy, δz par leurs valeurs données ci-dessus, on aura des termes multipliés par $\delta x_{,}$, $\delta y_{,}$, $\delta z_{,}$, dans lesquelles ces variations pourront être mises hors du signe Σ, puisqu'elles se rapportent à un point particulier du système, ou qu'elles n'énonçent, en général, que des variations de distances entre les plans coordonnés fixes, et les plans qui leur sont parallèles et qui passent par ce point particulier; de plus, ces variations $\delta x_{,}$, $\delta y_{,}$, $\delta z_{,}$, entièrement indépendantes les unes des autres, le sont aussi des variations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ qui se rapportent spécialement

équations équivalentes aux équations (3) de l'art. 1120, et par lesquelles toutes les circonstances du mouvement du centre de gravité se trouvent déterminées.

Si le système ne se meut qu'en vertu d'impulsions initiales, on fera $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, et intégrant on aura les équations de la fin de l'art. 1119; enfin on a vu, par l'article précédent, que le mouvement de ce centre est entièrement indépendant des actions réciproques que les corps exercent les uns sur les autres, soit par attraction, soit par choc ou par pression, propriété dont la démonstration avait déja été donnée, article 1118; les équations (2) nous redonnent donc ce résultat général: « Lorsqu'un système n'est sollicité par aucune force extérieure, « quels que soient les mouvements de ses diverses parties, dûs tant à des « impulsions initiales qu'à des forces internes, son centre de gravité, « ou est en repos, ou se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme, « dû aux impulsions initiales, et qui se détermine par les équations (2) « de l'art. 1123, comme si le système étoit de forme invariable, sans « avoir égard aux *forces internes*, ou en considérant ces forces et les « actions réciproques par chocs ou pressions comme si elles n'exis- « taient pas. »

J'ai indiqué, art. 1182 et suivants, quelques cas dans lesquels ces mêmes propriétés auraient lieu, quoique le système fût sollicité par des forces extérieures.

Principes des aires.

1270. Les variations δp, δq, δr, etc., δx, δy, δz, qui entrent dans la formule générale (A) de l'article 1263, doivent être assujetties aux conditions énoncées, art. 458, mais il y a une infinité de manières de satisfaire à ces conditions. Considérons, au bout du temps t, un système de points matériels en mouvement, les positions de ces points étant rapportées aux trois axes coordonnés fixes des x, y et z, et imaginons, au bout du temps t, un second système de points, semblable et égal à celui dont il s'agit, et posé de manière que le premier système se confondrait avec lui s'il tournait d'abord d'une quantité angulaire $\delta\phi$ autour de l'axe des z, ensuite d'une quantité angulaire $\delta\omega$ autour de l'axe des y, et, enfin, d'une quantité angulaire $\delta\psi$ autour de l'axe des x; les arcs $\delta\phi$, $\delta\omega$ et $\delta\psi$ sont indépendants les uns des

$$(2)\ldots\left\{\begin{array}{l}\Sigma\left\{m\left(Yx - Xy - \dfrac{xddy - yddx}{dt^2}\right)\right\} = 0\\ \Sigma\left\{m\left(Xz - Zx - \dfrac{zddx - xddz}{dt^2}\right)\right\} = 0\\ \Sigma\left\{m\left(Zy - Yz - \dfrac{yddz - zddy}{dt^2}\right)\right\} = 0\end{array}\right.$$

dont on reconnaîtra aisément l'identité avec les équations (2) de l'art. 1120; on a $xddy - yddx = d(xdy - ydx)$; .... $zddx - xddz = d(zdx - xdz)$; $yddz - zddy = d(ydz - zdy)$; et, art. 838, les quantités $xdy - ydx$, $zdx - xdz$, $ydz - zdy$ sont les doubles des projections respectives, sur les plans xy, xz et yz, de l'aire élémentaire engendrée dans l'espace, pendant l'instant dt, par le rayon vecteur du point dont les coordonnées sont x, y et z. Les équations (2) renferment, ainsi, sous un point de vue général et applicable, sans exception, à toute espèce de système, le *principe des aires*, dont les équations de l'art. 837 n'offrent qu'un cas particulier.

1273. Lorsque le système est entièrement libre, les équations de l'article précédent ont lieu, quelque part qu'on prenne l'origine commune des coordonnées x, y, z et des rayons vecteurs qui décrivent les aires instantanées $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$, $\frac{1}{2}(zdx - xdz)$, $\frac{1}{2}(ydz - zdy)$. Il n'en est pas de même, lorsque le système a un point fixe, car si on place l'origine ailleurs qu'à ce même point, les quantités $d\phi$, $d\omega$, $d\psi$, définies art. 1270, ne peuvent plus être communes, chacune en particulier, à tout le système, et entièrement indépendantes entre elles, conditions d'après lesquelles les équations (2) de l'article précédent ont été établies; le point fixe est donc, dans ce cas le seul de l'espace où on puisse placer l'origine pour que les équations citées aient lieu.

Après avoir ainsi placé l'origine à un point fixe du système, s'il existe, dans ce système, un autre point qui soit fixe aussi, on retombera encore dans l'impossibilité d'avoir les trois quantités $d\phi$, $d\omega$, $d\psi$ communes à tous les éléments de masse; mais, en prenant la ligne qui passe par ces deux points fixes pour un des axes coordonnés, pour l'axe des z par exemple, on fera $d\omega = 0$, $d\psi = 0$, on aura, article 1270, $dx = -yd\phi$, $dy = xd\phi$, $dz = 0$, et ces quantités substi-

belle application, et nous voyons, par les équations précédentes, qu'elle appartient à un système assujetti à des conditions quelconques.

1275. On conclut aisément de ces équations la propriété relative aux aires finies, mais, pour mettre cette conclusion dans tout son jour, je représente par $\frac{1}{2}a_{,}$, $\frac{1}{2}a_{,,}$, $\frac{1}{2}a_{,,,}$ les sommes des produits des masses par les projections des aires finies engendrées au bout du temps t, projections faites, respectivement, sur les plans des xy, xz et yz, on aura

$$\Sigma\{m(xdy - ydx)\} = da_{,}$$
$$\Sigma\{m(zdx - xdz)\} = da_{,,}$$
$$\Sigma\{m(ydx - xdy)\} = da_{,,,}$$

On supposera, dans la suite du calcul, que les valeurs $a_{,}=0$, $a_{,,}=0$, $a_{,,,}=0$, et $t=0$ ont lieu ensemble.

et en différentiant

$$\Sigma\{m(xddy - yddx)\} = dda_{,}$$
$$\Sigma\{m(zddx - xddz)\} = dda_{,,}$$
$$\Sigma\{m(yddx - xddy)\} = dda_{,,,}$$

substituant ces valeurs dans les équations (2) de l'art. 1272, on les change en

$$(1) \ldots\ldots \begin{cases} dda_{,} = \Sigma\{m(Yx - Xy)\}dt^2 \\ dda_{,,} = \Sigma\{m(Xz - Zx)\}dt^2 \\ dda_{,,,} = \Sigma\{m(Zy - Yz)\}dt^2 \end{cases}$$

et ces dernières équations, lorsque les puissances du système se réduisent aux actions réciproques des corps, deviennent

$$(2) \ldots\ldots dda_{,} = 0;\ dda_{,,} = 0;\ dda_{,,,} = 0$$

d'où, en observant qu'on a, par hypothèse, au premier instant

$$a_{,} = 0,\ a_{,,} = 0,\ a_{,,,} = 0,\ t = 0,$$

$$(3) \ldots\ldots \begin{cases} da_{,} = c_{,}dt;\ da_{,,} = c_{,,}dt;\ da_{,,,} = c_{,,,}t \\ a_{,} = c_{,}t;\ a_{,,} = c_{,,}t;\ a_{,,,} = c_{,,,}t \end{cases}$$

les sommes des produits des masses par les projections des aires décrites pendant le temps t, sont proportionnelles à ce temps; c'est, dans le sens le plus étendu, le théorême de l'art. 840, et la propriété énoncée par les équations (3) constitue, spécialement, ce qu'on appelle le principe de la *conservation des aires*.

constantes, le plan passant par l'origine et perpendiculaire à l'axe déterminé par les angles A, B, C, a, par conséquent, une position invariable, d'où on a donné à ce plan, qui forme avec ceux des yz, xz et xy les angles respectifs, A, B et C, le nom de plan *invariable*. J'ai donné, art. 1148 et suivants, un exemple de son emploi, dans les problêmes de dynamique, très-propres à en faire connaître les avantages; on a vu aussi, art. 207, sa propriété relativement aux *aires*, mais les déterminations qui concernent ce plan, sont présentées ici sous un point de vue beaucoup plus général.

1277. Le plan invariable existera toutes les fois que les corps du système ne seront soumis qu'à leurs attractions mutuelles et à des forces extérieures constamment dirigées sur l'origine. Sa détermination exige que l'on connaisse, à un certain instant du mouvement, les masses, les positions, les vîtesses et les directions de tous les corps du système, données au moyen desquelles on calculera les premiers membres des équations (2) de l'article 1274, respectivement égaux aux sommes de moments L, M et N.

Si après avoir déterminé la position de ce plan, on le prend pour un des plans coordonnés, pour le plan des x, y, par exemple, la somme N des moments, par rapport à l'axe des z, deviendra le moment *maximum*, et on aura, art. 175, $M=0$, $L=0$, ces derniers moments se rapportant à des axes situés dans un plan perpendiculaire à l'axe du plus grand moment. C'est cette propriété qui constitue l'avantage principal du plan invariable, et on a vu, en effet, art. 1162, qu'en prenant ce plan pour un des plans coordonnés, deux des constantes arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations du mouvement de rotation, s'évanouissent.

1278. $x_{\prime}$, $y_{\prime}$ et $z_{\prime}$ étant les coordonnées du centre de gravité, comptées sur les axes fixes des x, y et z, faisons passer, par ce centre, trois axes rectangulaires, parallèles aux axes fixes des x, y, et z, désignons par ξ, η et ζ les coordonnées, rapportées à ces axes, respectivement parallèles aux x, y et z, nous aurons, en substituant dans les équations (2) de l'article 1274, les valeurs $x_{\prime}+\xi=x$, $y_{\prime}+\eta=y$ et $z_{\prime}+\zeta=z$, les équations suivantes correspondantes aux équations (1) de l'article 1123

que des mouvements de ses différents points autour du centre de gravité.

1279. Lorsque les calculs de la position du plan invariable, passant par le centre de gravité du système, sont faits d'après des valeurs de $\xi, \eta, \zeta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$, existantes ensemble, à une époque particulière du mouvement, cette position se trouve déterminée pour tous les instants du mouvement tant antérieurs que postérieurs à celui auquel se rapportent les calculs, le plan dont il s'agit demeurant toujours parallèle à un plan fixe, dans l'espace, pendant qu'il se meut avec le centre de gravité; (le mouvement du système n'est censé dû qu'à des impulsions initiales et aux attractions que ses diverses parties exercent les unes sur les autres, et, par conséquant, le mouvement du centre de gravité est uniforme et rectiligne). Cette belle propriété est une conséquence immédiate des équations (3) de l'art. précédent, par lesquelles on voit que les angles formés par le plan invariable et par des axes parallèles à des lignes fixes, dépendent, exclusivement, des quantités ν, μ et λ qui sont les mêmes à chaque instant; mais il sera bon de remarquer qu'elle est, aussi, une des conséquences importantes de la théorie des *moments* et des *aires* exposées art. 157 et suivants, et les théorêmes d'où elle se déduit particulièrement sont consignés dans les art. 182 et 183. On voit, par ces articles, que l'axe du moment maximum, qui est perpendiculaire au plan invariable, forme un angle constant avec chacun des axes coordonnés lorsque l'origine se meut sur une parallèle à l'axe que j'ai désigné par ligne (R), et qui est parallèle à la résultante générale qu'auraient les forces si elles étoient, chacune parallèlement à sa direction, appliquées à un même point de l'espace. Or, dans le cas dont il s'agit ici, les forces à considérer sont les quantités de mouvement qui animent tous les éléments de masse du système; les moments de ces forces, seules données du calcul, sont invariables, et, d'après les propositions précédemment démontrées sur le mouvement du centre de gravité, la ligne droite qu'il parcourt est précisément sur la direction de la résultante de toutes les quantités de mouvement dont je viens de parler, en les supposant dirigées sur ce centre parallèlement à leurs directions respectives.

Les pressions et les chocs que les corps du système peuvent exercer les uns sur les autres n'apportant aucun changement aux phénomènes

avoir lieu sans que le système soit dénaturé, l'équation précédente doit être satisfaite, si, à un instant quelconque, on prend, pour système fictif, le système des points dont ceux du système réel occuperont les places dans l'instant suivant, le système fictif, qu'on choisit alors, remplissant évidemment la seule condition à laquelle il est assujetti; mais, dans ce cas, les variations δx, δy, δz deviennent identiques avec les différentielles dx, dy, dz, donc l'équation, équivalente à celle qui précède, posée art. 1268,

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma\left\{m\left(\frac{ddx}{dt^2}-X\right)\delta x\right\} \\ +&\Sigma\left\{m\left(\frac{ddy}{dt^2}-Y\right)\delta y\right\} \\ +&\Sigma\left\{m\left(\frac{ddz}{dt^2}-Z\right)\delta z\right\} \end{aligned}\right\} = 0$$

se change en

$$(C)\ldots\Sigma\left(m.\frac{dxddx+dyddy+dzddz}{dt^2}\right)=\Sigma\{m(Xdx+Ydy+Zdz)\}$$

1281. L'emploi de l'équation précédente donne lieu à quelques observations que je vais d'abord présenter aux élèves.

Les variations, par δ, qui entrent dans les équations générales des art. 1263 et 1268, sont indépendantes du mouvement réel du système; la translation, de laquelle on les fait dépendre, est entièrement hypothétique, et il suffit que cette translation puisse avoir lieu sans violer certaines conditions; mais il peut arriver que les équations qui expriment ces conditions renferment le temps; tel serait, par exemple, le cas dans lequel un des corps du système se mouverait sur une courbe ou sur une surface assujettie, elle-même, à un mouvement, qui suivrait une certaine loi, et dont l'équation devrait nécessairement contenir le temps t; cette quantité t pourrait être assimilée à un paramètre variable dont chaque valeur déterminée correspondrait à une position déterminée de la surface; ainsi une des équations de condition du système serait de la forme

$$(c)\ldots f(t,\ x_{,},\ y_{,},\ z_{,};\ x_{,,},\ y_{,,},\ z_{,,},\ \text{etc.})=0$$

$x_{,}$, $x_{,,}$, etc. $y_{,}$, $y_{,,}$, etc. $z_{,}$, $z_{,,}$, etc. étant les coordonnées des différents points du système, et les conditions de ce système étant exprimées par des équations entre ces coordonnées.

citent les masses m', m'', etc. du système, et on peut faire sur chacun de ces termes, le même raisonnement qu'on a fait sur le terme unique de l'art. 823; la propriété démontrée dans cet article est donc applicable à un système quelconque.

Cette même propriété s'étend au cas des attractions mutuelles des corps du système, dans l'hypothèse où ces attractions suivent la loi de celles du système du monde, en substituant, seulement, à l'inverse du quarré de la distance, une fonction quelconque de cette distance. Pour le démontrer, je désigne, par m' et m'', deux masses du système; par r, leur distance, et par $f(r)$ une fonction de cette distance telle que la force accélératrice, imprimée à m'', en vertu de l'action de m', soit $m'f(r)$, la force accélératrice imprimée à m', en vertu de l'action de m'' étant $m''f(r)$; ces expressions $m'f(r)$ et $m''f(r)$ représentent $\frac{m'q}{r^2}$ et $\frac{Mq}{r^2}$ de l'article 916, dans le cas de l'attraction newtonienne, $\frac{q}{r^2}$ étant représenté par $f(r)$.

Soient maintenant x', y', z'; x'', y'', z'' les coordonnées respectives de m' et m'', les cosinus des angles formés par la ligne r et par les axes des x, y et z seront $\frac{x'-x''}{r}$, $\frac{y'-y''}{r}$, $\frac{z'-z''}{r}$ et les composantes de $m'f(r)$ et $m''f(r)$ parallèles aux mêmes axes seront, en faisant attention que ces deux forces accélératrices, dirigées en sens opposés, doivent avoir des signes différents

$$m'f(r)\frac{x'-x''}{r}\ ;\ m'f(r)\frac{y'-y''}{r}\ ;\ m'f(r)\frac{z'-z''}{r}$$

$$m''f(r)\frac{x''-x'}{r}\ ;\ m''f(r)\frac{y''-y'}{r}\ ;\ m''f(r)\frac{z''-z'}{r}$$

d'où on tire

$$X'dx'+Y'dy'+Z'dz'=\frac{m''f(r)}{r}\{(x''-x')dx'+(y''-y')dy'+(z''-z')dz'\}$$

$$X''dx''+Y''dy''+Z''dz''=\frac{m'f(r)}{r}\{(x'-x'')dx''+(y'-y'')dy''+(z'-z'')dz''$$

et la quantité

$$m'(X'dx'+Y'dy'+Z'dz')+m''(X''dx''+Y''dy''+Z''dz'')$$

L'équation (D) de laquelle sont conclues toutes ces propriétés, énonce le principe appelé *principe général de la conservation des forces vives*. Les élèves se rappelleront que ce principe a déja été vérifié dans le choc des corps élastiques, et que des questions traitées dans cette seconde partie du cours nous ont conduit à des équations qui sont des cas particuliers de l'équation (D).

1284. On peut imaginer que les corps du système agissent les uns sur les autres par l'intermède de ressorts ; et pour fixer les idées, à cet égard, on peut supposer que ces ressorts sont de l'espèce de ceux qu'on appelle, *à boudin*, formés de fils élastiques, tournés en spirales. Un de ces ressorts, contracté, qui se trouverait être le moyen de liaison entre deux corps, pourrait faire alternativement l'office d'une force répulsive ou d'une force attractive tendant ou à éloigner ou à rapprocher ces corps l'un de l'autre, et comme l'hypothèse la plus naturelle, sur la loi de cette répulsion ou de cette attraction, est de dire qu'elles sont fonctions de la longueur du ressort, puisque cette longueur détermine son plus ou moins de contraction ou de tension, la force dont je parle se trouve dans la classe de celles qui rendent intégrable le 2e membre de l'équation (C) de l'art. 1280.

Les phénomènes du choc des corps élastiques, depuis l'instant du contact jusqu'à celui de la séparation des corps peuvent être assimilés à ceux qui auraient lieu si on interposait, entre ces corps, des ressorts comme ceux dont nous venons de parler, et dont la masse serait supposée négligeable; d'où on conclut, d'après ce qui est dit à l'article précédent, que dans le cas de l'élasticité parfaite, la somme des forces vives est la même, au commencement et à la fin du choc, les corps du système reprenant, au 2e de ces instants, leurs figures initiales, mais que cette somme doit varier pendant la durée du choc.

Perte de forces vives occasionnée par les changements brusques qui peuvent survenir dans le système.

1285. Lorsque les mouvements des corps du système sont modifiés par des frottements des résistances de milieux, et, en général, par des puissances et des résistances dans les expressions desquelles entrent les vîtesses, l'expression $\Sigma \{ m (Xdx + Ydy + Zdz) \}$ n'est plus intégrable par elle-même; il y a une perte de force vive qui peut aller graduellement jusqu'à son extinction totale.

l'équation précédente, divisée par $\frac{1}{2}$, peut se mettre sous la forme

$$(E) \ldots\ldots \Sigma(mU^2) - \Sigma(mV^2) = \Sigma(mW^2)$$

ainsi la perte $\Sigma(mU^2) - \Sigma(mV^2)$ de forces vives a pour valeur une somme de forces vives, hypothétique, celle qu'aurait le système si chacun de ses points matériels se trouvoit animé de la vîtesse qu'il a perdue par l'effet du choc.

Positions du systême correspondantes aux maxima et minima des sommes des forces vives, à la stabilité et à la non stabilité de l'équilibre.

1286. La propriété du mouvement dont je vais donner une démonstration générale a déjà été, dans la 1re. partie du cours, art. 516, déduite par anticipation de l'équation des forces vives, ou équation (D) de l'art. 1283, et il est convenable que je rappelle cette propriété puisque j'ai démontré l'équation citée ; on voit en effet par la relation

$$\Sigma(mv^2) = K + 2\Phi$$

qu'elle établit entre $\Sigma(mv^2)$ et Φ, que la somme $\Sigma(mv^2)$ des forces sera un maximum ou un minimum lorsque $d \cdot \Sigma(mv^2)$ sera nul ou lorsqu'on aura $d\Phi = 0$; mais art. 1283,

$$d\Phi = \Sigma \{m(Xdx + Ydy + Zdz)\}$$

ainsi $\Sigma(mv^2)$ est un maximum ou un minimum lorsque

$$\Sigma\{m(Xdx + Ydy + Zdz\} = 0.$$

Le système en mouvement se trouvant dans les cas énoncés aux art. 1281 et 1282 et, par conséquent, la substitution des différentielles par d, aux variations par δ, étant permise, cette équation est celle qui doit être satisfaite dans le cas où les puissances appliquées au systême se font équilibre, donc la somme des forces vives est un maximum ou un minimum, ou, pour donner une énonciation plus complète, la différentielle de cette somme est égale à zéro lorsque le systême passe par les positions dans lesquelles il faudrait le mettre, d'abord, pour que les forces qui y sont appliquées se fissent équilibre ; il ne franchit ces positions qu'en vertu des mouvements acquis par les différents corps qui le composent. C'est le théorême de *Courtivron* conclu, par anticipation, à l'art. 516, ainsi que j'en ai prévenu ci-dessus, de l'équation générale qui, ensuite, a été démontrée art. 1283.

$$v^2 = . \frac{ds}{dt} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

on a, de plus, art. 1283

$$\Phi = \int . \Sigma \{ m(X dx + Y dy + Z dz) \}$$

et l'équation $\Sigma(m v^2) = K + 2\Phi$, de cet article, peut, en profitant de la faculté qu'on a de transposer les signes $\int$ et Σ, se mettre sous la forme

$$2\Sigma\left(m \frac{v ds}{dt}\right) = \begin{cases} 2\Sigma \{ m \int (X dx + Y dy + Z dz) \\ + \Sigma\left(m \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) + K \end{cases}$$

différentiant par δ, observant, comme à l'art. 844, que la fonction finie $\int \{(X dx + Y dy + Z dz)\}$ doit avoir les mêmes coëfficients différentiels soit qu'on la différentie par d soit qu'on la différentie par δ, et qu'ainsi $\delta \int (X dx + Y dy + Z dz) = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$ on a,

$$\delta \Sigma\left(m \frac{v ds}{dt}\right) = \begin{cases} \Sigma \{ m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \} \\ + \Sigma\left(m \frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz}{dt^2}\right) \end{cases}$$

substituant a X, Y, Z leurs valeurs $\frac{ddx}{dt^2}$, $\frac{ddy}{dt^2}$, $\frac{ddz}{dt^2}$, usant de la faculté qu'on a de transposer les signes d et δ, observant que $ddx\delta x + dx d\delta x + ddy\delta y + dy d\delta y + ddz\delta z + dz d\delta z = d(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)$ et multipliant par dt, différentielle constante, l'équation précédente devient

$$\delta \Sigma (m v ds) = \Sigma \left\{ m \frac{d(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z)}{dt} \right\}$$

et on en déduit, par l'intégration sous le signe Σ,

$$\delta \Sigma (m \int v ds) = constante + \Sigma \left\{ m \frac{(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z)}{dt} \right\}$$

les trajectoires effectives et les trajectoires variées étant supposées avoir des origines communes, ce qui donne aux premières limites, $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, on a, en même temps $\delta\Sigma (m\int v ds) = 0$ et $\Sigma\left(m \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{dt}\right) = 0$, d'où $constante = 0$; si, de plus, ces trajectoires, effectives et variées, se terminent aux mêmes points, ou

TABLE DES MATIÈRES
CONTENUES
DANS LA SECONDE PARTIE.

SECTION I.
NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Définition de la Dynamique. Détails historiques. Relations qui lient la théorie de l'équilibre à celle du mouvement. Article 666

Du temps, considéré comme quantité mathématique, et de sa mesure. 671

Considérations générales sur les relations entre les espaces parcourus par un point matériel, et les temps employés à parcourir ces espaces. Différentes espèces de mouvements que comportent ces relations. Définitions du mouvement *uniforme* et du mouvement *varié*. Ce qu'on entend par mouvement *accéléré* et mouvement *retardé*. Considérations analytiques applicables à tous les genres de mouvements. 677

Propriétés du mouvement uniforme. Définition de la *vîtesse*. Mouvements variés qui, pour certaines divisions du temps, offrent les propriétés du mouvement uniforme. 685

De la vîtesse dans le mouvement varié en général. 691

Du mouvement uniformément varié. 696

Application de la théorie du mouvement uniformément varié au mouvement vertical des corps graves dans le vide. 707

Comparaison d'un mouvement varié, d'une manière quelconque, avec le mouvement uniformément varié. De la quantité qui, dans un mouvement quelconque, a le nom de *force accélératrice*. 712

Classement des effets *dynamiques* produits par une force sur un corps. Cas où la force, après la génération instantanée d'une vîtesse finie, cesse d'agir sur le mobile. Phénomènes qui ont lieu lorsque ce mobile est ainsi abandonné à lui même. De la *force d'inertie*. 714

Diverses manières d'agir des forces dont les actions sont soumises à la loi de continuité, eu égard au mouvement actuel des corps qui éprouvent ces actions. Principes sur la comparaison de ces forces entr'elles. Définition de la *force motrice*. 718

Propriétés du mouvement d'un corps pesant sur un plan incliné. 779
Mouvement de deux points matériels pesants, posés sur des plans inclinés adossés et liés l'un à l'autre, en ayant, ou non, égard à la résistance du frottement. 783
Application de la théorie exposée dans le chapitre précédent à la solution d'un problême qui rend sensible la différence dés effets de la *percussion* à ceux de la *pression*. Détails à ce sujet. 786
Théorie de la machine D'ATWOOD. 790
Récapitulation des principes généraux de la Dynamique. 793
Cònformité des principes généraux de la Dynamique aux phénomènes observés. 812

SECTION II.

THÉORIE GÉNÉRALE DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL,

EN AYANT ÉGARD AUX DIVERSES CONDITIONS

AUXQUELLES CE MOUVEMENT PEUT ÊTRE ASSUJETTI.

Équations générales du mouvement *libre* d'un point matériel sollicité par des forces quelconques. 816
Valeur générale de la vitesse, déduite des équations précédentes. Observations sur la fonction qui donne cette valeur. 822
De la force *tangentielle* et de la force *normale*. Expression de la vitesse en fonction des composantes *tangentielles*. 828
Considérations générales sur la *trajectoire* ou courbe décrite par le mobile. Valeur générale de son rayon de courbure. Équation du plan, de position variable, qui renferme l'arc élémentaire décrit de ce rayon. 833
Propriétés générales du mouvement libre d'un point matériel, sollicité par des puissances quelconques. Relations entre les *aires* et les *moments*. Cas qui rend les *aires* proportionnelles aux temps. Propriétés particulières qui en dépendent. Principe de la *moindre action* vérifié dans le mouvement d'un point matériel dû à des forces centrales. 837
Mouvement des *projectiles* dans le vide, ou mouvement curviligne d'un point matériel pesant qui a reçu une impulsion initiale dans une direction formant un angle quelconque avec la verticale. 846
Mouvement curviligne des projectiles pesants dans un milieu résistant. Formules générales indépendantes de toute hypothèse sur la loi de la résistance. 859
Analyse particulière du problême de la trajectoire dans le cas où la résistance du milieu est proportionnelle au quarré de la vitesse. Équations différentielles de la courbe, ses asymptotes, sa forme générale. 865
Calcul, par parties, des coordonnées de la trajectoire et construction de cette courbe par points. 872

tériel attiré, vers un centre fixe, en raison inverse des quarrés des distances. 911
Comment on a égard aux actions que les planètes exercent sur le soleil dans les expressions analytiques relatives à leurs mouvements. Petites anomalies qu'éprouve la troisième loi de Kepler. Formules pour calculer les rapports entre les masses des corps du système planétaire. Force de la pesanteur à la surface de chaque planète. Lois du mouvement de deux corps célestes dans l'hypothèse où ils n'auraient reçu aucune impulsion initiale. Immobilité, dans cette hypothèse, de leur centre de gravité commun. 912
Considérations générales sur le mouvement d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur une courbe donnée. Expression générale de la vitesse. Cette vitesse est constante lorsque le mobile ne se meut qu'en vertu d'une impulsion initiale. 917
Considérations générales sur la pression qu'exerce contre la paroi intérieure d'un tube, ou canal fixe, de courbure quelconque *continue*, un corps obligé de se mouvoir dans ce tube. Evaluation générale de la partie de cette pression due à la vitesse du mobile. Définition de la *force centrifuge*. Cas où le mouvement est modifié, soit par le frottement, soit par la résistance d'un milieu. 924
De la pression totale qu'un corps fait éprouver à une courbe quelconque, sur laquelle il est obligé de se mouvoir, due tant à sa *force centrifuge* qu'à l'action des puissances auxquelles ce corps est soumis. 927
De la pression que fait éprouver à une courbe plane, sur laquelle il est obligé de se mouvoir, un point matériel sollicité par des forces quelconques, dirigées dans le plan de cette courbe, en ayant égard, tant aux actions des forces qu'à la vitesse du mobile. 929
Moyen de faire décrire une courbe donnée à un point matériel, sans le renfermer dans un tube ou canal. Équation fondamentale de la théorie des forces centrales, déduite des conditions d'équilibre entre la force centrifuge et l'action normale des puissances qui agissent sur le mobile. 932
Digression sur la vérification du principe de la pesanteur universelle que le mouvement de la lune a fourni à Newton. 934
Formules diverses relatives à la force centrifuge qui dérive du mouvement circulaire. Détermination de la force accélératrice due à la pesanteur dans le cas où la terre n'aurait aucun mouvement de rotation autour de son axe. Valeur de la vitesse horizontale qui annulerait l'effet de la gravité. 936
Observations et exemple relatifs à l'effet que produit, sur un mobile assujetti à parcourir une ligne donnée, la *solution de continuité* de la direction de cette ligne. Propriétés générales du mouvement d'un corps pesant assujetti à parcourir une courbe fixe quelconque. 940
Propriétés générales du mouvement d'un point matériel pesant assujetti à parcourir une courbe quelconque fixe et continue. 945

Vitesse angulaire et conservation des forces vives dans le cas où le systême, mu en vertu d'une impulsion initiale, n'est sollicité par aucune puissance extérieure. 1206
Application des formules précédentes à quelques exemples. 1208
Effets des impulsions initiales données au systême de corps dont il a été question dans les trois chapitres précédents; phénomènes de mouvement qui ont lieu lorsqu'un corps, assujetti à tourner autour d'un axe fixe, en choque plusieurs autres. 1213
Mouvement, d'un corps pesant, sur une courbe attachée à un autre corps, ce dernier corps étant assujetti à se mouvoir sur un plan. 1219
Oscillations d'un corps pesant, assujetti à se mouvoir sur une courbe tenant à un corps mobile. Détermination de la courbe tautochrone, pour cette espèce d'oscillation. 1225
Chocs de plusieurs corps sphériques par un seul, le corps choquant et les corps choqués étant ou parfaitement durs, ou doués d'un degré quelconque d'élasticité. 1226
Vitesses relatives, somme et perte des forces vives, après le choc. 1229
Choc de deux corps, durs ou élastiques, et de formes quelconques. 1232
Mouvement d'un fil élastique dans le sens de sa longueur et retenu par deux points fixes. 1236
Propriété et construction de l'équation qui donne le mouvement de la corde vibrante. 1241
Conséquences déduites de la théorie précédente. Divers détails relatifs à la corde vibrante et sonore. 1247
Équation du mouvement applicable à tout systême de corps, quelles que soient sa forme et les conditions auxquelles il est assujetti. 1262
Principe de la conservation du mouvement du centre de gravité. 1267
Principes des aires. 1270
Du plan invariable. 1276
Principe des forces vives. 1280
Perte de forces vives occasionnée par les changements brusques qui peuvent survenir dans le systême. 1285
Principe de la moindre action. 1288

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES CONTENUES DANS LA SECONDE PARTIE.

Vitesse angulaire et conservation des forces vives dans le cas où le systême, mu en vertu d'une impulsion initiale, n'est sollicité par aucune puissance extérieure. 1206
Application des formules précédentes à quelques exemples. 1208
Effets des impulsions initiales données au systême de corps dont il a été question dans les trois chapitres précédents; phénomènes de mouvement qui ont lieu lorsqu'un corps, assujetti à tourner autour d'un axe fixe, en choque plusieurs autres. 1213
Mouvement, d'un corps pesant, sur une courbe attachée à un autre corps, ce dernier corps étant assujetti à se mouvoir sur un plan. 1219
Oscillations d'un corps pesant, assujetti à se mouvoir sur une courbe tenant à un corps mobile. Détermination de la courbe tautochrone, pour cette espèce d'oscillation. 1225
Chocs de plusieurs corps sphériques par un seul, le corps choquant et les corps choqués étant ou parfaitement durs, ou doués d'un degré quelconque d'élasticité. 1226
Vitesses relatives, somme et perte des forces vives, après le choc. 1229
Choc de deux corps, durs ou élastiques, et de formes quelconques. 1232
Mouvement d'un fil élastique dans le sens de sa longueur et retenu par deux points fixes. 1236
Propriété et construction de l'équation qui donne le mouvement de la corde vibrante. 1241
Conséquences déduites de la théorie précédente. Divers détails relatifs à la corde vibrante et sonore. 1247
Équation du mouvement applicable à tout systême de corps, quelles que soient sa forme et les conditions auxquelles il est assujetti. 1262
Principe de la conservation du mouvement du centre de gravité. 1267
Principes des aires. 1270
Du plan invariable. 1276
Principe des forces vives. 1280
Perte de forces vives occasionnée par les changements brusques qui peuvent survenir dans le systême. 1285
Principe de la moindre action. 1288

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES CONTENUES DANS LA SECONDE PARTIE.

ERRATA.

Page 18 *ligne* 13 (*à compter du haut*), $\frac{1}{2} f''$ *lisez* $\frac{1}{2} \tau f''$

Id. lig. 14 (*du h.*), ξ, *lisez* $\frac{\xi}{\tau}$

70 *ligne* 4 (*du h.*) $M'V' +$ *lisez* $M'V' \pm$

104 *lig.* 11 (*du h.*), des millimètres, *lisez* de millimètre

124 *lig.* 16 (*du h.*), $-z, y$ et x, *lisez* z, y et $-x$

id. lig. 19 (*du h.*), $= a_{,,} y$, *lisez* $= -a_{,,} y$

130 *lig.* 2 (*à c.ter du bas*), $2U \sin. \theta \cos. \theta$, *lisez* $2H \sin. \theta \cos. \theta$

193 *lig.* 4 (*du b.*), $-Ndt$, *lisez* $-\Gamma dt$

245 *lig.* 6 (*du b.*) le plan qui la, *lisez* le plan vertical qui la

248 *lig.* 3 (*du h.*), *écrivez en marge*, Fig. 8.

268 *lig.* 18 (*du h.*) en même temps. *lisez* en même temps et aux extrémités d'un même diamètre.

291 *lig.* 14, (*du h.*) gdt, *lisez* $-gdt$

304 *lig.* 6 (*du b.*), d'*iuertie* lisez d'*inertie*

320 *lig.* 8 (*du h.*) des z, *lisez* des $z_{,}$

351 *lig.* 3 (*du h.*) $\frac{ddA}{dt^2}, \frac{ddB}{dt^2}, \frac{ddC}{dt^2}$, *lisez* $\frac{dA}{dt}, \frac{dB}{dt}, \frac{dC}{dt}$.

Id. lig. 5 (*du b.*), 119, *lisez* 1119.

359 *lig.* 8 (*du b.*), ne peut donc agir, *lisez* n'agit donc

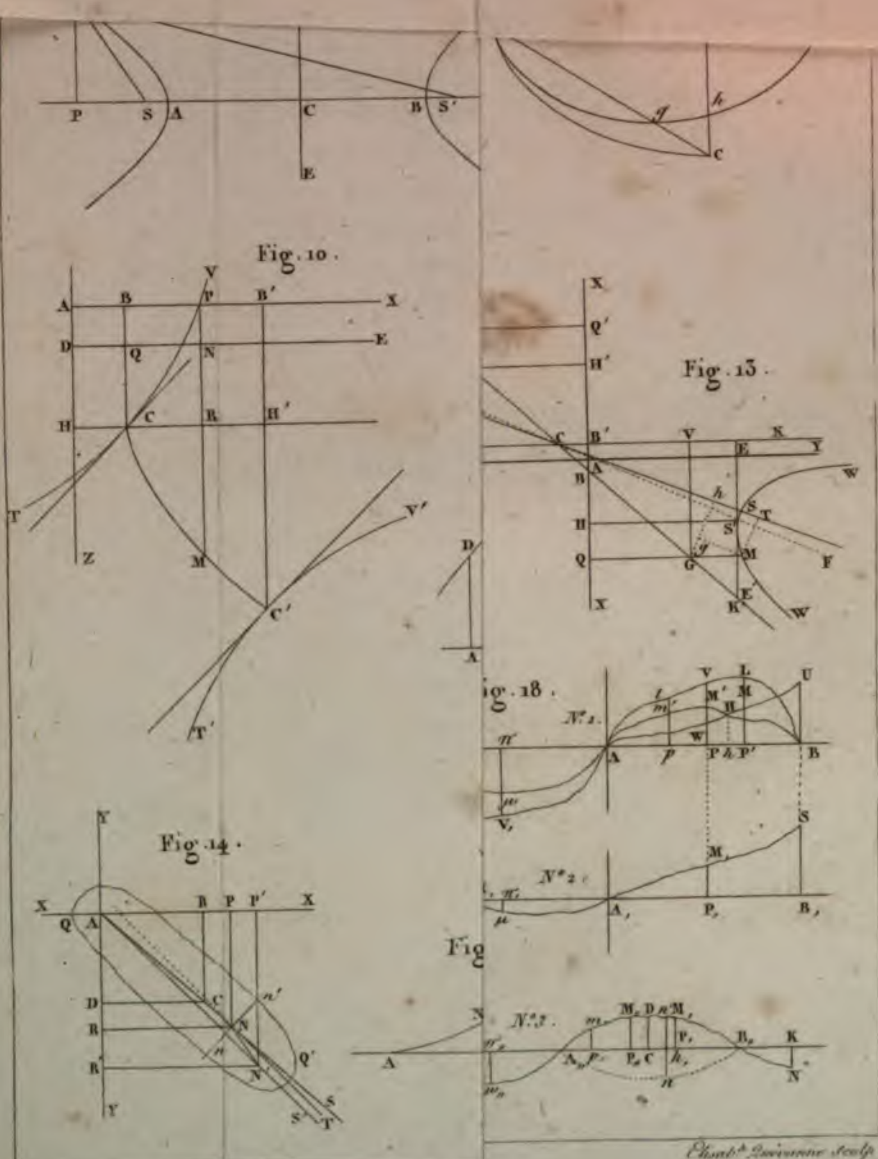
377 *lig.* 6 (*du b.*), $= qx_{,}$, *lisez* $-qx_{,}$

483 *lig.* 14 (*du b.*), est la valeur *lisez* est double de la valeur

Id. lig. 16 (*du b.*), à l'ordonnée, *lisez* à la moitié de l'ordonnée,

497 *lig.* 1 (*du b.*), 143639, *lisez* 14363

501 *lig.* 12 (*du b.*), Claladni, *lisez* Chladni


Fig. 10.
Fig. 13.
Fig. 14.
ig. 18.
Fig
N° 1.
N° 2
N° 3.